ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

АСТРОНОМИЈА

КЛАСИКА У НОВОМ РУХУ

ОД

РОБИНА М. ГРИНА

ПРОФ УНИВЕРЗИТЕТА У ГЛАЗГОВУ

У ПРЕВОДУ

СТЕВЕ ШЕГАНА

ПРОФ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

НАДЕ ПЕЈОВИЋ

ПРОФ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ЗЛАТКА ЋАТОВИЋА

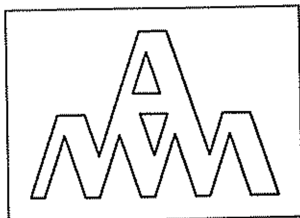
ДОЦ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

VESTA COMPANY

БЕОГРАД

1998

ISBN 86-7212-009-4



ASTRONOMIJA KLASIKA U NOVOM RUHU
Prvo izdanje

Izdavač: VESTA COMPANY
Za izdavače: STEVO ŠEGAN, JADRANKA JANKOV
Redakcioni odbor: STEVO ŠEGAN, ŽARKO MIJAJLOVIĆ
Recenzent: VREME...
Uređivački odbor: STEVO ŠEGAN, ALEKSANDAR B.D. BALAŠKOVIĆ
Obrada teksta i slika u AstroTEXu: ALEKSANDAR B.D. BALAŠKOVIĆ

Štampa: VESTA Company
Povez: VESTA Company
Tiraž: 300 primeraka

Adresa izdavača: VESTA Company, Beograd–Zemun, Novogradska 51

САДРЖАЈ

Sadržaj

ГЛАВА СЕДМА
Putanje planeta i satelita
121–136

ГЛАВА ОСМА
Heliocentrične i baricentrične koordinate
137–155

ГЛАВА ДЕВЕТА
Precesija i nutacija
156–176

ГЛАВА ДЕСЕТА
Vreme
177–194

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА
Sopstveno kretanje i radijalna brzina
195–213

ГЛАВА ДВАНАЕСТА
Srednje i prividne koordinate
214–231

ГЛАВА ТРИНАЕСТА
Astrofotografija
232–250

ГЛАВА ЧЕТРНАЕСТА
Daljine i kretanja zvezda
251–271

ГЛАВА ПЕТНАЕСТА
Elementi radio astronomije
272–290

ПРЕДГОВОР

Predgovor

Godinama je Smartova *Sferna astronomija* preporučivana kao standardni uvodni tekst u položajnu astronomiju. Ta knjiga je prvi put objavljena 1931. godine i mada je imala brojna revidiranja i poboljšanja, oseća se već neko vreme potreba za novom knjigom istog nivoa. Kada sam kompletirao najnoviju reviziju Smartovog teksta 1977. godine, nije bilo pogodno vreme za izlazak nove knjige. Bile su planirane revizije u *Astronomical Ephemerisu* i u drugim godišnjacima, prvenstveno zbog uvođenja novog sistema astronomskih konstanti. Ovaj prelazak, koji je bio kompletiran tek 1984. godine, takođe zahteva usvajanje novog standardnog ekvinokcija i novog fundamentalnog kataloga zvezda. Najvažnije je da je fundamentalni značaj relativnosti prihvaćen i u položajnoj astronomiji. Do tada, relativnost je tretirana nejasno i uzgredno.

Ovaj takst je namenjen redovnim studijama; korišćeni metod je matematički jednostavan. U tom smislu, sličan je Smartovoj knjizi, kojoj, prirodno, ja lično mnogo dugujem. Smart je, takođe, koristan kao referentni tekst za poslediplomce i naučne istraživače na drugim poljima; očekuje se da i ova knjiga zadovolji istu funkciju.

Bio sam podstaknut novopublikovanom knjigom *Vectorial Astrometry* od C. A. Murraya. Dok je ta knjiga namenjena prvenstveno specijalistima i razmatranja su veoma napredna u tehničkom smislu, njena filozofija je slična mojoj—opšta relativnost mora da se uvede u astrometriju na fundamentalni nivo. Sledstveno tome, decidirano posmatrati srodstvo položajne astronomije i opšte relativnosti kao konceptualno jasan osnovni nivo. Metod tenzorskog računa je uveden u upotrebu i u Prilogu je objašnjena suština ovog metoda autorima kojima to nije blisko. Međutim, za veći deo, matematički metodi uvlače sfernu trigonometriju u običnu trodimenzionalnu vektorsku analizu.

Kako je ova knjiga prvenstveno namenjena redovnim studijama, bilo je prikladno staviti zadatke na kraju glava. Neki od njih su numeričke prirode i u tom slučaju rešenja su data u jednom od Priloga. Račun kao takav nije stvarni deo predmeta ove knjige; to je izvrsno obuhvaćeno u *Practical Astronomy with Your Calculator* od P. Duffet-Smitha. Međutim, samo reč napomene; neki numerički problemi, posebno u kasnijim glavama, mogu biti češće zapleteniji nego što izgledaju na prvi pogled. Pretpostavljeno je da je dostupan, u najmanju ruku, programabilni kalkulator sa kojim se to rešava. Takvi problemi mogu biti interpretirani kao poziv za pisanje programa koji prati generalnu proceduru opisanu u tekstu. U prvim glavama, gde su procedure mnogo direktnije, uvedeni su primeri za rad.

Zadovoljstvo mi je da zahvalim na pomoći i podršci koju sam imao od prof. Archie Roya. On je čitao ceo rukopis i ukazao mi na mnoge greške i propuste. Preostale su, naravno, moja odgovornost. U ranijem stadijumu dobio sam detaljnu pomoć od dr G. A. Wilkinsa, Načelnika biroa za Nautički almanah, kojem sam mnogo zahvalan. Takođe, želim da izrazim poštovanje prof. Peter Sweetu i dr Bernard Schutzu sa kojima sam imao korisne diskusije, zahvalnost gospođici L. Williamson za tako odgovorno, brzo i pažljivo kucanje rukopisa i Gilbert Stewartu za njegovu pravovremenu pomoć sa slikama.

Glasgow 1984. *Robin M. Green*

ПРЕДГОВОР СРПСКОМ ИЗДАЊУ



Predgovor srpskom izdanju

Ovo izdanje, osim svojevrsnog nastojanja da se pojavi novo delo iz u nas retko zastupljene oblasti astronomske, treba da predstavlja i samosvojan napor da se podigne nivo štamparske kulture, bar u oblasti retkih izdanja.

Zbog svega toga, štampanje ove knjige praćeno je sa nekoliko posebnih nastojanja na koja ćemo ovde skrenuti pažnju, a od čitalaca i potencijalnih i nepotencijalnih kritičara očekujemo korisne sugestije i primedbe.

Nastojanja možemo da podelimo u dve osnovne grupe: grupa *modernih* rešenja svih štamparskih problema i grupa *klasičnih* rešenja, gde naše okruženje i poznavanje problema ne može da izađe iz tog okvira dovoljno kvalitetno.

Kod modernih rešenja posebna pažnja posvećena je izboru tehnologije i programskog okruženja za obradu teksta i izradu grafičkih prikaza. Polazeći od izvesnih tvorevina poznatih kao *TEX* i *ADOBE PostScript*, od idejnih astro-inovacija *S. D. Šegana* i tehnoloških inovacija *A. B. D. Balaškovića*, dobijeno je okruženje koje nosi radni naslov *AstroTEX*. *Pretežnost eklektizma i kompilacije* raznih ideja i tehnologija vidi se već i u mešanju pisama u štampi, te svi prigovori, u tom smislu, idu na gornje adrese. *Razlozi za to biće nekom prilikom posebno dati*.

СКРАЋЕНИЦЕ

Skraćenice

APFS	Prividni položaji fundamentalnih zvezda
AJ	Astronomska jedinica
EHA	Efemeridski časovni ugao
EMS	Efemeridsko srednje Sunce
EST	Efemeridsko zvezdano vreme
ET	Efemeridsko vreme
FK4	Četvrti fundamentalni katalog
FMS	Fiktivno srednje Sunce
t_0	Grinički časovni ugao
t_G	Griničko srednje zvezdano vreme
S	Griničko zvezdano vreme
t	Časovni ugao
H-R	Hertzsprung-Russell
IAU	Međunarodna Astronomska Unija
JD	Julijanski datum
kpc	Kiloparsek
LSR	Lokalni inercijalni sistem
s	Mesno zvezdano vreme
MJD	Modifikovani Julijanski datum
Mpc	Megaparsek
NPD	Polarna daljina
pc	Parsek
PRF	Ponavljanje učestanosti pulsacije
PZT	Fotografska zenitna tuba
QSO	Kvazizvezdani objekti
α	Rektascenzija
RF	Radio frekvencija
SBI	Kratkobazična interferometrija
SI	Međunarodni sistem
TAI	Međunarodno atomsko vreme
TDB	Baricentrično dinamičko vreme
TDT	Zemljino dinamičko vreme
UMS	Svetsko srednje Sunce
UT	Svetsko vreme
UTC	Koordinirano svetsko vreme
VLBI	Dugobazična interferometrija

Latinica		Ćirilica		Grčki		Gotica	
A	a	А	а	Α	α	𝔄	𝔞
B	b	Б	б	Β	β	𝔅	𝔟
C	c	Ц	ц	Ξ	ξ	ℭ	𝔠
D	d	Д	д	Δ	δ	𝔇	𝔡
E	e	Е	е	Ε	ε	𝔈	𝔢
F	f	Ф	ф	Φ	ϕ φ	𝔉	𝔣
G	g	Г	г	Γ	γ	𝔊	𝔤
H	h	Х	х	Χ	χ	ℌ	𝔥
I	i	И	и	Η	η	ℑ	𝔦
J	j	Ј	ј	Ι	ι	𝔍	𝔧
K	k	К	к	Κ	ϰ	𝔎	𝔨
L	l	Л	л	Λ	λ	𝔏	𝔩
M	m	М	м	Μ	μ	𝔐	𝔪
N	n	Н	н	Ν	ν	𝔑	𝔫
O	o	О	о	Ο	ο	𝔒	𝔬
P	p	П	п	Π	π ϖ	𝔓	𝔭
Q	q					𝔔	𝔮
R	r	Р	р	Ρ	ρ	ℜ	𝔯
S	s	С	с	Σ	σ ς	𝔖	𝔰
T	t	Т	т	Τ	τ	𝔗	𝔱
U	u	У	у	Υ	υ	𝔘	𝔲
V	v	В	в	Θ	θ ϑ	𝔙	𝔳
W	w			Ω	ω	𝔚	𝔴
X	x			Ψ	ψ	𝔛	𝔵
Y	y					𝔜	𝔶
Z	z	З	з	Ζ	ζ	ℨ	𝔷
Č	č	Ч	ч				
Ć	ć	Ћ	ћ				
Đ	đ	Ђ	ђ				
Š	š	Ш	ш				
Ž	ž	Ж	ж				
		Њ	њ				
		Љ	љ				
		Џ	џ				

Глава Прва

Osnovne formule

§ **1.1. Uvod.** Pre otkrića radara, nije bilo načina za direktno merenje rastojanja ma kog astronomskog objekta. Čak i danas, primena radara je u nekoliko ograničena. Moguće je meriti radarom rastojanja nekih objekata u Sunčevom sistemu, ali je to tehnički neizvodljivo za jako udaljene objekte, kao što su zvezde, a slično će biti i u doglednoj budućnosti. Daljine zvezda mogu da se izvedu samo iz male periodične promene njihovog položaja, promene koja je uzrokovana paralaksom. Mada se ovde koristi pojam položaj, on označava prividni pravac na kojem se zvezda nalazi. To je nešto što može biti mereno direktno sa velikom tačnošću i jasno je izraženo sa dve ugaone koordinate. Za pozicione namere često je potrebno zanemariti rastojanje zvezda, jer nije dostupno direktnom merenju, i posmatrati sve zvezde kao da su na istoj daljini, tj. kao da su smeštene na površi sfere sa centrom u posmatraču. To je označeno sa *„nebeska sfera“*. Njen poluprečnik je potpuno proizvoljan, mada po pretpostavci znatno veći od bilo kog zemaljskog standarda. Međutim, u položajnoj astronomiji ništa se ne gubi u opštosti ako se usvoji da je poluprečnik nebeske sfere jedinične dužine; naprotiv, to vodi ka znatnim pojednostavljenjima. ❊

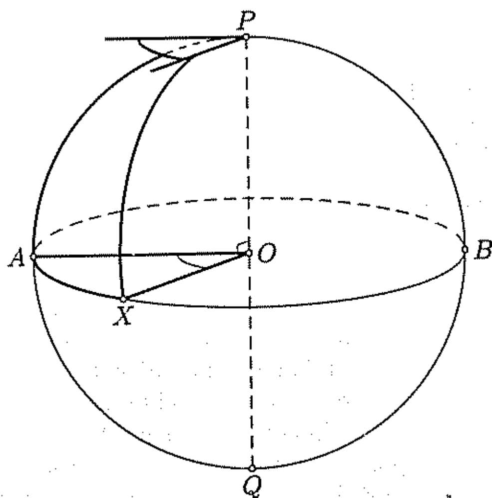
§ **1.2. Sferna geometrija—lukovi velikog kruga.** Sfera je definisana kao površ čije su sve tačke jednako udaljene od izabrane tačke, centra sfere. Sfera je dvodimenziona površ koja je konačna ali bez granica. Sferna geometrija čini geometriju izvedenu na *površi* sfere, ali se znatno razlikuje od obične dvodimenzione ravanske Euklidske geometrije. Posebno, nema pravih linija na površi sfere. Ekvivalentne linije su lukovi velikih krugova, koji se definišu na sledeći način:

Definicija. *Ma koja ravan kroz centar sfere seče sferu po velikom krugu. Polovi velikog kruga su krajnje tačke prečnika sfere upravnog na ravan tog velikog kruga.* ❊

Odmah je jasno da veliki krug zamenjuje krug čiji je poluprečnik jednak poluprečniku sfere, koji smo uzeli za jedinicu. Veliki krug AXB prikazan je na sl. 1.1, a takođe i njegovi polovi, P i Q. Ove dve tačke su *dijametralno suprotne*. Na sl. 1.1 povučen je drugi veliki krug, označen sa $PAQB$. Lako se vidi da, rotiranjem ravni

ovog velikog kruga, *ma koji* veliki krug kroz P mora takođe da prođe kroz dijametralno suprotnu tačku Q. Ovo je specijalna osobina dijametralno suprotnih tačaka.

Razmotrimo, s druge strane, dve opšte tačke sfere, kao što su A i X. Veliki krug koji prolazi kroz njih je jednoznačno određen. Tačke A i X i centar sfere O zajedno definišu jedinstvenu ravan koja seče sferu po velikom krugu. Luk velikog kruga AX je zaista najkraća kriva koja može biti povučena na sfernoj površi da spoji dve tačke. Ova važna osobina lukova velikog kruga znači da su oni geodezijske linije sfere, analogno pravim linijama u Euklidskoj geometriji.



Слика 1.1

Kako sfera ima jedinični poluprečnik, odmah činimo sledeći značajan zaključak: dužina luka velikog kruga jednaka je centralnom uglu, u radijanima, pod kojim se vidi iz centra sfere. Mada će uvek biti korišćeni radijani, nema dvosmislenosti u praksi pri izražavanju dužine luka velikog kruga u stepenima. Na primer, ako kažemo da luk velikog kruga AX na sl. 1.1 iznosi 45°, to označava da je to ugao iz O i da mu je dužina $\frac{1}{4}\pi$. Preciznije, postoje dva luka velikog kruga koji sadrže i A i X, naime AX takođe označava i luk ABX meren u suprotnom smeru i dužine $2\pi - AX$. Međutim, kada govorimo o luku velikog kruga kroz dve tačke, uvek ćemo pretpostaviti kraći od lukova, koji je uvek manji od π.

Spojimo PX (tj. konstruišimo luk velikog kruga PX). Onda su PX i PA lukovi velikih krugova koji se seku u P i njihov presek čini sferni ugao APX, koji može da se definiše na nekoliko ekvivalentnih načina. Na primer:

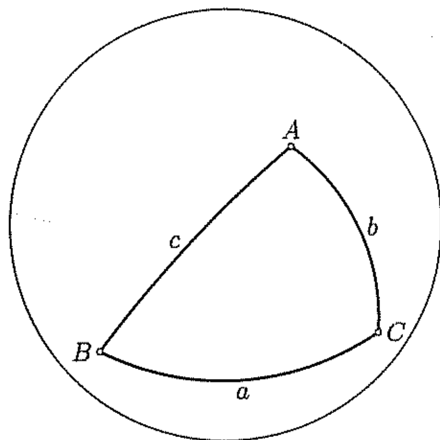
❄ **Definicija.** *Sferni ugao između lukova dva velika kruga je ugao između njihovih ravni.*

Ili, sferni ugao može da se definiše kao ugao između tangenti na lukove dva velika kruga u njihovoj presečnoj tački. I u jednoj i u drugoj definiciji je jasno, sa sl. 1.1, da je

$$\text{Sferni ugao } APX = A\hat{O}X = \text{luku velikog kruga } AX. \tag{1.1}$$

Tri tačke na sferi, koje leže na istom velikom krugu analogne su trima kolinearnim tačkama u ravanskoj geometriji. Međutim, razmotrimo tri proizvoljne tačke A, B, C koje ne leže na istom velikom krugu. Onda, kao što pokazuje sl. 1.2, kroz parove ovih tačaka prolaze lukovi velikih krugova BC, CA, AB, od kojih je svaki manji od π. Slika koja se dobija naziva se *sferni trougao*. Njegovi elementi su
❄ tri strane, a to su razmatrani lukovi velikih krugova, i tri njima obuhvaćena sferna ugla. Pogodno će biti da se svaki ugao označi velikim slovom svog verteksa i svaka strana malim slovom koje odgovara naspramnom uglu. To je $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, kako je označeno na sl. 1.2.

Tri tačke A, B, C definišu ravan i, kako ne leže na jednom velikom krugu, ta ravan ne prolazi kroz centar sfere. Međutim, možemo da konstruišemo ravan koja je paralelna ravni ABC i prolazi kroz centar sfere. Poslednja ravan deli sferu na dve hemisfere, a jasno je da je sferni trougao na jednoj od njih. Onda je intuitivno jasno da je svaki od uglova sfernog trougla manji od 180°.



Слика 1.2

Sferni trouglovi imaju značajne zajedničke osobine sa ravnim trouglovima. Na primer, ma koja strana je manja od zbira ostale dve. Međutim, postoje i bitne razlike. U ravnoj geometriji suma uglova u trouglu je 180°. U sfernom trouglu zbir uglova nije stalan, ali uvek prelazi ovu vrednost. Ravan trougao može imati jedan i samo jedan prav ugao. Sferni trougao može imati jedan, dva ili sva tri prava ugla. Na primer, vraćajući se na sl. 1.1, PAX je sferni trougao u kojem su oba ugla A i X prava. Trigonometrijske formule mogu da se koriste za odnose elemenata sfernog trougla. One će biti izvedene kasnije, ali je korisno u početku naznačiti jednu stvar. Svi elementi sfernog trougla leže između 0 i 180°, što odgovara I i II kvadrantu. Inverzni kosinus je jednoznačan u ovoj oblasti; inverzni sinus nije. Poželjno je, dakle, koristiti formule koje daju kosinus radije nego sinus traženog elementa, jer, u protivnom, neizbežno se javlja dvostrukost.

Sve do sada razmatrali smo samo geodezijske linije na sferi—velike krugove. Druga važna kriva se definiše na sledeći način:

Definicija. *Ravan koja, u opštem slučaju, ne prolazi kroz centar sfere seče sferu po malom krugu. Polovi malog kruga su krajevi prečnika sfere koji je upravan na ravan malog kruga.*

Zaista je evidentno da mali krug, čiji je poluprečnik manji od poluprečnika sfere, opravdava svoje ime. Na sl. 1.3 prikazan je mali krug AB i njemu paralelan veliki krug CD. Za oba kruga su polovi tačke P i Q. Neka je poluprečnik malog kruga r i neka je luk velikog kruga $AP = \theta$. Onda se iz ravnog trougla AOS odmah vidi da je

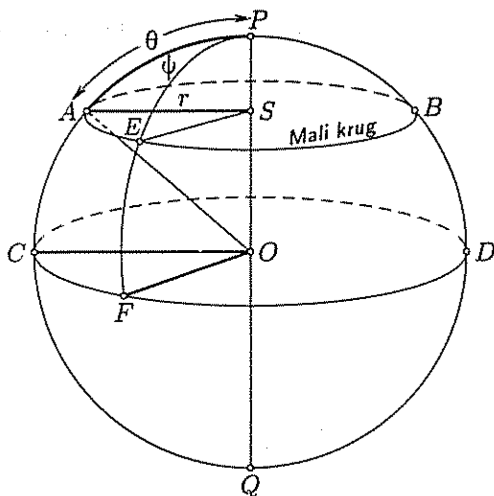
$$AS = AO \sin A\hat{O}S,$$

tj.

$$r = \sin\theta \tag{1.2}$$

Neka je E ma koja tačka na malom krugu AB. Produžavajući luk velikog kruga PE presecamo CD u F. Jasno je da je $PE = \theta$. U stvari, neka su sve tačke malog kruga na sferi podjednako udaljene od pola P, mali krug je analogija kruga u ravnoj geometriji. Neka je sferni ugao $APE = \psi$. Onda je, isto tako, $C\hat{O}F = \psi$. Sada, kako su AS i ES, redom, paralelni sa CO i FO, sledi da je $A\hat{S}E = \psi$. Dužina luka malog kruga može da se izvede iz

$$\text{luk malog kruga } AE = r A\hat{S}E = \psi \sin\theta. \tag{1.3}$$



Слика 1.3

Napominjemo da je θ udaljenost tačke malog kuga od njegovog pola, a ψ je sferni ugao u polu koji zaklapa dati luk.

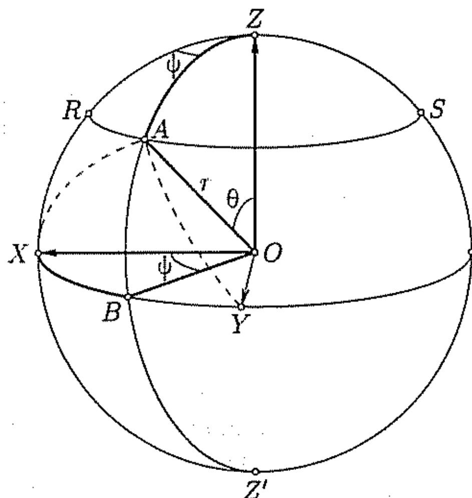
Naravno, rastojanje dato na sl. 1.3 nije najkraće rastojanje na sferi od A do E. Dužina luka *velikog* kruga AE biće kraća od tog rastojanja. Važno je zapamtiti da luk malog kruga ne može biti element sfernog trougla. Svakako da postoji sferni trougao APE, ali nije prikazan na sl. 1.3. Posebno, luk malog kruga AE može da se zameni lukom velikog kruga, i, kao rezultat toga, uglovi A i E neće biti pravi kao što je na pomenutoj slici.

§ 1.3. Sferne polarne koordinate.

Više različitih koordinatnih sistema može da se postavi na nebesku sferu. Svi sistemi koji se koriste u praksi su u osnovi slični i malo se razlikuju po formi od sfernih koordinatnih sistema.

Pretpostavimo da je desni skup pravouglih Dekartovih osa $Oxyz$ postavljen u centar O sfere jediničnog poluprečnika. Dalje, neka pozitivni kraci ovih osa seku sferu u tačkama X, Y i Z, kako je prikazano na sl. 1.4. Onda veliki krugovi XY i ZX predstavljaju x–y i z–x ravni, redom. Neka je A tačka sfere sa Dekartovim koordinatama (x, y, z). Onda je

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1.4}$$



Слика 1.4

pa je jedna koordinata suvišna. Međutim, često je mnogo pogodnije uvesti sferne polarne koordinate, recimo (r, θ, ψ). U skladu sa uobičajenim odredbama, radijalna koordinata r tačke A je OA, polarna koordinata θ je ugao $Z\hat{O}A$ i azimutalna koordinata ψ je ugao između ravni ZOA i ravni z–x.

Kako je tačka A na sferi jediničnog poluprečnika, njena radijalna koordinata je $r = 1$. Šta više, njene ugaone koordinate su u jednostavnom odnosu sa položajem A na sferi. Iz definicija i rezultata poslednjeg paragrafa jasno se vidi da je polarni ugao θ luk velikog kruga dužine ZA, a azimutalni ugao ψ

je sferni ugao XZA. Posmatrajući celu sferu, koordinate θ i ϕ moraju da budu u intervalima:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{1.5}$$

Međutim, postavljajući koordinatni sistem na nebesku sferu neophodno je izabrati pol koordinatnog sistema Z, od kojeg se meri polarni ugao θ i referentni veliki krug ZX od kojeg se meri azimutalni ugao ϕ. Svi koordinatni sistemi korišćeni u sfernoj astronomiji su suštinski iste forme; njihove razlike, u osnovi, proističu od različitog izbora pola. Ponekad se, istina, koristi levo orijentisani sistem, a često se koristi i komplement $\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)$ radije nego samo θ. Međutim, polazeći od ovih neznatnih razlika, svi koordinatni sistemi sferne astronomije su različiti primeri sfernih polarnih koordinata (θ, ϕ), gore definisanih. Koordinatna mreža je sledeća: krive $\theta =$ const. su mali krugovi sa polom u Z, slično RAS na sl. 1.4, a krive $\phi =$ const. su veliki polukrugovi $ZABZ'$.

Uprkos inherentnoj glomaznosti, još je pogodno koristiti Dekartove koordinate. Ovo ponavljanje vodi formiranju jednačina pogodnih za račun i podrazumeva eleganciju vektorskih metoda. Dakle, ako su $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ i $\mathfrak{k}$ jedinični vektori u pozitivnom smeru x-, y- i z-ose, onda tačka A na nebeskoj sferi može biti data nekim vektorom položaja, $\mathfrak{r}_A$, recimo, gde je

$$\mathfrak{r}_A = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}. \tag{1.6}$$

Naravno, ovo je jedinični vektor, a (x, y, z) su kosinusi pravca linije OA. Imamo, preko lukova velikog kruga, da je

$$x = \cos XA, \qquad y = \cos YA, \qquad z = \cos ZA. \tag{1.7}$$

Šta više, preko sfernih polarnih koordinata, imamo dobro poznate obrasce

$$x = \sin\theta\cos\phi, \qquad y = \sin\theta\sin\phi, \qquad z = \cos\theta. \tag{1.8}$$

Svaki problem u sfernoj astronomiji može da se razmatra metodama sferne trigonometrije; alternativa je usvajanje trodimenzionalnog vektorskog pristupa. Izbor metoda je uglavnom stvar pojedinca. Pretpostavlja se da čitalac već poznaje osnove vektorskih metoda, mada, radi pozivanja, osnovne vektorske formule su date u prilogu A. S druge strane, osnovni obrasci sferne trigonometrije izvedeni su *ab initio* u sledećem paragrafu.

§ 1.4. Sferna trigonometrija—osnovni obrasci.

Neka je ABC sferni trougao prikazan na sl. 1.5. Ako uvedemo sferni polarni koordinatni sistem (θ, ϕ) sa polom u tački A i lukom AB kao lukom referentnog velikog kruga, onda je tačka B data sa $\theta = c$, $\phi = 0$ i tačka C je data sa $\theta = b$, $\phi = A$. Neka su $\mathfrak{r}_B$ i $\mathfrak{r}_C$ vektori položaja tačaka B i C, redom. Onda, iz jednačine (1.8), sledi da je

$$\mathfrak{r}_B = (\sin c, 0, \cos c), \tag{1.9}$$

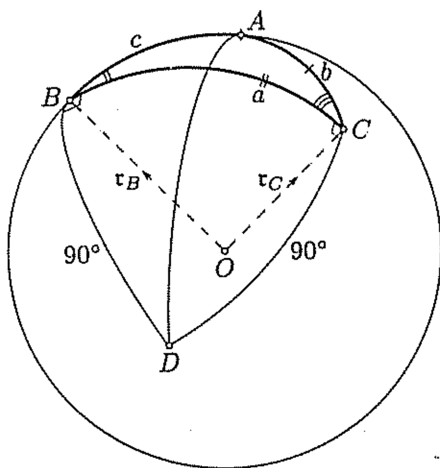
$$\mathfrak{r}_C = (\sin b\cos A, \sin b\sin A, \cos b). \tag{1.10}$$

Sada je ugao između ova dva vektora jednak strani BC sfernog trougla. Tako, uzimajući skalarni proizvod, sledi da je $\mathfrak{r}_B \cdot \mathfrak{r}_C = \cos a$, jer su oba vektora jedinična.

Ovaj skalarni proizvod može, takođe, da se izvede iz jednačina (1.9) i (1.10) dajući važan rezultat

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{1.11}$$

Ovo je najfundamentalniji obrazac sferne trigonometrije i navodićemo ga jednostavno kao *kosinusni obrazac*. Sličan je kosinusnoj formuli za ravan trougao, i, slično tome, izražava jednu stranu trougla preko druge dve strane i njima obuhvaćenog ugla. Postoje dve gotove primene jednačine (1.11). Ako su poznate strane b i c i njima obuhvaćeni ugao, to može da se koristi, kao što je napisano, za nalaženje treće strane a. Isto tako, ako su poznate sve tri strane, možemo naći ugao A. Na osnovu jednačine (1.11) mogu se napisati odgovarajući obrasci cikličnom permutacijom indeksa.



Слика 1.5

Svi obrasci sferne trigonometrije mogu biti izvedeni uzastopnom primenom kosinusnog obrasca i daljim trigonometrijskim i algebarskim transformacijama. Međutim, dva od ovih obrazaca biće direktnije utvrđene razmatranjem vektora $\mathfrak{r}_C \times \mathfrak{r}_B$. Kako je ugao između ova dva jedinična vektora jednak luku BC, vektorski proizvod ima vrednost $\sin a$. Šta više, on će biti uperen ka tački na sferi koja je 90° udaljena i od B i od C. To je tačka D, prikazana na sl. 1.5, koja je pol strane BC početnog sfernog trougla. Ako je $\mathfrak{r}_D$ vektor položaja tačke D, onda je

$$\mathfrak{r}_C \times \mathfrak{r}_B = \sin a \, \mathfrak{r}_D. \tag{1.12}$$

Sada leva strana ove vektorske jednačine može da se dobije iz jednačina (1.9) i (1.10), dajući rezultat

$$\mathfrak{r}_C \times \mathfrak{r}_B = (\sin b \cos c \sin A, \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, -\sin b \sin c \sin A). \tag{1.13}$$

Dakle, iz jednačine (1.8) možemo da napišemo desnu stranu jednačine (1.12) kao

$$\sin a \, \mathfrak{r}_D = \sin a(\sin AD \cos BAD, \sin AD \sin BAD, \cos AD). \tag{1.14}$$

Izjednačavanjem komponenti poslednje dve jednačine, dobijen je značajan novi rezultat.

Razmatrajmo sferni trougao BAD. Kako je D pol za BC, luk $BD = 90°$ upravan je na BC. Prema tome, ugao $ABD = 90° + B$. Primenjujući kosinusni obrazac na sferni trougao BAD dobijamo

$$\cos AD = \cos 90° \cos c + \sin 90° \sin c \cos(90° + B),$$

tj.

$$\cos AD = -\sin c \sin B.$$

Smenimo ovaj rezultat u z-komponentu jednačine (1.14). Onda će izjednačavanje z-komponenti jednačina (1.13) i (1.14) dati

$$\sin b \sin c \sin A = \sin a \sin c \sin B,$$

ili

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

Zbog simetrije, poslednja jednačina može biti napisana u kompletnoj formi kao

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{1.15}$$

Ovaj rezultat je poznat kao *sinusni obrazac*. Njegova sličnost sinusnom obrascu ravnog trougla je evidentna i ima istu inherentnu dvojnost.

Ako se sada sinusni obrazac primeni na sferni trougao BAD, dobija se sledeći rezultat

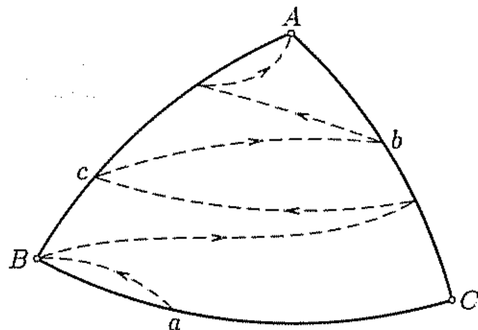
$$\sin AD \sin BAD = \sin BD \sin ABD = \cos B.$$

Zamenimo ovaj rezultat u jednačinu (1.14) za y-komponentu i izjednačavanjem y-komponenti iz (1.13) i (1.14) dobićemo važan obrazac

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.16}$$

Ovo je poznato kao *mešoviti obrazac*.

Pokazaćemo da je primena ovog obrasca u opštem slučaju slična primeni sinusnog obrasca. Međutim, on je očito komplikovaniji i možda malo teži za pamćenje. Pažljiviji čitalac verovatno će zapaziti u njemu izvesnu simetriju u formi, ali vizuelni način pamćenja dat je na sl. 1.6. Slika označava redosled kojim se elementi trougla pojavljuju u jednačini (1.16), naime $aBbcbcA$. Ako se uloge B i C (i, dalje, b i c) zamene, dobija se drugačija verzija mešovitog obrasca,



Слика 1.6

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A. \tag{1.17}$$

Kada se izređaju sve permutacije, za trougao ABC, imaćemo šest slučajeva mešovitog obrasca.

Više rezultata ne može se izvesti ni iz vektorske jednačine (1.12). Istina, neće biti razmatrana x-komponenta, ali ona vodi samo preuređenju sinusnog obrasca. Poslednji važan obrazac koji želimo izvesti je četvoroelementni obrazac, koji se može dobiti iz sinusnog i kosinusnog obrasca na sledeći način. Primenimo kosinusni obrazac na trougao ABC (sl. 1.5); dobijamo

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Eliminišimo $\cos c$ iz prve jednačine i uvrstimo $\sin c$ iz sinusnog obrasca. Rezultat je

$$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a\left(\frac{\sin b \sin C}{\sin B}\right)\cos B,$$

ili $\sin^2 a \cos b = \sin a \sin b(\cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B)$. Konačno, deleći sa $\sin a \sin b$, dobijamo

$$\cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B. \tag{1.18}$$

❊ Ovo je *četvoroelementni obrazac*. Pozivajući se na sl. 1.5, vidi se da su elementi trougla navedeni u (1.18) četiri uzastopna elementa B, a, C, b. Strana a i ugao C mogu da se navedu kao „susedna strana i ugao“, redom. Četvoroelementni obrazac može tada da se izrazi u opštem obliku pogodnom za pamćenje kao

$$\cos(\text{nalegle strane})\cos(\text{neleglog ugla}) = \sin(\text{nalegle strane})\operatorname{ctg}(\text{naspramne strane}) - \sin(\text{naleglog ugla})\operatorname{ctg}(\text{naspramnog ugla}).$$

Prolazeći kroz sve permutacije dobiće se šest mogućih formulacija četvoroelementnog obrasca u sfernom trouglu ABC. Četvoroelementni obrazac je ograničeniji u primeni od ostala tri, posebno kada se radi sa pravim uglovima. Završićemo ovaj paragraf sumiranjem važnih rezultata.

❊ **Ukratko.** *Osnovni obrasci sfernog trougla koji će se koristiti u preostalom delu knjige su sledeće:*

- *Kosinusni obrazac*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{1.11}$$

- *Sinusni obrazac*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \tag{1.15}$$

- *Mešoviti obrazac*

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.16}$$

- *Četvoroelementni obrazac*

$$\cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B. \tag{1.18}$$

§ 1.5. Geografska širina i dužina.

Pojmovi uvedeni u prethodnim paragrafima biće ilustrovani u odnosu na Zemlju. U prvoj aproksimaciji, Zemlja može da se smatra sferom koja se obrne za jedan dan oko svoje stalne ose. Ta osa prodire Zemljinu sferu u severnom i južnom geografskom polu—dijametralno suprotne tačke N i S na sl. 1.7. Veliki krug za koji su tačke N i S polovi ❊ naziva se *ekvator*. Svaki veliki krug upravan na ekvator i ograničen tačkama N i ❊ S naziva se *meridijanom geografske dužine* ili jednostavno *meridijanom*.

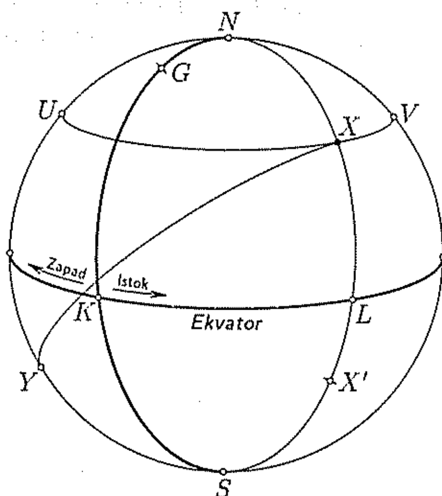
Tačka N je prirodni izbor pola koordinatnog sistema na Zemljinoj površi. Da bi se kompletiralo uvođenje koordinatnog sistema, neophodno je da se usvoji početni ❊ veliki krug kroz N. To je *prvi meridijan*, $NGKS$ na sl. 1.7. Ovaj izbor, koji je u suštini proizvoljan, učinjen je međunarodnim dogovorom u 19-om veku, kada je za prvi meridijan usvojen onaj koji prolazi kroz osnovni položajni teleskop na Kraljevskoj opservatoriji u Griniču. Položaj ma koje tačke X na Zemljinoj površi ❊ određuje se sada lukom velikog kruga NX i sfernim uglom GNX. *Geografska širi-* ❊ *na* φ i *geografska dužina** λ ove tačke formalno se definišu jednačinama

* Umesto geografska širina φ i geografska dužina λ često se koristi latituda φ i longituda λ.

$$\varphi = 90° - NX \tag{1.19}$$
$$\lambda = GNX. \tag{1.20}$$

Luk NX se naziva *kolatituda** tačke X.

Produžavanjem luka NX da bi opisali meridijan $NXLS$, presecamo ekvator u L. Sve tačke na ovom meridijanu imaju istu geografsku dužinu. Konstruišimo kroz X mali krug UXV tako da su mu polovi N i S. Sve tačke na ovom malom krugu imaju istu geografsku širinu, a mali krug se naziva *paralel širine*. Jasno je da paraleli i meridijani čine koordinatnu mrežu Zemljine površi.



Слика 1.7

Za tačku na ekvatoru, kao što je L, širina je nula. Iz definicije (1.19) sledi da ako se tačka X nalazi južno od ekvatora, recimo, X', onda je φ negativno. U praksi se često širine i dužine pišu kao pozitivne veličine sa naknadnom odredbom severno ili južno i istočno ili zapadno. U tom slučaju, širina varira od 0 do 90° N ili S, dužina od 0 do 180° E ili W. Međutim, algebarski je opravdanije koristiti jednačine (1.19) i (1.20) kako su postavljene i smatrati dužinu pozitivnom u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu (posmatrano sa severnog pola, pp.), kao što je prikazano. Onda φ i λ pripadaju intervalima

$$-90° \leq \varphi \leq 90°, \qquad -180° < \lambda \leq 180°. \tag{1.21}$$

Južna širina i zapadna dužina se onda smatraju negativnim. Za tačku X na sl. 1.7 i φ i λ su pozitivni, dok su za Y obe negativne.

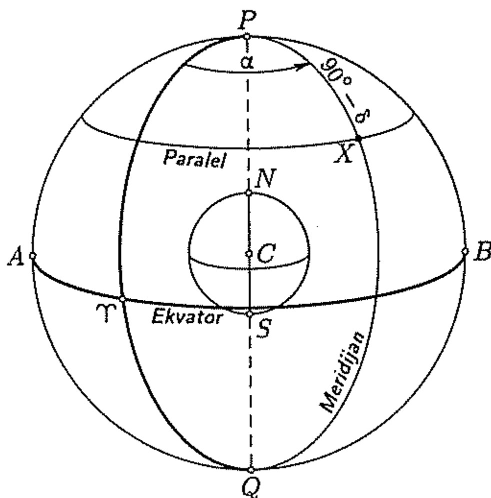
Razmotrimo dalje problem računanja rastojanja između dve tačke na površi Zemlje—takve kao X i Y. Kao i ranije, neka su širina i dužina tačke X označene sa (φ, λ), a za Y sa (φ', λ'). Najkraće rastojanje između ovih dveju tačaka je luk velikog kruga XY koji je element sfernog trougla NXY. U ovom trouglu, $NX = 90° - \varphi$, $NY = 90° - \varphi'$. Šta više, $GNX = \lambda$ i kako je λ' negativno u ovom slučaju, $YNG = -\lambda'$; pa je $YNX = \lambda - \lambda'$. U stvari, ponekad je potrebno malo pažnje da bi se osiguralo da ovaj ugao bude od 0 do 180°. To ne utiče na neposredni cilj računanja udaljenosti XY. Postignuto je primenom kosinusnog obrasca (1.11) izvođenjem

$$\cos XY = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda'). \tag{1.22}$$

Rastojanje XY je izračunato, ali kao ugao. Da se pretvori u kilometre, neophodno je izraziti ugao lučnom merom i pomnožiti ga poluprečnikom Zemlje koji je sve do sada smatran jediničnim. Moguće je izračunati rastojanje i u nautičkim miljama, koje se definišu kao dužina luka velikog kruga nad centralnim uglom od jedne lučne minute. Dužina XY u nautičkim miljama, jednostavno, izražava luk XY u lučnim minutama. Nautička milja neznatno prevazilazi milju i jednaka je 1,855 km.

* Kolatituda je $\frac{1}{2}\pi - \varphi$.

§ **1.6. Rektascenzija i deklinacija.** Veći deo ove knjige neće se odnositi na Zemlju, već na nebesku sferu. Međutim, geometrijska razmatranja su veoma slična i postoji koordinatni sistem koji potpuno odgovara Zemljinoj širini i dužini. On se naziva *ekvatorski* sistem i poznate su njegove dve koordinate, *rektascenzija* i *deklinacija*. Ovaj sistem je daleko najvažniji od svih koordinatnih sistema koji se koriste u sfernoj astronomiji i isto kao što je položaj na Zemlji definisan geografskom širinom i dužinom, tako je položaj zvezde na nebeskoj sferi definisan deklinacijom i rektascenzijom. Ove dve koordinate su zaista stalne za svaku zvezdu; nisu pod uticajem Zemljine dnevne rotacije. Deklinacija odgovara geografskoj širini, a rektascenzija istočnoj geografskoj dužini.



Слика 1.8

Predstavimo nebesku sferu sa Zemljom smeštenom u njenom središtu, kao na sl. 1.8, i pretpostavimo da je poluprečnik nebeske sfere mnogo veći od dimenzija Zemlje. Neka su N i S geografski severni i južni pol. Zemljina (obrtna osovina) osa rotacije prodire nebesku sferu u P i Q. Ove dve tačke se nazivaju *severni* i *južni nebeski pol*. Ravan Zemljinog ekvatora seče nebesku sferu po velikom krugu AB koji se naziva *nebeski ekvator*. Koordinatna mreža deklinacija i rektascenzija koja može da se povuče na nebeskoj sferi zaista je slična mreži geografskih širina i dužina. Posebno, imamo *paralel deklinacije*, mali krug paralelan nebeskom ekvatoru, i *meridijan rektascenzije*, veliki polukrug ograničen nebeskim polovima.

Rektascenzija α i deklinacija δ proizvoljne tačke X na nebeskoj sferi formalno se definišu kao

$$\delta = 90° - PX, \tag{1.23}$$

$$\alpha = \Upsilon PX, \tag{1.24}$$

gde je Υ utvrđena tačka na nebeskoj sferi. Ova tačka, koja se određuje kao nulta tačka rektascenzije, odgovara položaju Sunca u trenutku prolećne ravnodnevice, oko 21 marta, kada Sunce prelazi nebeski ekvator sa juga na sever. Definicija Υ tačke, koja se jednostavno navodi kao *ekvinokcij*, biće potpunije data u sledećoj glavi. Za sada je dovoljno napomenuti da je to stalna referentna tačka na nebeskom ekvatoru. Napomenimo da rektascenzija raste u pravcu istoka, kako je naznačeno strelicom na sl. 1.8. Šta više, na nebeskom ekvatoru je $\delta = 0°$, dok je na severnom i južnom nebeskom polu $\delta = +90°$ i $-90°$, redom.

Mada rektascenzija može da se izrazi u stepenima i onda je u intervalu $0° \le \alpha < < 360°$, obično je izražena u vremenskoj meri, izjednačavanjem 360° sa 24 časa. Ista konvencija je s razlogom primenjena na geografsku dužinu. Slede relacije; kako je

$$24^h = 360°,$$

imamo da je

$$1^h = 15°, \quad 1^m = 15', \quad 1^s = 15''$$

i

$$1° = 4^m, \quad 1' = 4^s, \quad 1'' = \tfrac{1}{15}^s \qquad (1.25)$$

Može da se izvede sistem *pravouglih ekvatorskih koordinata* koje su povezane sa rektascenzijom i deklinacijom. Neka je C centar nebeske sfere. Onda izaberimo CP za z-osu, $C\Upsilon$ za x-osu, a y-osu izaberimo tako da formira desni koordinatni sistem. To znači da je ona u pravcu $\alpha = 6^h$, $\delta = 0$. Ekvivalentno jednačinama (1.8) koordinate (x, y, z) tačke X su date sa

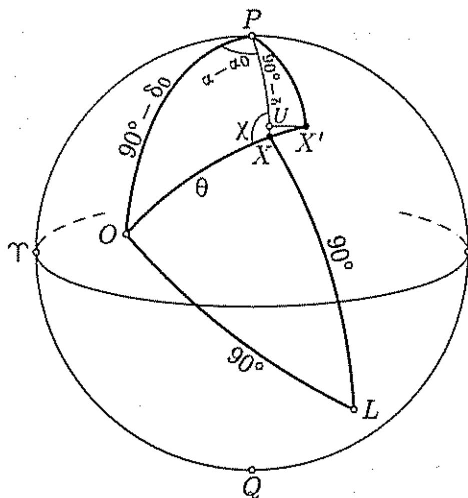
$$x = \cos\delta\cos\alpha, \qquad y = \cos\delta\sin\alpha, \qquad z = \sin\delta, \qquad (1.26)$$

gde je, kao i obično, uzet jedinični poluprečnik nebeske sfere. Moguće je, ako bude data neka informacija o rastojanju nebeskog objekta, to uneti u jednačinu (1.26) množenjem njene desne strane rastojanjem.

§ 1.7. Rastojanja zvezda na nebeskoj sferi.

Mnogi problemi sferne astronomije tiču se promene položaja zvezda na nebeskoj sferi usled nekog od brojnih uzroka. Ove promene imaju prilično standardnu formu. U posebnom slučaju, promena zavisi od položaja zvezde ali tako da je pomeranje duž velikog kruga koji spaja zvezdu sa određenom stalnom tačkom na nebeskoj sferi. Na primer, usled godišnje paralakse pomeranje je uvek usmereno ka Suncu, dok usled dnevne aberacije, pomeranje je ka istočnoj tački posmatračeva horizonta. Zajedničke osobine pomeranja omogućavaju da sva pomeranja mogu da se tretiraju kao poseban slučaj opšteg rezultata izvedenog niže.

Pretpostavimo da je, usled nepoznatog uzroka, zvezda $X(\alpha, \delta)$ pomerena za *mali* iznos u tačku X' i to pomeranje je duž velikog kruga koji spaja X sa tačkom O. Neka O ima ekvatorske koordinate (α_0, δ_0) i označimo luk OX sa θ. Onda XX' može da se označi sa $d\theta$, i pretpostavimo da je $d\theta$ mali ugao. Situacija je ilustrovana na sl. 1.9—na kojoj je $d\theta$ pozitivno. Napišimo pomeranje kao



Слика 1.9

$$d\theta = k\sin\theta. \qquad (1.27)$$

U praksi, često je napisano da je k pozitivna ili negativna konstanta, nezavisno od izbora zvezde; što nije neophodno. Konačno, neka su ekvatorske koordinate $X'(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$. Kako je nacrtano na sl. 1.9, i $d\alpha$ i $d\delta$ su pozitivni.

Konstruišimo luk malog kruga sa polom P kroz X' da preseče PX u U. Sada je sferni ugao $\Upsilon PX = \alpha$ i $\Upsilon PX' = \alpha + d\alpha$. Tako je ugao zahvaćen lukom malog

kruga u njegovom polu, tj. $UPX' = d\alpha$. Dalje je, $PX' = PU = 90° - (\delta + d\delta)$; pa je, iz jednačine (1.3),

$$UX' = d\alpha \cos(\delta + d\delta) = d\alpha \cos\delta,$$

sa tačnošću do prvog reda. Međutim, kako je $PX = 90° - \delta$, sledi da je

$$UX = d\delta.$$

Sada, radi pogodnosti, označimo sferni ugao OXP sa χ. Onda je $UXX' = 180° - \chi$. Slika UXX' nije strogo sferni trougao, ali, kako su njegove dimenzije male u poređenju sa nebeskom sferom, to može, približno, da se smatra kao ravan trougao sa pravim uglom kod U. Onda je,

$$UX = XX' \cos(180° - \chi) = -XX' \cos\chi,$$

i

$$UX' = XX' \sin(180° - \chi) = XX' \sin\chi.$$

Sa naša dva ranija rezultata i (1.27), sledi da je

$$\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= k \sin\theta \sin\chi, \\ d\delta &= -k \sin\theta \cos\chi. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Razmatrajmo sada sferni trougao OPX. Kako je $\Upsilon PX = \alpha$ i $\Upsilon PO = \alpha_0$, sledi da je $OPX = \alpha - \alpha_0$. Osim toga, $PX = 90° - \delta$, $PO = 90° - \delta_0$, $OX = \theta$ i $OXP = \chi$. Sada koristeći sinusni i sinusno-kosinusni obrazac, (1.15) i (1.16), imamo da je

$$\sin\theta \sin\chi = \sin(90° - \delta_0)\sin(\alpha - \alpha_0),$$

$$\sin\theta \cos\chi = \cos(90° - \delta_0)\sin(90° - \delta) - \sin(90° - \delta_0)\cos(90° - \delta)\cos(\alpha - \alpha_0).$$

Odavde jednačine (1.28) daju krajnji rezultat

$$\begin{aligned} d\alpha &= k \sec\delta \cos\delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0), \\ d\delta &= k\big(\sin\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos\delta \sin\delta_0\big). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Za korišćenje ovog opšteg rezultata u bilo kom posebnom slučaju, neophodno je samo uneti vrednosti konstante k i koordinate tačke O. Važno je uočiti da ove jednačine mogu da se primene samo za mala pomeranja. Pa, ako je (1.29) izraženo u radijanima, onda je k mala veličina i mora da se ima na umu da su pri izvođenju ovih jednačina zanemareni članovi sa $O(k^2)$. Kada je u pitanju veliko pomeranje, preporučljivo je postupati po nekom *ad hoc* metodu.

Opšti rezultat (1.29) može da se izrazi skladnije, ali verovatno manje upotrebljivo, u vektorskoj formi. Neka je $\mathbf{s}$ vektor položaja za X i $\mathbf{s}_0$ isto za tačku O. Oba su jedinični vektori; tako vektor $\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0$ ima intenzitet $\sin\theta$ i usmeren je ka tački L na nebeskoj sferi 90° udaljenoj od O i od X—L je pol velikog kruga kroz OX. Neka X' ima vektor položaja $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$. Kako je $\mathbf{s}$ jedinični vektor, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$, i, diferenciranjem, daje, za svako malo pomeranje,

$$\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{1.30}$$

Dakle, vektor $d\mathbf{s}$ je upravan na $\mathbf{s}$. Osim toga, kako je pomeranje duž OX, to je takođe upravno na $\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0$. Tako, omogućavajući korektnu primenu, $d\mathbf{s}$ će biti u pravcu $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0)$. Dalje, lako se vidi da je nepoznata ovog dvostrukog vektorskog proizvoda $\sin\theta$. Zato, iz jednačine (1.27),

$$d\mathbf{s} = k\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0). \tag{1.31}$$

Ne samo za ekvatorske koordinate, ovaj oblik je opštiji od jednačine (1.29) za primenu u ma kom koordinatnom sistemu. U praksi, mora da se koristi u skalarnom obliku, a skalarni oblik u ekvatorskim koordinatama su zaista jednačine (1.29) Dokazivanje poslednjeg stava je ostavljeno kao vežba za čitaoca.

Obično je pogodno raditi u radijanima dok se vrši analiza. Međutim, u primeni rezultata traže se praktičnije jedinice i mnogi mali uglovi biće izraženi u lučnim sekundama. Približno je

$$1 \text{ radijan} = 57°17'45'' = 206\,265''. \tag{1.32}$$

Prema tome, poslednji broj je važan faktor konverzije Prednost radijana je što može da se primeni aproksimacija malih uglova. Ako je θ mali ugao izražen u uglovnoj meri, onda je

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \cos\theta \approx 1, \qquad \operatorname{tg}\theta \approx \theta. \tag{1.33}$$

Iz jednačine (1.32) sledi da je

$$\sin 1'' = \frac{1}{206\,265}. \tag{1.34}$$

Ovo obezbeđuje jasan put pisanja inverznog faktora. Na primer, ako je θ'' broj lučnih sekundi u malom uglu θ, onda je, iz jedačina (1.32) i (1.33),

$$\sin\theta = \theta'' \sin 1''. \tag{1.35}$$

Sada pretpostavimo da se u primeni jednačine (1.29), koriste lučne sekunde. Izbegavajući konfuziju, neka je k vrednost parametra u radijanima i k'' u lučnim sekundama Onda, kako se isti faktor konverzije primenjuje na svaku stranu jednačine, zamenom k sa k'', $d\alpha$ i $d\delta$ se odmah dobijaju u lučnim sekundama. Jednačine su, međutim, tačne do prvog reda i jasno je da će greška, recimo ε, biti u radijanima,

$$\varepsilon = O(k^2) = O\big((k'' \sin 1'')^2\big).$$

Odavde, greška, u lučnim sekundama, je

$$\varepsilon = O\big(k''^2 \sin 1''\big). \tag{1.36}$$

Ovo daje korisnu direktivu za tačnost. Na primer, za pomeranje reda jedne lučne sekunde, možemo da utvrdimo grešku prvog reda formule od $5 \cdot 10^{-6}$ lučnih sekundi, koja je potpuno zanemarljiva u svim razmatranjima. S druge strane, čak za pomeranje od $15''$ ili jedne vremenske sekunde, greška je reda $0'',001$, tačnost koja nije dostignuta ni najfinijim astrometrijskim merenjima, dok pomeranje od $1'$ daje grešku od $0'',02$. Mada je tačnost nekih optičkih i radio opservatorija dovedena do ove vrednosti, mnogi računi, na primer za *Astronomical Almanac*, ne zahtevaju veću tačnost. Zaključak je da, mada su formule I reda veoma korisne, moraju da se koriste kvantitativno uz poznavanje njihovih ograničenja.

Konačno, izrazićemo poslednji rezultat (1.29) u praktičnim jedinicama. Ako je parametar k izražen u lučnim sekundama, onda je $d\alpha$ u vremenskim a $d\delta$ u lučnim sekundama dato sa

$$\begin{aligned} d\alpha^s &= \tfrac{1}{15} k'' \sec\delta \cos\delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0), \\ d\delta'' &= k''\big(\sin\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos\delta \sin\delta_0\big). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Zadaci

1.1. Dokazati da je veličina sfernog ugla na jediničnoj sferi jednaka udaljenju na sfernoj površi između polova lukova velikih krugova koji čine ugao.

❋ **1.2.** Za ma koji sferni trougao ABC, *polarni trougao* $A'B'C'$ je definisan sa: A' je pol strane BC izabran tako da je $AA' < 90°$, B i C su slično definisani. Dokazati da važe sledeće relacije između strana i uglova ova dva trougla:

$$A' = 180° - a, \quad B' = 180° - b, \quad C' = 180° - c.$$
$$a' = 180° - A, \quad b' = 180° - B, \quad c' = 180° - C.$$

❋ **1.3.** Dokazati *princip dvojnosti* koji kaže da za ma koji obrazac koji izražava element sfernog trougla, dualni obrazac može da se izvede zamenom svake strane suplementom naspramnog ugla, a svaki ugao suplementom naspramne strane. Pokazati da su sinusni obrazac i četvoroelementni obrazac sebi dualni.

1.4. Dokazati da za sferni trougao važe sledeći obrasci

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C,$$
$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos A.$$

1.5. Neka su A i B dva mesta na Zemljinoj površi na istoj širini φ; razlika geografskih dužina između A i B neka je $2l$. Dokazati: (i) najveća širina koju dostiže veliki krug AB je $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{sc} l)$, i (ii) rastojanje mereno duž paralela između A i B prevazilazi rastojanje po velikom krugu AB za

$$2 \csc 1' \left[l \cos\varphi - \arcsin(\sin l \cos\varphi) \right] \text{ nautičkih milja.}$$ [Smart (1977)]

1.6. Avion napušta Limu (12°10′ S, 77°05′ W) i leti direktno za Rim (41°53′ N, 12°33′ E). Izračunati pređeno rastojanje u nautičkim miljama i geografsku dužinu na kojoj avion preseca ekvator.

1.7. Najjužnija širina koju dostiže veliki krug koji spaja mesto A na ekvatoru sa mestom B južne širine φ je φ_1. Dokazati da je razlika dužina A i B data sa

$$90° + \arccos(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\varphi_1).$$ [Smart (1977)]

1.8. Sferni trougao ABC trpi malu distorziju; dokazati da je rezultujući priraštaj elemenata trougla dat jednačinama

$$\mathrm{d}a = \cos C\, \mathrm{d}b + \cos B\, \mathrm{d}c + K \sin b \sin c\, \mathrm{d}A,$$
$$\mathrm{d}A = -\cos c\, \mathrm{d}B - \cos b\, \mathrm{d}C + K^{-1} \sin B \sin C\, \mathrm{d}a, \quad \text{itd.},$$

gde je K odnos: $K = \sin A / \sin a = \sin B / \sin b = \sin C / \sin c$.

1.9. Dokazati da u jednakostranom sfernom trouglu strane i uglovi zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{sc} A - \operatorname{sc} a = 1.$$

1.10. Izračunati dužinu najdirektnije vazdušne linije od San Franciska (37°40′ N, 122°25′ W) do Tokija (35°48′ N, 139°45′ E). Odrediti pravac u kojem avion mora otići iz San Franciska i izračunati širinu i dužinu najsevernije tačke puta.

Глава Друга

Nebeska sfera

§ **2.1. Uvod.** Nebesku sferu uvodimo kao sferu jediničnog poluprečnika na koju je pogodno projektovati likove svih nebeskih tela. Za centar nebeske sfere uzima se posmatrač, koji se u opštem slučaju nalazi na Zemlji. Položaj nebeskog objekta je različit za različite trenutke posmatranja jednog posmatrača, zbog Zemljinog dnevnog obrtanja i godišnjeg obilaženja Zemlje oko Sunca. Međutim, pogodno je uvesti standardne posmatračke tačke koje odgovaraju zamišljenim posmatračima smeštenim u centar Zemlje i u centar Sunčevog sistema, odnosno u središte Sunca. Nebeske sfere koje odgovaraju ovim dvema posmatračkim tačkama nazivamo *geocentričnom* i *heliocentričnom* nebeskom sferom, redom. Na drugoj strani, kada je posmatrač u centru sfere, imamo *topocentričnu* nebesku sferu. Koordinate nebeskog objekta se navode kao topocentrične, geocentrične ili heliocentrične, u skladu sa izborom centra nebeske sfere.

Razlike među ovim koordinatama potiču od uticaja paralakse i aberacije koje će biti principijelno razmatrane u sledećoj glavi, a njihovi računski detalji biće dati u glavama 4 i 8. Te razlike su, bar za zvezde, male i one se mogu mahom zanemariti u ovoj glavi. Cilj ove glave je uvođenje različitih koordinatnih sistema koji se koriste u položajnoj astronomiji i davanje konvencija vezanih za njih. Na već uvedeni ekvatorski koordinatni sistem, dodajemo opis horizontskog koordinatnog sistema i sistema ekliptičkih i galaktičkih koordinata. Svaki sistem čine osnovne polarne koordinate koje imaju osnovne osobine uvedene u §1.3. Sa svakim ovim sistemom može da se uvede ekvivalentan pravougli koordinatni sistem, koji je povezan sa sfernim jednačinama (1.8). Osim toga, u posebnom sistemu (bilo ekvatorskom, ekliptičkom ili bilo kom) mogu da se definišu topocentrične, geocentrične i heliocentrične koordinate kao koordinate koje se odnose na razne koordinatne početke, ali sa *strogo paralelnim* koordinatnim osama.

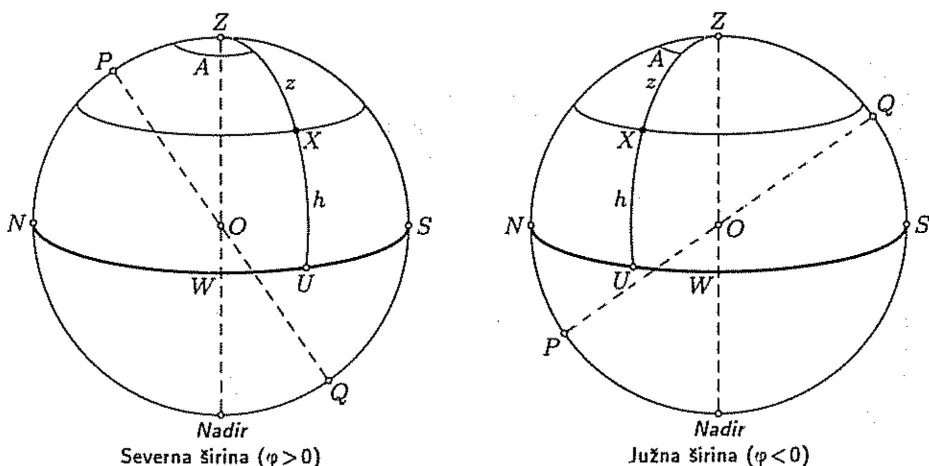
Ekvatorski sistem koordinata, rektascenzije i deklinacije, opisan je u gl. 1. Definicije odgovaraju geocentričnoj rektascenziji i deklinaciji. Topocentrična i heliocentrična rektascenzija i deklinacija biće slično definisane, izborom koordinatnog početka u odgovarajućoj tački i utvrđivanjem osnovnih pravaca paralelno sa CP i $C\Upsilon$.

Odstupanja među topocentričnim, geocentričnim i heliocentričnim koordinatama su znatna i moraju se precizno naznačiti koordinate ako se s određenom name-

rom bira koordinatni početak. Ova odstupanja neće biti određivana u ovoj glavi, ali je bitno znati da za bilo kako definisan koordinatni sistem, taj sistem se jednako dobro može postaviti u topocentričnom, geocentričnom ili heliocentričnom obliku.

§ 2.2. Horizontski sistem.

Posmatrajmo nebesku sferu sa centrom, recimo, u tački O. Vertikala je najprirodniji osnovni pravac na Zemljinoj površini—taj pravac je definisan pravcem Zemljine gravitacije. Neka vertikala usmerena na gore prodire nebesku sferu u tački Z, sl. 2.1. Ova tačka se zove *zenit*, a njoj dijametralno suprotna *nadir*. Veliki krug čiji su polovi zenit i nadir naziva se *nebeski horizont* ili jednostavno horizont. Ovaj veliki krug deli nebesku sferu na dve hemisfere—gornja hemisfera je vidljiva hemisfera, dok je donja hemisfera nevidljiva za posmatrača na samoj Zemlji.



СЛИКА 2.1

Linija povučena kroz tačku O, paralelno Zemljinoj obrtnoj osi, prodire nebesku sferu u tačkama P i Q, koje se nazivaju severni i južni nebeski pol, redom. Za svakog posmatrača samo jedan pol je na vidljivoj polusferi. Na sl. 2.1 prikazana su dva posebna dijagrama, za slučaj posmatrača na severnoj i posmatrača na južnoj geografskoj širini. Mada će čitalac želeti da se koncentriše na jednog od njih, sve što sledi važi za oba.

Zbog Zemljine rotacije, posmatrač će videti stalnu promenu položaja zvezda na nebu. Dnevno obrtanje Zemlje oko njene ose, sa zapada na istok, dovodi do prividnog obrtanja cele nebeske sfere sa istoka na zapad oko paralelne ose POQ. Posledica rotacije je da zvezde oko nebeskih polova ne trpe ovaj efekt i ostaju nepomične. Zvezda Polara (ili Severnjača) je sjajna zvezda koja je oko 1° udaljena od severnog nebeskog pola i lako je uočljiva na zvezdanom nebu, dok na južnoj hemisferi slične zvezde nema.

Konstruišimo luk velikog kruga ZP i produžimo ga, ako je potrebno, do preseka sa horizontom u tački N. N je severna tačka horizonta. Dijametralno suprotna tačka S je južna tačka horizonta; istočna i zapadna tačka su na po 90° od tačaka

N i S. Napomenimo da je za posmatrača koji je okrenut ka severu W s leve a E s desne strane. Četiri tačke N, E, S, W nazivaju se *osnovnim tačkama horizonta*.

Horizontski koordinatni sistem uzima tačku Z za pol. Za osnovni veliki krug izabran je krug ZN ili njemu ekvivalentan ZP. Neka je X neka tačka na nebeskoj sferi, njena *zenitna daljina* z i *azimut* A biće definisani sa

$$z = ZX, \qquad A = PZX. \tag{2.1}$$

Po ovoj definiciji azimut je strogo zapadni (meren od severne tačke). Ovo je jedna od brojnih konvencija koje su u upotrebi. Prema ovoj definiciji, azimut raste u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu i koordinatni sistem je desni. Azimut može, takođe, da se meri kao istočni, ali je bolje tada ga uzimati kao negativni. Međutim, koristićemo definiciju (2.1) u oblasti $-180° < A \leq 180°$.

Lukovi velikih krugova ograničeni sa Z i tačkom horizonta nazivaju se *vertikalni krugovi* (ili vertikali, pp.). Vertikal kroz X seče horizont u tački U i očigledno je da sve tačke na vertikalu imaju isti azimut A koji je jednak NU. Vertikali kroz W i E nazivaju se *prvi vertikali*.

Umesto zenitne daljine koristi se *visina* h. Za tačku X je $h = XU$ i odmah se vidi da je

$$h = 90° - z. \tag{2.2}$$

Mali krugovi sa polom u Z su krugovi iste visine—iste zenitne daljine—i nazivaju se *almukantari*. Na sl. 2.1 prikazan je almukantar kroz X.

Za aproksimaciju Zemlje sferom, OZ predstavlja produžetak radijalnog pravca iz centra Zemlje. Taj pravac zaklapa ugao φ sa ekvatorskom ravni, a ugao φ je geografska širina posmatrača. Sledi da je luk PZ jednak posmatračevoj kolatitudi, što daje važnu relaciju

$$PZ = 90° - \varphi. \tag{2.3}$$

Napomenimo da, uz algebarsku konvenciju za širinu uvedenu u glavi 1, jednačina (2.3) važi i za severnog i za južnog posmatrača.

Zenitna daljina i azimut daju koordinatni sistem koji se lako realizuje u praksi, jer se zasniva na osnovnim pravcima, Z i P, koji se određuju direktnim posmatranjima. Međutim, ovo ima i ozbiljne nedostatke. Pre svega, zenitna daljina i azimut zvezde zavise od položaja posmatrača. Nema načina da se standardizuju za celu Zemlju. One su stvarno izabrane kao lokalne koordinate, a gore data topocentrična definicija je, tada, najprirodnija. Na primer, moguće je još da se transformišu u geocentrične koordinate, ali mora se zadržati, više veštački, zenitni pravac odgovarajućeg posmatračkog topocentra. Drugo, horizontske koordinate zvezda se menjaju sa prividnim dnevnim kretanjem nebeske sfere, a ta promena je izrazito komplikovana. Ali to je samo u slučaju zenitne daljine koja se određuje kada se neka zvezda vidi iz nekog topocentra. Zvezde se ne vide za $z > 90°$. Zaista, trenuci izlaza i zalaza zvezda računaju se kao trenuci za koje je $z = 90°$.

§ 2.3. Časovni ugao i deklinacija.

Horizontski koordinatni sistem vezan je za posmatrača, ali ne i za zvezde. Složen način na koji se menjaju zenitne daljine i azimut zvezde sa vremenom uzrokovan je činjenicom da ovaj koordinatni sistem, a posebno njegov pol Z, ne zavise od prividnog dnevnog kretanja

zvezda, odnosno Zemljine rotacije. Međutim, koordinatni sistem vezan za pol P nema ovakve probleme. Pri tome, ako je PZ izabran kao referentni veliki krug, koordinatni sistem koji se realizuje je još i stalan u odnosu na trenutni položaj posmatrača. Nove koordinate su nazvane *časovni ugao* i *deklinacija*; poslednja je bila uvedena u nešto drugačijem kontekstu.

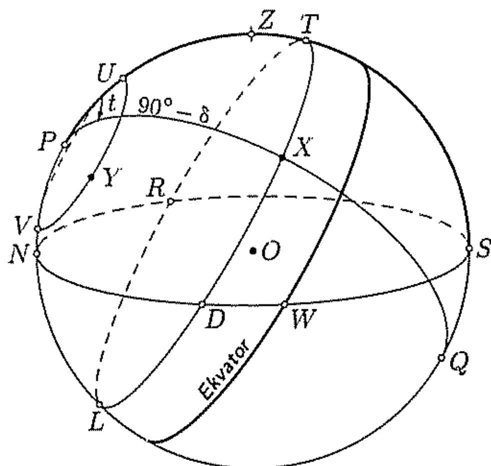
Nebeska sfera predstavljena na sl. 2.2 ima centar u posmatraču koji je u tački O, dok su zenit, nebeski polovi i osnovne tačke horizonta obeležene kao ranije. Razmotrimo slučaj posmatrača na severnoj geografskoj širini, mada to nema značaja za definicije koje slede. Za neku zvezdu, recimo X, na nebeskoj sferi definicija njene deklinacije δ i časovnog ugla t biće

$$\delta = 90^\circ - PX, \qquad t = ZPX. \tag{2.4}$$

Sam luk PX se navodi kao *severna polarna daljina* (NPD) zvezde.

Veliki polukrugovi sa krajevima u nebeskim polovima, kao PXQ, nazivaju se *meridijani*. Očigledno je duž svake od ovih krivih časovni ugao konstantan. Meridijan sa nultim časovnim uglom $PZSQ$ je poznat kao *posmatračev meridijan* i kada je zvezda u tom meridijanu govorimo o *kulminaciji* zvezde. Treba napomenuti da se časovni ugao meri u smeru *zapadno* od posmatračevog meridijana.

Mali krugovi sa polovima u P i Q nazvani su *deklinacijski krugovi*. Sada, pošto je dnevno kretanje zvezda ekvivalentno uniformnoj rotaciji cele nebeske sfere oko ose kroz P i Q, sledi da zvezda vrši dnevno kretanje po deklinacijskom krugu, prikazanom na sl. 2.2 kao $XDLRTX$. U toku jednog dana, zvezda se kreće zapadno od tačke X ka D, gde zalazi; zatim stiže u najnižu tačku L ispod horizonta, kada je njen časovni ugao 180°, posle toga približava se s donje strane horizontu, izlazeći u tački R; njena visina raste dostižući maksimalnu vrednost u meridijanu T. Zatim, njena visina opada i ona se ponovo vraća, posle 24 časa u tačku X. Pri svom dnevnom kretanju, zvezda opisuje svoj dnevni paralel i to uniformnom brzinom. Međutim, deklinacija je konstantna za svaku zvezdu, dok časovni ugao prirasta ravnomerno. Time su potpuno jednoznačno određeni i časovni ugao zvezde i njena deklinacija u svakom traženom trenutku. Pojednostavljujući ovo, časovni ugao je obično izražen, ne u stepenima, već u vremenskim jedinicama, slično rektascenziji, izjednačavanjem 24^h sa 360°.



Слика 2.2

Na sl. 2.2 vidi se da, posmatrano iz tačke P, časovni ugao raste u smeru kazaljke na satu. Međutim, koordinatni sistem je levo-orijentisan i to je neizbežno ako časovni ugao raste sa vremenom. Sa slike se može izvući još jedan značajan zaključak: *Ako je azimut zvezde istočni njen časovni ugao se nalazi između* 12^h *i* 24^h.

Nebeski ekvator, pomenut u glavi 1, ima deklinaciju jednaku nuli. On je veliki krug sa polovima P i Q. Posmatrajmo tačke E i W. One su po 90° udaljene i od zenita i od tačke S. Time su one polovi posmatračevog meridijana i zato je svaka na po 90° udaljena od P. Iz ovoga sledi da se one moraju nalaziti na nebeskom ekvatoru. Drugčije rečeno, nebeski ekvator seče horizont u njegovoj istočnoj i zapadnoj tački.

Zvezda na nebeskom ekvatoru izlazi u tački E i zalazi u tački W; pa će zato iznad horizonta zvezda biti tačno 12 sati. S druge strane, zvezda negativne deklinacije izlazi na jugo-istočnom a zalazi na jugo-zapadnom delu horizonta; ona je na vidljivom delu neba manje od 12 sati. Međutim, slično je sa zvezdom X, koja ima pozitivnu deklinaciju, ona je vidljiva više od 12 sati svakog dana. Naravno, dva poslednja zaključka važe samo za posmatrača na severnoj širini. Na južnoj hemisferi je obrnuto pravilo. Dok je deklinacija *zvezde* stalna, Sunčeva deklinacija ima pravilnu godišnju promenu u granicama od približno ±23°,5. To je ona promena koja uzrokuje sezonske razlike u dužini obdanice i najviše dolazi do izražaja na velikim širinama.

Spominjući ponovo sl. 2.2, vidimo da zvezda dovoljno velike deklinacije neće nikada imati ni izlaz ni zalaz; stalno je vidljiva. Takva zvezda se naziva *cirkumpolarna*. Na primer, cirkumpolarna zvezda je prikazana tačkom Y na sl. 2.2, sa njenim dnevnim paralelom UYV, koji predstavlja dnevno kretanje zvezde. Tačka V, u kojoj je visina zvezde najmanja—ima časovni ugao 12^h—naziva se *donja kulminacija* ili *donji prolaz* zvezde. Tačka U, u kojoj ona prolazi kroz posmatračev meridijan, već je definisana kao njen meridijanski prolaz. Za razliku od tačke V, tačka U se spominje kao *gornji prolaz* ili *gornja kulminacija* zvezde. U ovim tačkama nazivi nisu potpuno standardni, ali je značenje jasno iz konteksta.

Granični slučaj za cirkumpolarnu zvezdu je da ona ima donju kulminaciju u severnoj tački horizonta. Tada je $PN = 90° - \delta = \varphi$, pa je uslov da zvezda bude cirkumpolarna sledeći:

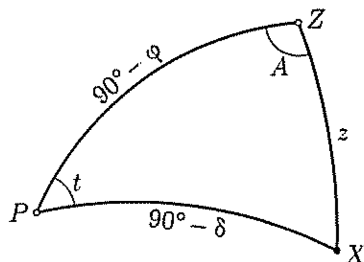
$$\delta > 90° - \varphi. \tag{2.5}$$

S druge strane, ovaj deo nebeske sfere je uvek vidljiv. Zbog simetrije, može se napisati i

$$-\delta > 90° - \varphi. \tag{2.6}$$

Ove dve nejednakosti važe samo za posmatrača na severnoj hemisferi. Znak za δ i φ mora biti promenjen za posmatrača na južnoj hemisferi, što čitalac može lako proveriti.

Ovaj paragraf završićemo kratkim razmatranjem transformisanja koordinata sa horizontskog na ekvatorski koordinatni sistem i obrnuto. Trigonometrijske pojedinosti metoda mogu se razlikovati za neka rastojanja, ali suština problema se svodi na rešavanje sfernog trougla PZX. Ovaj trougao čine samo zvezda i polovi dva već pomenuta koordinatna sistema. Jasnoće radi, trougao je izvučen sa sl. 2.2 i prikazan je uvećan na sl. 2.3. Iz definicije azimuta i zenitske daljine, jednačine (2.1), imamo da je $PZX = A$ i $ZX = z$. Isto tako, na osnovu definicija časovnog ugla i deklinacije, jednačine (2.4), imamo da je $ZPX = t$ i $PX = 90° - \delta$. Osim toga, $PZ = 90° - \varphi$, gde je φ posmatračeva širina, pa je svih pet elemenata,



Слика 2.3

pomenutog sfernog trougla, određeno na ovoj slici. Možemo primeniti dva kosinusna obrasca, koji daju sledeće rezultate

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi + \sin z \cos\varphi \cos A, \quad (2.7)$$

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t. \quad (2.8)$$

Ove dve jednačine su dovoljne za transformisanje koordinata, kao što je niže pokazano sa dva primera.

Slika 2.3 je primenljiva kada je azimut zvezde zapadni. Postoje neke male modifikacije ako je azimut istočni. Međutim, jednačine koje daju rezultate su (2.7) i (2.8), i takođe se primenjuju za južnog posmatrača. Na kraju, pre primene transformacije koordinata na primerima, pogodno je izraziti raniji zaključak formalnim matematičkim jezikom:

$$\begin{aligned} 0 < A < 180^\circ &\Leftrightarrow 0 < t < 12^h \\ 0 > A > -180^\circ &\Leftrightarrow 12^h < t < 24^h. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Primer. (a) *Zvezda ima zenitnu daljinu* $57^\circ{,}57$ *i istočni azimut* $137^\circ{,}60$ *za posmatrača na severnoj širini* $41^\circ{,}36$. *Izračunati njen časovni ugao i deklinaciju.*

(b) *Za istog posmatrača, devet sati posle kulminacije, izračunati horizontske koordinate zvezde koja ima deklinaciju* $63^\circ 43'$.

(a) Sa datim podacima može se izračunati desna strana jednačine (2.7)

$$\sin\delta = -0{,}11347.$$

Ovde nema dvosmislenosti; uzeta je osnovna vrednost inverznog sinusa i daje

$$\delta = -6^\circ 31'.$$

Za određivanje časovnog ugla, jednačina (2.8) napisana je u obliku

$$\cos t = \cos z \sec\delta \sec\varphi - \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi.$$

Pošto je sada poznata deklinacija, ovo daje

$$\cos t = 0{,}81967.$$

Azimut A je negativan, pa ne uzimamo osnovnu vrednost [vidi jednačinu (2.9)], već dobijamo

$$t = 325^\circ{,}0513.$$

Posle deljenja sa 15, rezultat u vremenskim jedinicama, biće

$$t = 21^h 40^m{,}2.$$

Tako su dobijene ekvatorske koordinate (t, δ).

(b) Ovo je suprotan problem problemu (a). Traži se ponovno rešavanje korišćenih jednačina (2.7) i (2.8), ali su njihove uloge promenjene. Sve je poznato na desnoj strani jednačine (2.8), pa na taj način imamo

$$z = \arccos(0{,}35746) = 69^\circ{,}06.$$

Uzeta je osnovna vrednost i nema dvoznačnosti.

Azimut se može dobiti pisanjem jednačine (2.7) u obliku

$$\cos A = \sin\delta \csc z \sec\varphi - \cot z \operatorname{tg}\varphi,$$

jer je desna strana potpuno poznata. Tako nalazimo da je

$$A = \pm 19^\circ{,}59.$$

Mora se uzeti znak plus, jer je $t < 12^h$. Dobijamo da zvezda ima zapadni azimut $19^\circ{,}59$.

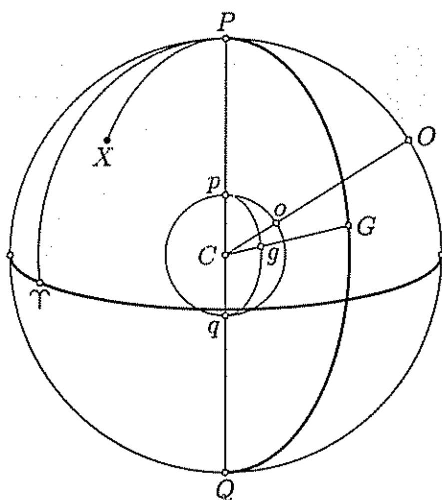
§ 2.4. Zvezdano vreme i rektascenzija.

Razmatrajmo geocentričnu nebesku sferu prikazanu na sl. 2.4, sa centrom C u središtu Zemlje. Sa p i q označeni su Zemljini geografski polovi. Kada se duži Cp i Cq produže, one prodiru nebesku sferu u severnom P i južnom Q nebeskom polu. Neka tačka g predstavlja položaj Griniča, a tačka o neka predstavlja posmatrača na Zemlji sa istočnom geografskom dužinom λ. Sada produženi pravci Cg i Co prodiru nebesku sferu u tačkama G i O, redom. Imamo da je za posmatrača u Griniču tačka G njegov zenit, a PGQ je njegov posmatrački meridijan. Slično tome POQ je posmatrački meridijan za posmatrača u tački o i sferni ugao je $GPO = \lambda$.

Pretpostavimo da je X položaj ma koje zvezde na nebeskoj sferi. Onda je GPX časovni ugao ove zvezde za posmatrača u Griniču. On se naziva *grinički časovni ugao* (t_G). S druge strane, za posmatrača na geografskoj dužini λ, časovni ugao (t) jeste ugao OPX, odakle sledi da je

$$t = t_G + \lambda. \qquad (2.10)$$

U ovoj jednačini λ je *istočna* longituda posmatrača. Pošto se dva časovna ugla mogu izraziti u časovnoj meri, λ takođe mora biti izraženo u ovim jedinicama.



Слика 2.4

Opisana su dva ekvatorska sistema koordinata, časovni ugao i deklinacija u prethodnom paragrafu, i rektascenzija i deklinacija u paragrafu 1.6. Oba sistema imaju isti pol P, a razlikuju se samo u izboru početnog velikog kruga kroz P. Taj krug je posmatrački meridijan PO za časovni ugao, dok je za rektascenziju to veliki krug $P\Upsilon$. Dalja razmatranja daće ekvinokcij Υ u sledećem paragrafu; za sada je dovoljno reći da je to tačka na nebeskom ekvatoru nepokretna *u odnosu na zvezde*. Ako je α rektascenzija zvezde u tački X, onda je $\alpha = \Upsilon PX$. Iako časovni ugao zvezde raste sa vremenom, rektascenzija je stalna.

Ekvinokcij (ili Υ tačka) je takođe početna tačka za merenje vremena, ali u odnosu na zvezde, ne u odnosu na Sunce, kao u srednjem vremenu. Zato je to vreme nazvano *zvezdano vreme*. Definicija je sledeća: *mesno zvezdano vreme s definisano je kao časovni ugao Υ tačke*

$$s = t(\Upsilon). \qquad (2.11)$$

Slično je za posmatrača u Griniču: *Griničko zvezdano vreme S biće dato sa*

$$S = t_G(\Upsilon). \qquad (2.12)$$

Iz jednačine (2.10) sledi da su dva vremena povezana jednačinom

$$s = S + \lambda. \qquad (2.13)$$

Na osnovu izloženog vidi se da zvezdano vreme priraste 24^h za tačno jednu Zemljinu rotaciju oko njene ose. Taj period se naziva *zvezdani dan*. On nije isti kao srednji sunčani dan; u stvari, zvezdanom danu odgovara oko $23^h 56^m$ srednjeg vremena.

Uzrok za ovakvu razliku je što početna tačka za zvezdano vreme, ili ♈ tačka, za razliku od Sunca, jeste stalna u odnosu na zvezde.

Zvezdano vreme obezbeđuje značajnu pomoćnu kariku između časovnog ugla i rektascenzije. Razmotrimo ponovo sl. 2.4. Za posmatrača u o, zvezdano vreme je, jednačina (2.11), sferni ugao $OP♈$. Kao što je pomenuto, časovni ugao zvezde u tački X za posmatrača u o je OPX, a zvezda u X ima rektascenziju $\alpha = ♈PX$. Sledi da je

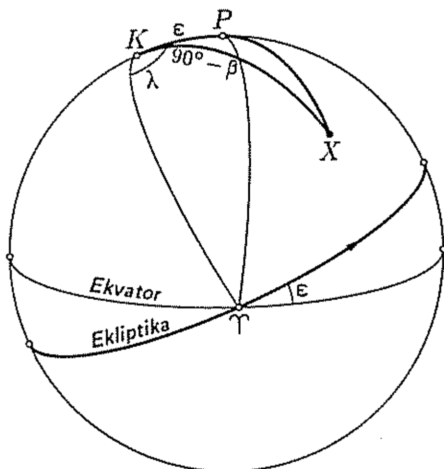
$$s = t + \alpha. \tag{2.14}$$

Ova jednačina važi za svako nebesko telo X i za svakog posmatrača na Zemlji. Osim toga, vidi se da su (2.11) i (2.12) specijalni slučajevi ovog rezultata. Jednačina (2.14) predstavlja sve što je potrebno za transformaciju koordinatnog sistema sa časovnim uglom i deklinacijom na koordinatni sistem sa rektascenzijom i deklinacijom.

§ 2.5. Ekliptika i ekliptičke koordinate.

Zemljino godišnje kretanje oko Sunca daje osnovnu ravan za odgovarajući koordinatni sistem, jedan od onih koji se posebno koristi u Sunčevom dinamičkom sistemu. Ravan Zemljine putanje je poznata kao *ravan ekliptike*, a veliki krug nastao presekom ove ravni sa nebeskom sferom nazvan je samo *ekliptika*. U toku godišnjeg kretanja, Zemljina osa rotacije zadržava stalni pravac u odnosu na zvezde, zaklapajući ugao od oko $23\frac{1}{2}°$ sa normalom na ravan ekliptike. Ovaj ugao je označen sa ε i naziva se *nagib ekliptike*.

Posledica Zemljinog godišnjeg kretanja je prividno kretanje Sunca u odnosu na nepokretne zvezde. U svakom trenutku Sunce se nalazi na ekliptici, a celu ekliptiku opiše tokom jedne godine. Stoga se njegovo prividno godišnje kretanje vrši brzinom od oko jednog stepena dnevno. Na sl. 2.5, prikazana su dva velika kruga, ekvator i ekliptika, i tačke P i K koje su njihovi polovi, redom. P je, naravno, severni nebeski pol, a K je *severni ekliptički pol*, pol koji je od P na rastojanju manjem od 90°. Po definiciji je luk $KP = \varepsilon$ nagib ekliptike. Osim toga, lako je proveriti da je ugao preseka između ekvatora i ekliptike takođe ε, kao što je pokazano na dijagramu. Smer Sunčevog prividnog kretanja duž ekliptike je takođe označen—on je u smeru suprotnom kazaljci na časovniku kada se posmatra sa severnog ekliptičkog pola. Ovo označava smer kretanja u Sunčevom sistemu (ili na nebeskoj sferi) koji je nazvan *direktnim*. Suprotni smer nazvan je *retrogradnim*.



Слика 2.5

Ekvator i ekliptika seku se u dvema tačkama, od kojih je jedna prikazana na sl. 2.5. Ovo je fundamentalna referentna ♈ tačka (prolećna ravnodnevica) ili ekvinokcij, odnosno tačka u kojoj Sunce prelazi ekvator sa južne na severnu hemisferu. Kada se termin *ekvinokcij* koristi, izvan ove definicije, onda je to uvek određena ♈ tačka. Ekvinokcij se koristi kao nulta tačka za rektascenziju, a takođe i ekliptičku longitudu koja je niže definisana.

U ekliptičkim koordinatama, tačka K je odabrana za pol koordinatnog sistema, a veliki krug $K\Upsilon$ je izabran za referentni veliki krug. Tada, ako je X ma koja tačka na nebeskoj sferi, njena *ekliptička latituda* β i njena *ekliptička longituda* λ definisane su sa

$$\beta = 90^\circ - KX, \qquad \lambda = \Upsilon KX. \tag{2.15}$$

Uglovi β i λ su izraženi u stepenima, s tim što je β u granicama $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, dok λ obuhvata raspon $0 \leq \lambda < 360^\circ$. Ekliptička longituda raste u smeru koji je prethodno opisan kao direktan. U posebnom slučaju, ekliptička latituda Sunca je nula, a njegova ekliptička longituda raste ravnomerno. Na drugoj strani, planete se takođe kreću direktno, ali, u određenoj konfiguraciji, rezultanta Zemljinog i planetskog putanjskog kretanja, od kojih je svako direktno, može proizvesti prividno retrogradno kretanje.

Veza između ekliptičkih i ekvatorskih koordinata objekta na sferi može se izvesti iz razmatranja sfernog trougla PKX. Neka X ima rektascenziju i deklinaciju (α, δ). Strane ovog trougla su $KP = \varepsilon$, $PX = 90^\circ - \delta$, $KX = 90^\circ - \beta$. Osim toga, pošto su uglovi ΥKP i ΥPK pravi, to sledi da je $PKX = 90^\circ - \lambda$ i $KPX = 90^\circ + \alpha$. Sa pet poznatih elemenata trougla, primena standardnih trigonometrijskih obrazaca dopušta transformaciju sa ekliptičkih koordinata (λ, β) na ekvatorske koordinate (α, δ) i obrnuto. Međutim, druga, i možda više direktna procedura, nazvana je postupak pravouglih koordinata.

Sistem pravouglih ekvatorskih koordinata, (x, y, z), pomenut je u §1.6, a same koordinate su date jednačinama (1.26). Osa x je usmerena ka Υ tački, osa z ka polu P, a osa y je usmerena tako da kompletira desno-orijentisani koordinatni sistem. Sličan sistem pravouglih ekliptičkih koordinata, (ξ, η, ζ), može se uvesti sa ζ-osom usmerenom ka K i ξ-osom ponovo usmerenom ka Υ tački. Osa η je tada u pravcu tačke sa koordinatama $\lambda = 90^\circ$, $\beta = 0$. Tada su koordinate tačke X date sa

$$\xi = \cos\beta\cos\lambda, \qquad \eta = \cos\beta\sin\lambda, \qquad \zeta = \sin\beta. \tag{2.16}$$

Sada je transformacija sa jednog koordinatnog sistema na drugi ekvivalentna rotaciji osa za ugao ε oko zajedničke x- i ξ-ose. Stoga, možemo lako ustanoviti jednačine za transformaciju u obliku

$$\begin{aligned} \xi &= x, & x &= \xi, \\ \eta &= y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon, & y &= \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon, \\ \zeta &= -y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon, & z &= \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ovi rezultati mogu se izraziti preko sfernih koordinata, korišćenjem jednačina (1.26) i (2.16). Dobijaju se dva sledeća sistema jednačina:

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha, \\ \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda, \\ \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ova dva sistema jednačina dovoljna su za transformaciju između ekvatorskih koordinata (α, δ) i ekliptičkih koordinata (λ, β). Čitalac može pokazati da se ove jednačine mogu dobiti primenom sinusnog, kosinusnog i sinusno-kosinusnog obrasca na sferni trougao PKX. Ipak, u većini slučajeva, pravougle koordinate su sve što je potrebno, a njihova transformacija je prosto jednostavnija i direktnija.

§ **2.6. Pravo i srednje vreme.** Zvezdano vreme je definisano, u §2.4, kao časovni ugao ♈ tačke. Ono daje sistem vremena vrlo visoke uniformnosti, sistem koji ima mnogo primena u astronomiji, ali je nepogodan za svakodnevnu upotrebu. Građansko vreme mora biti definisano preko časovnog ugla Sunca. Trenutak Sunčevog prolaska kroz posmatračev meridijan (gornja kulminacija) je definisan kao *pravo podne*, a interval između dve uzastopne gornje kulminacije Sunca definiše *pravi sunčani dan* (ili samo *pravi dan*). Međutim, zgodnije je uzeti da pravi dan počinje u ponoć nego u podne, tako da sledi definicija:

$$\text{mesno pravo vreme } t_p = t_\odot + 12^h, \tag{2.20}$$

gde se astronomski simbol ⊙ koristi kao oznaka za Sunce. Za vezu između pravog i zvezdanog vremena, nužno je primeniti jednačinu (2.14), identifikujući tačku X sa Suncem. Onda je

$$\text{mesno pravo vreme } t_p = s + 12^h - \alpha_\odot. \tag{2.21}$$

U toku jedne godine Sunčeva rektascenzija priraste za 24^h, tako da ova jednačina ukazuje na to da je broj zvezdanih dana u godini za jedan veći od broja sunčanih dana. Zanemarujući male precesione efekte, koji će biti razmatrani u glavi 10, zvezdano vreme zavisi samo od Zemljine rotacije, koja je u velikoj meri pravilna. Na drugoj strani, pravo sunčano vreme, takođe, sadrži Sunčevu rektascenziju, koja zavisi od Zemljinog kretanja oko Sunca.

Prvo u osnovi pravilno opisano planetsko kretanje bilo je dato, u 17-om veku, od Johana Keplera (JOHANNES KEPLER) sa njegova tri poznata zakona. Oni su:

I. *Putanja planete oko Sunca je elipsa, u čijoj se jednoj žiži nalazi Sunce.*

II. *Planeta se kreće konstantnom sektorskom brzinom, tj. radijus vektor Sunce-planeta opisuje u jednakim vremenskim intervalima jednake površine.*

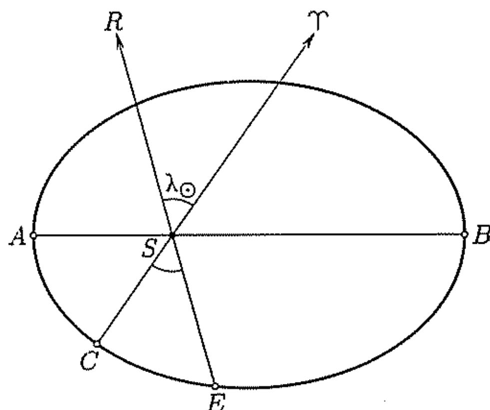
III. *Kub velike poluose planetske putanje proporcionalan je kvadratu perioda njenog obilaženja.*

Prva dva zakona biće nam od neposrednog značaja.

Slika 2.6 predstavlja Zemljinu eliptičnu putanju. S označava položaj Sunca, a AB veliku osu. Eliptičnost Zemljine putanje je preuveličana—putanja je, u stvari, bliska kružnoj, njena ekscentričnost je samo 0,016. Tačka A u kojoj je Zemljino rastojanje od Sunca najmanje nazvana je *perihel*. Dijametralno suprotna tačka na putanji, koja odgovara najvećem rastojanju, nazvana je *afel*. Zemlja prolazi kroz perihel početkom januara. Dužina velike poluose Zemljine putanje nazvana je *astronomska jedinica* (AJ). Ona je pogodna za jedinično rastojanje u dinamičkom Sunčevom sistemu; jednaka je $1{,}496 \cdot 10^8$ km.

Na sl. 2.6 sa C je predstavljena Zemlja u položaju prolećne ravnodnevice, kada se Sunce vidi u pravcu ♈ tačke. Neka E predstavlja položaj Zemlje u nekom nared-

nom vremenskom trenutku; Sunce će biti u pravcu zvezde R, kao što je navedeno. Sada je ugao ΥSR, ili CSE, longituda Sunca, $\lambda_\odot$, prikazana odgovarajućom za ovaj vremenski trenutak. Zemljina ugaona brzina oko Sunca nije konstantna. Ovo sledi iz drugog Keplerovog zakona, koji je, u stvari, konstantan za stalni ugaoni moment, a ne za brzinu. Sledstveno tome, longituda Sunca ne prirasta ravnomerno u toku godine, ali promena njene brzine je najveća u perihelu a najmanja u afelu. Ova promena u prirastanju Sunčeve longitude reflektuje se u odgovarajuću promenu u prirastanju njegove rektascenzije. To, u stvari, dovodi do nestalnosti u pravom sunčanom vremenu, kao što se može, neposredno, videti iz jednačine (2.21).



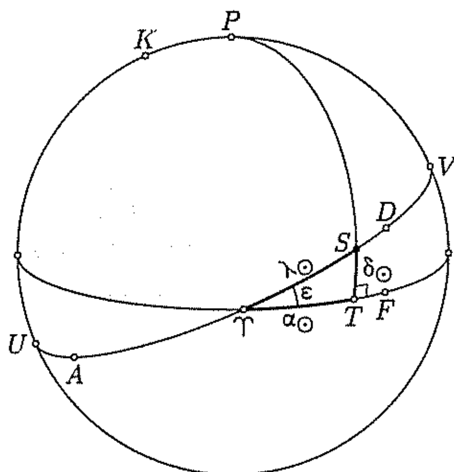
Zemljina putanja viđena sa severnog ekliptičkog pola.
Слика 2.6

Međutim, postoji još jedan uzrok neravnomernog prirastanja Sunčeve rektascenzije koji potiče od nagnutosti ekliptike prema ekvatoru. Neka sl. 2.7 predstavlja geocentričnu nebesku sferu na kojoj je ekliptika prikazana kao veliki krug $UA\Upsilon SV$. Tačke V i U, u kojima Sunce ima svoju najveću i najmanju deklinaciju od $\pm\varepsilon$, nazvane su *letnji* i *zimski solsticij*. Tačka A predstavlja položaj Sunca u trenutku perihela, a S bilo koji položaj Sunca. Neka su $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ rektascenzija i deklinacija Sunca. Luk velikog kruga kroz PS seče ekvator u T. Tada su u sfernom trouglu ΥST, poznati sledeći elementi: $\Upsilon S = \lambda_\odot$, $\Upsilon T = \alpha_\odot$, $TS = \delta_\odot$, $\Upsilon TS = 90°$ i $S\Upsilon T = \varepsilon$. Sferni trigonometrijski obrasci mogu se primeniti na ovaj trougao za dobijanje veze između Sunčeve rektascenzije, deklinacije i longitude. Na primer, primenom četvoroelementnog obrasca, sledi da je

$$\operatorname{tg}\alpha_\odot = \cos\varepsilon \operatorname{tg}\lambda_\odot. \qquad (2.22)$$

Ova relacija pokazuje da Sunčeva rektascenzija ne prirasta ravnomerno sa longitudom. U stvari, priraštaji su najmanji u dva ekvinokcija, a najveći u dva solsticija.

Gornja analiza pokazuje da se Sunčeva rektascenzija menja neravnomerno sa Sunčevom longitudom, koja i sama ne prirasta ravnomerno sa vremenom. Zbog toga se umesto pravog Sunca, koje ne odgovara potrebi očuvanja uniformne vremenske skale, uvodi imaginarno telo, koje je nazvano *fiktivno srednje Sunce*. Ono može geometrijski da se definiše na sledeći način. Neka τ bude vre-



Слика 2.7

me u trenutku prolaska Sunca kroz perihel. Taj položaj Sunca na nebeskoj sferi je u tački A. Dalje, sa n označimo srednju ugaonu brzinu Zemlje na njenoj putanji, tj. 360° godišnje. Posmatrajmo imaginarno telo koje se kreće po ekliptici ugaonom brzinom n i to tako da se njegovi položaji poklapaju sa pravim Suncem u perihelu—i zbog simetrije, u afelu. Ovo telo je nazvano *dinamičko srednje Sunce*. Pretpostavimo da je u nekom trenutku t pravo Sunce u S, a dinamičko srednje Sunce u tački D. Onda je $AD = n(t - \tau)$, u slučaju kada je vreme izraženo u godinama.

Zamišljeno srednje Sunce eliminiše neravnomernosti u Sunčevoj longitudi, ali ne eliminiše uticaj nagiba ekliptike. Da bi se i ovo postiglo, uvedeno je drugo imaginarno telo, koje je nazvano *fiktivno srednje Sunce* (ili samo *srednje Sunce*). Po definiciji ono se kreće konstantnom ugaonom brzinom n po *ekvatoru* i njegovi položaji se poklapaju sa dinamičkim srednjim Suncem u dva ekvinokcija. Ako je, u trenutku t, fiktivno srednje Sunce smešteno u tačku F, onda je, po našoj definiciji, $\Upsilon F = \Upsilon D$. Fiktivno srednje Sunce je onda telo čija rektascenzija prirasta ravnomerno i približava se onoj pravog Sunca. Ono obezbeđuje pogodnu referentnu tačku za definisanje sistema sunčanog vremena iz kojeg su izbačene sve neravnomernosti. Ovo je *srednje sunčano vreme* (ili samo *srednje vreme*) koje zavisi od časovnog ugla fiktivnog srednjeg Sunca $\bar{t}$ na isti način kao što pravo sunčano vreme zavisi od časovnog ugla pravog Sunca, odnosno

$$\text{mesno srednje vreme } t_s = \bar{t} + 12^h. \qquad (2.23)$$

Osim toga, relacija sa mesnim zvezdanim vremenom se dobija kao ranije iz (2.14), dajući

$$\text{mesno srednje vreme } t_s = s + 12^h - \alpha_s. \qquad (2.24)$$

Razlika između pravog i srednjeg vremena je poznata kao *vremensko izjednačenje*. Ono je jednako luku TF na sl. 2.7, kao što se može videti iz jednačina (2.21) i (2.24), a obično je formalno definisano kao

$$\text{vremensko izjednačenje } \eta = \alpha_s - \alpha_{\odot}. \qquad (2.25)$$

U toku godine ova razlika se na dosta složen način menja i može najviše da iznosi 15 vremenskih minuta. Na osnovu ovoga jasna je potreba za uvođenjem srednjeg vremena.

Gore date definicije pravog i srednjeg vremena su definicije vezane za mesto i pogodne za svakog posmatrača. Mesno vreme (pravo ili srednje) zavisi od posmatračeve geografske dužine u potpuno istom smeru kao zvezdano vreme i standardizacija se postiže na sličan način. Srednje vreme Griničkog meridijana nazvano je *svetsko vreme* (*Universal Time*—UT) i lako je pokazati, sa (2.10) i (2.23), da je, za posmatrača na istočnoj geografskoj dužini λ,

$$\text{mesno srednje vreme } t_s = \text{UT} + \lambda. \qquad (2.26)$$

Naravno, kao i ranije, geografska dužina je izražena u vremenskoj meri.

Mesno srednje vreme je retko korišćeno u praksi. Stoga je jasno da su neophodne neke konvencije za masovnu upotrebu vremena. U malim zemljama, srednje vreme standardnog meridijana je prihvaćeno kao građansko vreme u svakom mestu. Na primer, u Ujedinjenom Kraljevstvu ili Republici Irskoj za standardni meridijan uzet je Grinički, tako da građansko vreme odgovara vremenu UT—barem

za zimske mesece; leti su časovnici pomereni za jedan sat unapred, u cilju energetske štednje (odnosno korišćenja dnevne svetlosti), i tada građansko vreme odgovara srednjem vremenu na meridijanu sa istočnom dužinom od 15°. Na drugoj strani, za velike zemlje, slične Sjedinjenim Državama, nepraktično je imati samo jedno standardno vreme; takve zemlje imaju više zonskih vremena, svaka vremenska zona ima srednje vreme standardnog meridijana, obično su standardni meridijani na razmacima od po 15° geografske dužine. U svakom slučaju, zonsko vreme je dato sa neznatnom varijantom jednačine (2.26), kao

$$\text{zonsko vreme } t_i = \text{UT} + \lambda_i, \qquad (2.27)$$

gde je sada λ_i (istočna) longituda standardnog meridijana i-te vremenske zone.

Razmatranje u ovom paragrafu daje kratak pregled očuvanja srednjeg vremena, ali ne sa svim detaljima složenosti ovog problema. Oni će biti razmatrani u glavi 10, a ovde uvodimo samo kompletne formalne definicije. Posebno je definisano *efemeridsko vreme* (*Ephemeris Time*—ET). Ono se slobodno može opisati kao svetsko vreme popravljeno za neravnomernosti u brzini Zemljine rotacije. I svetsko i zvezdano vreme definisani su preko časovnog ugla određenih referentnih tačaka na nebeskoj sferi, a, ipak, tačnost ovih tačaka može se definisati samo promenom njihovih časovnih uglova, koja je ravnomerna koliko i brzina Zemljine rotacije. Moderni atomski časovnici, čak vremenski precizniji od nekih astronomskih fenomena, pokazuju da se nalaze mnoge neravnomernosti u ugaonoj brzini Zemlje, dodajući i postojanje sigurnog vekovnog usporenja. Osim toga, ove neravnomernosti ne mogu se detaljno predvideti. Zato se astronomske efemeride računaju za vremensku skalu ET u kojoj se takve neravnomernosti ne pojavljuju. Razlika između efemeridskog i svetskog vremena je označena sa ΔT, u smislu

$$\Delta T = \text{ET} - \text{UT}. \qquad (2.28)$$

Razlika ΔT ne može biti unapred utablićena. Međutim, veza između svetskog i zvezdanog vremena postoji i utablićena je u *Astronomical Almanacu*, na dnevnim intervalima. Približan odnos između dve vremenske skale može se dati u obliku

$$\begin{aligned} &1 \text{ srednji dan} = 24^h03^m56^s{,}6 \text{ zvezdanog vremena} \\ &1 \text{ zvezdani dan} = 23^h56^m04^s{,}1 \text{ srednjeg vremena.} \end{aligned} \qquad (2.29)$$

Detaljnija analiza ove i drugih relacija koje sadrže vreme ostavljena je za glavu 10, u kojoj će biti date tačnije formule.

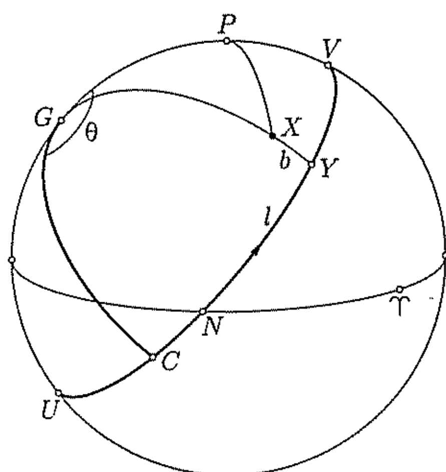
§ 2.7. Galaktičke koordinate.

Sistem galaktičkih koordinata ima za osnovnu ravan, što je prirodno, ravan galaksije u odnosu na koju se određuju položaji zvezda i njihova kretanja. Dve tačke na nebeskoj sferi koje su po 90° udaljene od galaktičke ravni nazivaju se *galaktički polovi* i na konvencionalan način može da se uvede koordinatni sistem zasnovan na ovim tačkama i galaktičkoj ravni.

Međutim, određenost galaktičke ravni zavisi od statističke obrade posmatračkog materijala mnogobrojnih nebeskih tela. Posle Drugog svetskog rata, posmatrački materijal je proširen dodavanjem radio posmatranja galaksija i, to naročito, radio posmatranja na talasnoj dužini od 21 cm. Tako je postignuta znatno veća ta-

čnost za određivanje galaktičke ravni i galaktičkih polova. Bila je neophodna kompletna revizija sistema galaktičkih koordinata. U isto vreme, nova konvencija unosi izjednačavanje nule galaktičke longitude sa pravcem ka galaktičkom centru—nešto što nije korišćeno u ranijem sistemu. Ipak, činjenica je da su oba sistema bila u upotrebi, do nastanka konfuzije—kada je bilo neophodno preći na tačniji sistem—odnosno na „novi" sistem koji je već više od dvadeset godina bio u upotrebi. Taj sistem je niže opisan

Na sl. 2.8, P predstavlja severni nebeski pol a veliki krug $UCNV$ predstavlja galaktičku ravan, koja seče nebeski ekvator u N. Ovaj veliki krug nazvan je *galaktički ekvator*. Tačka G je *severni galaktički pol*, a C predstavlja pravac ka središtu galaksije. Neka je sada X položaj bilo koje zvezde. Povucimo luk velikog kruga GX i produžimo ga do preseka sa galaktičkim ekvatorom u Y. Onda je XY galaktička latituda; ona će biti pozitivna ili negativna prema tome da li je X severno ili južno od ekvatora. Ipak, napomenimo da se severno od galaktičkog ekvatora podrazumeva zvezda koja je na istoj strani od galaktičkog ekvatora kao G, pa nije neophodno da ima pozitivnu deklinaciju. Na drugoj strani, galaktička longituda zvezde X je luk CY meren u naznačenom smeru. Obe, i galaktička longituda i galaktička latituda, su izražene u stepenima.



Слика 2.8

Više formalno, *galaktička latituda* i *galaktička longituda* zvezde X definisane su, redom, kao

$$b = 90° - GX, \qquad l = CGX. \tag{2.30}$$

Galaktička latituda može uzimati vrednosti iz intervala $-90° \leq b \leq 90°$, dok galaktička longituda može uzimati vrednosti iz sva četiri kvadranta, tj. $0 \leq l < 360°$.

Da bi povezali galaktičke koordinate zvezde sa njenim ekvatorskim koordinatama, neophodno je znati položaje dveju tačaka G i C. Pretpostavimo da su (α_G, δ_G) rektascenzija i deklinacija severnog galaktičkog pola. Ovo posebno specifikuje položaj tačke G koja ispunjava zahtev $GC = 90°$, pa je sferni ugao PGC određen tačkom C. Označimo ovaj ugao sa θ. On se obično spominje kao *položajni ugao galaktičkog centra*, ali on je takođe galaktička longituda severnog nebeskog pola. Vrednosti usvojene za ova tri parametra, za epohu 1950,0, su

$$\alpha_G = 12^h49^m; \qquad \delta_G = 27°,4; \qquad \theta = 123°. \tag{2.31}$$

Neophodno je naznačiti epohu, pošto severni nebeski pol ima precesiono kretanje u odnosu na zvezde—što je opisano u glavi 9. Međutim, galaktičke koordinate su niže računate samo za ovu epohu i neophodno je obezbediti, pre primene ovakvog računa, da se ekvatorske koordinate zvezda odnose na ekvator i ekvinokcij za 1950,0.

Razmotrimo sferni trougao GPX na sl. 2.8. Ako tačka X ima ekvatorske koordinate (α, δ) i galaktičke koordinate (l, b), onda su elementi ovog sfernog trougla:

$$PX = 90^\circ - \delta, \qquad GX = 90^\circ - b, \qquad GP = 90^\circ - \delta_G,$$
$$GPX = \alpha - \alpha_G, \qquad PGX = \theta - l.$$

Sada, primenom kosinusnog obrasca nalazimo GX, odnosno latitudu b. Imamo da je

$$\sin b = \sin\delta_G \sin\delta + \cos\delta_G \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G). \tag{2.32}$$

Ovo će jednoznačno odrediti galaktičku latitudu. Uradićemo isto ovo za galaktičku longitudu, međutim, treba koristiti i sinusni i sunusno-kosinusni obrazac, koji daju

$$\begin{aligned} \cos b \sin(\theta - l) &= \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_G), \\ \cos b \cos(\theta - l) &= \cos\delta_G \sin\delta - \sin\delta_G \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Pošto je b već određeno, ove dve jednačine omogućavaju određivanje $\sin(\theta - l)$ i $\cos(\theta - l)$, a iz njih se nedvosmisleno dobija $(\theta - l)$. Ovim je izvedena i longituda l. Strogo govoreći, detalji gore primenjenih argumenata potrebni su samo kada je $\alpha - \alpha_G < 180^\circ$, tada su na dijagramu potrebne neznatne modifikacije, ali jednačine (2.32) i (2.33) su korektne u svim okolnostima.

Obrnuta transformacija, sa galaktičkih na ekvatorske koordinate, može se izvesti sa vrlo sličnim argumentima. Još jednom, iz sfernog trougla GPX, odgovarajući obrasci biće

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\delta_G \sin b + \cos\delta_G \cos b \cos(\theta - l), \\ \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_G) &= \cos b \sin(\theta - l), \\ \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_G) &= \cos\delta_G \sin b - \sin\delta_G \cos b \cos(\theta - l). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Naravno, ove jednačine će dati rektascenziju i deklinaciju u odnosu na ekvator i ekvinokcij za 1950,0.

Kao što smo već pomenuli, gornja analiza odnosi se na galaktičke koordinate u „novom" sistemu koji se uglavnom sada koristi. Konvencijom je predloženo da se ove koordinate jednostavno označe sa (l, b), ali, naročito u ranijoj literaturi, kada je došlo do konfuzije sa „starim" sistemom, one su obeležavane sa (l^{II}, b^{II}), gde gornji indeks rimskim brojem označava da je korišćen novi sistem. Stari sistem je tada označavan sa (l^{I}, b^{I}). Nemamo nameru da ovde detaljno razmatramo stari sistem. On je definisan u zadatku 2.10 na kraju ovog paragrafa, gde je, takođe, razmatrana i transformacija sa starog na novi sistem. Dovoljno je reći da, ako sl. 2.8 predstavlja novi sistem, ekvatorske koordinate tačke G bile bi u starom sistemu malo promenjene u odnosu na one date u jednačinama (2.31) i longituda bi se merila od tačke N, a ne od tačke C. Završavamo ovaj paragraf sledećim primerom.

Primer. *Krab maglina ima ekvatorske koordinate* $(5^h31^m,5;\ +21^\circ59')$ *u odnosu na ekvator i ekvinokcij 1950,0. Izračunati njenu galaktičku latitudu i longitudu.*

Ovo je direktna primena jednačina (2.32) i (2.33). Na osnovu podataka i (2.31), nalazimo da jednačina (2.32) daje

$$\sin b = -0{,}10085.$$

Odavde je

$$b = -5^\circ 47'.$$

Ova vrednost se sada koristi u jednačini (2.33) za dobijanje rezultata

$$\sin(\theta - l) = -0{,}87926, \qquad \cos(\theta - l) = 0{,}47634.$$

Vidimo da je $(\theta - l)$ u četvrtom kvadrantu i iznosi $-61^\circ 33'$. Kako je $\theta = 123^\circ$, dobijamo vrednost za l. Ovim su nađene galaktičke koordinate Krab magline

$$l = 184^\circ 33', \qquad b = -5^\circ 47'.$$

§ **2.8. Postavljanje teleskopa.** Problem postavljanja teleskopa na Zemlji u prethodno zadatu orijentaciju neće biti razmatran. Pretpostavimo, na primer, da su koordinate, rektascenzija i deklinacija, uzete iz zvezdanog kataloga. Prvi korak bi morao biti prelazak sa rektascenzije na časovni ugao—iako ovo nije uvek eksplicitno—tako da su koordinate poznate u obliku koji je stalan u odnosu na posmatračevu neposrednu okolinu. To zahteva poznavanje mesnog zvezdanog vremena.

Normalno je da opservatorija ima časovnik koji održava mesno zvezdano vreme tako da se ono može direktno čitati. Šta više, postupak izračunavanja mesnog zvezdanog vremena s sa podacima iz *Astronomical Almanaca* biće razmatran u primeru datom niže. Za ovo je bitan isti postupak koji traži primenu i očuvanje mesnog zvezdanog vremena. Račun zahteva tačno poznavanje geografskih dužina posmatračkih mesta.

Neka su časovni ugao i deklinacija zvezde poznati, dalja transformacija koordinata može i ne mora biti nužno zavisna od montaže teleskopa. Najveći optički ❊ teleskop za opštu astronomiju koristi *ekvatorsku montažu*. Na taj način, glavna osa koja je postavljena jeste polarna osa usmerena prema severnom nebeskom polu. Dakle, ta osa je nagnuta prema vertikali za ugao $90° - \varphi$, što se izračunava na opservatoriji. Pretpostavimo sada da je teleskop postavljen prema tačkama koje su u pravcima pod uglom θ u odnosu na polarnu osu. Tako je teleskop postavljen u pravcu čija je deklinacija $90° - \theta$. Ako se sada celokupna oprema istovremeno zarotira oko polarne ose održavajući ugao θ stalnim, onda teleskop obuhvata deklinacije izvan deklinacijskog paralela na nebeskom svodu. Dakle, teleskop ima upravljač rotacije oko polarne ose sa brzinom od jednog obrta po zvezdanom danu, usled čega može da prati dnevno kretanje svih nebeskih objekata.

Prednosti ekvatorske montaže su, dakle, očigledne. Navođenje takvog teleskopa na određeni objekat zahteva na početku pokretljivost i po deklinaciji i po časovnom uglu. Tada će prvo od ovih kretanja biti održavano konstantnim, dok će drugo biti regulisano automatskim upravljačkim mehanizmom, koji će držati objekat unutar vidnog polja teleskopa. Pokretljivost po deklinaciji je jednostavna, a ona po časovnom uglu može biti pojednostavljena ako se montira skala sa određenom nultom tačkom. Ovo može biti postavljeno za sopstvenu rektascenziju i pokretni teleskop postaje pokretljiv po mesnom zvezdanom vremenu bolje nego po časovnom uglu, što nikada nije potrebno eksplicitno uraditi.

Ekvatorska montaža je normalna za optički teleskop samo ako on ima specijalnu funkciju. Brojni instrumenti imaju konstrukciju sa specijalnom montažom da bi preuzeli apsolutna astrometrijska merenja. Potpunije razmatranje ovakvih instrumenata i njihovih operacija predviđeno je u glavi 5, ali ovde ćemo dati kratak prikaz razmatranja za najfundamentalniji od svih instrumenata, meridijanski krug, ❊ jer on obezbeđuje direktno merenje rektascenzije i deklinacije. *Meridijanski krug* ❊ ili *meridijanski instrument* je obično dovoljno mali refraktor koji se kreće oko horizontalne istok-zapad ose. Ovo je samo slobodna rotacija oko te ose, pa sledi da je nepotpuno određena. Kako je to rotacija oko njegove ose, on obuhvata i zvezde izvan posmatračevog meridijana, pa se mogu posmatrati zvezde u ili oko meridijana. U žižnoj ravni instrumenta nalazi se krst-konaca koji predstavlja posmatračev meridijan, a posmatranja se sastoje od beleženja tačnog trenutka prolaska zvezde

kroz krst-konaca. Pošto je u meridijanu časovni ugao zvezde jednak nuli, posmatrano mesno zvezdano vreme meridijanskog prolaza zvezde daje direktno merenje rektascenzije zvezde [vidi jednačinu (2.14)].

Direktno merenje deklinacije je, takođe, moguće jednostavnim čitanjem nagiba u kojem se teleskop nalazi. To daje visinu zvezde iznad horizonta, ali za meridijanski prolaz relacija visine sa deklinacijom je jednostavna. Direktno čitanje deklinacije je moguće, ako se nulta tačka postavi podudarno sa ekvatorom a ne sa horizontom. Na ovaj način meridijanski krug korišćen zajedno sa mesnim zvezdanim časovnikom može dati direktna merenja obe koordinate—i rektascenzije i deklinacije.

Veliki radio teleskopi su često nedovoljno pokretni, a tip-meridijanskog merenja je lako podesiti. Osim toga, mogućnost radio instrumenata može biti proširena njihovim povezivanjem u dugo-baziénu interferometriju. Najveća položajna tačnost u radio astrometriji je dobijena na ovaj način. Međutim, analiza postaje komplikovanija, pa je detaljno razmatranje radio astrometrije ostavljeno za glave 15 i 16. Zadržaćemo se na problemu postavljanja potpuno odvojene radio antene sa promenljivom usmerenošću na izvor poznate rektascenzije i deklinacije.

Ako radio teleskop ima ekvatorsku montažu, problem se ne razlikuje od već razmatranog. Osnovne potrebe su još časovni ugao i deklinacija. Međutim, mehanički nedostaci ekvatorske montaže razmatrani su jer je glavna osa nagnuta u odnosu na vertikalu, pa mnogo veliki radio teleskopi koriste jednostavniju horizontsku montažu iz konstruktivnih razloga. U ovakvom slučaju, jasno je da je neophodno izračunavanje i visine i azimuta radio izvora da bi prijemnik teleskopa bio korigovan. Računar kontroliše veliki radio teleskop, ali to, naravno, ne pojednostavljuje zamršene sferne principe. Način pretvaranja časovnog ugla i deklinacije u horizontske koordinate već je razmatran u §2.3 i primenjen je u sledećem zadatku ovog paragrafa. U ovom paragrafu, daćemo još i detaljan postupak potreban za određivanje mesnog zvezdanog vremena, koje je, takođe, neophodno za ekvatorsku montažu.

Primer. *Horizontski radio teleskop nalazi se na geografskoj dužini* $\lambda = 83°31'$ W *i geografskoj širini* $\varphi = 40°15'$ N. *Potrebno je navesti teleskop na radio izvor 3C 273, čije su ekvatorske koordinate* $\alpha = 12^h28^m{,}3$; $\delta = 2°08'$. *Datum posmatranja je 1985, januar 7.,* 14^h42^m UT. *Izračunati neophodne koordinate za postavljanje teleskopa.*

Pre svega, mora se izračunati mesno zvezdano vreme. U *Astronomical Almanacu* nalazimo da je za 1985, januar 7., 0^h UT

$$S_0 = 7^h06^m01^s.$$

Na ovo moramo dodati 14^h42^m UT, ali izraženo u zvezdanom vremenu. To je najbolje učiniti ako izrazimo ovaj vremenski interval u časovima i pomnožimo ga faktorom za pretvaranje, koji je 1,002 737 909 4. Kao rezultat, dobijamo za trenutak posmatranja da je

$$S = 21^h{,}8406.$$

Za dobijanje mesnog zvezdanog vremena s neophodno je oduzeti zapadnu geografsku dužinu; jednačina (2.13) daje

$$s = 16^h16^m22^s.$$

Časovni ugao t za 3C 273 izračunava se sa (2.14) iz poznate vrednosti rektascenzije koja daje

$$t = 3^h48^m04^s = 57°{,}0174. \tag{2.35}$$

Potrebni obrasci za izvođenje visine i azimuta su jednačine (2.7) i (2.8). Ovde su one ponovo date u delimično modifikovanom obliku

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t, \tag{2.36}$$

$$\cos A = \sin\delta \sec a \sec\varphi - \operatorname{tg} h \operatorname{tg}\varphi. \tag{2.37}$$

Čitalac može naći korisnu pomoć tumačenjem sl. 2.3, koja ilustruje sferni trougao iz kojeg su izvedeni originalni obrasci. Jednačina (2.36) može se sada koristiti za izračunavanje visine

$$h = 26^\circ{,}0564.$$

Pošto je časovni ugao, iz (2.35), manji od 12^h, azimut izvora mora biti zapadni. Ovim je eliminisana svaka dvoznačnost u jednačini (2.37), koja sada daje

$$A = 111^\circ{,}0779.$$

Nađene su potrebne koordinate za postavljanje radio teleskopa, i to

$$\text{visina} = 26^\circ 03',$$
$$\text{azimut} = 111^\circ 04' \text{ zapadno}.$$

Zadaci

Simboli koji se niže koriste su:

- φ—posmatračeva širina,
- δ—deklinacija zvezde,
- ε—nagib ekliptike $= 23^\circ 26',5$.

2.1. Pokazati da azimut cirkumpolarne zvezde može imati svaku vrednost ako je $\delta < \varphi$, ali mora biti manji od $\arcsin(\cos\delta \sec\varphi)$ kada je $\delta > \varphi$.

2.2. Pokazati da je ugao ψ koji dnevni paralel zvezde zaklapa sa horizontom u trenutku izlaza ili zalaza dat sa

$$\psi = \arccos(\sin\varphi \sec\delta).$$

2.3. Ako je t časovni ugao zvezde pri izlazu, pokazati da je

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}. \qquad \text{[Smart (1977)]}$$

2.4. Dve zvezde A i B (sa deklinacijama δ_1 i δ_2) izlaze istovremeno i zvezda A kulminira u trenutku zalaza zvezde B. Pokazati da je

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_1 = 1 - 2\operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2.$$

2.5. Pokazati da su, za posmatrača na ekvatoru, sve zvezde iznad horizonta tačno 12^h i da su njihovi azimuti u trenutku izlaza i zalaza $90^\circ - \delta$.

2.6. Pretpostavljajući da su zvezde, vidljive golim okom, ravnomerno raspoređene po nebeskoj sferi, pokazati da je odnos cirkumpolarnih zvezda prema necirkumpolarnim zvezdama $\frac{1}{2}(\sec\varphi - 1)$ vidljiv iz ma kog mesta.

2.7. Pokazati da je zenitska daljina z severnog ekliptičkog pola data sa

$$z = \arccos(\cos\varepsilon \sin\varphi - \sin\varepsilon \cos\varphi \sin s),$$

gde je s mesno zvezdano vreme.

2.8. Pokazati da zbog nagiba ekliptike postoje šesto-mesečne varijacije u priraštanju Sunčeve rektascenzije. Pokazati dalje, da su, pri zanemarivanju ekscentričnosti Zemljine putanje, ovi priraštaji maksimalni u solsticijima, a minimalni u ekvinokcijima.

2.9. Koristeći podatke iz jednačine (2.31), izračunati nagib galaktičke ravni prema ekliptici. Pokazati da Sunce prolazi kroz galaktičku ravan u danima solsticija i odrediti galaktičku longitudu ovih tačaka prolaza.

2.10. Galaktički pol je u odnosu na stari sistem galaktičkih koordinata $(l^{\rm I}, b^{\rm I})$ približno udaljen za 1°,5 od pola sadašnjeg sistema (l, b) duž meridijana $l = 200°$. Longituda galaktičkog centra u starom sistemu je bila 327°,7. Šta je bila njegova galaktička latituda u ovom sistemu?

Pokazati da su galaktičke koordinate svih zvezda u oba sistema približno povezane datim jednačinama

$$b^{\rm I} = b - 1°{,}5\ \cos(l - 20°),$$
$$l^{\rm I} = l - 32°{,}3 - 1°{,}5 \cdot \mathrm{tg}\, b \sin(l - 20°).$$

ГЛАВА ТРЕЋА

Referentni sistem

§ **3.1. Inercijalni referentni sistemi.** Položajna astronomija obezbeđuje posmatračku osnovu dinamičkoj astronomiji, koja je, u glavnom, za Sunčev sistem, zasnovana na gravitacionoj sili. Nije slučajno što su se zakon gravitacije i dinamički zakoni pojavili u isto vreme zahvaljujući ser Isaku Njutnu (Sir ISAAC NEWTON), jer je Njutnov cilj bilo objašnjenje planetskih kretanja. Osnovni dinamički zakoni su, zaista, poznati kao *Njutnovi zakoni kretanja*. Zbog njihovog značaja, za ono što sledi, navešćemo ih:

1. Telo na koje ne deluje spoljna sila kreće se stalnom brzinom, pa stoga, pravolinijski.

2. Iznos promene momenta svakog tela jeste proizvod njegove mase i ubrzanja, jednak spolja primenjenoj sili na to telo.

3. Akcija i reakcija su jednake i suprotne; ovo je primenjeno, na primer, na sile između dva tela.

Prvi se zakon može smatrati specijalnim slučajem drugog, ali je toliko značajan da se obično daje posebno.

U slučaju dinamike Sunčevog sistema, primenjena sila je, naravno, gravitacijska sila Sunca. Za izvođenje dalje analize primenom ovih dinamičkih zakona i zakona gravitacije, neophodno je imati koordinatni sistem, ili sistem referencije. Ali, to mora biti inercijalni sistem. Zaista, možemo definisati inercijalni referentni sistem kao sistem u kojem su primenjena tri Njutnova zakona kretanja. Stoga je identifikacija inercijalnog sistema pitanje od glavnog značaja.

Na prvi pogled, čini se da sistem rektascenzije i deklinacije obezbeđuje inercijalni sistem, ili barem njegovu aproksimaciju. Nesumnjivo je da bi bio bolji predstavnik od sistema časovnog ugla i deklinacije, koji se obrne jednom za 24 časa u odnosu na zvezde. Ipak, ovo traži posebno isticanje. Pokazuje se da nema *nelogičnog* razloga zašto inercijalni sistem ne bi rotirao u odnosu na nepokretne zvezde. Nesumnjivo, bilo bi začuđujuće ako bi se pokazalo da je sistem časovnog ugla i deklinacije inercijalni, a da sistem rektascenzije i deklinacije to nije. U stvari, sasvim je lako proveriti da sistem časovnog ugla i deklinacije nije inercijalni sistem. Eksperiment koji ovo pokazuje jeste eksperiment sa Fukoovim (FOUCAULT) klatnom,

čijim klaćenjem je ustanovljeno da se njegova oscilatorna ravan menja u toku dana. Ali, ovo ne pokazuje da je nužno da sistem koji je nepokretan u odnosu na zvezde bude inercijalni—ovo pokazuje da je samo aproksimativno tako.

Filozof Ernest Mah (ERNST MACH), u devetnaestom veku, formuliše princip po kojem je inercija tela uzrokovana raspodelom ostatka materije u vasioni. Ako je Mahov princip tačan, onda inercijalni sistem ne može da rotira u odnosu na preostali deo vasione kao celine. Dok je apsolutna tačnost Mahovog principa još uvek sporna tema za razmatranje, nesumnjivo je da je to princip vrlo velikog intuitivnog apela i jedan koji izgleda tačan sa vrlo visokim stepenom aproksimacije. Mahov princip je prihvaćen u većem delu ove knjige i, stoga, su prihvaćene dve alternative definisanja inercijalnog sistema, naime, jedan u kojem se Njutnovi zakoni kretanja mogu primeniti i drugi koji je nepokretan u odnosu na preostali deo vasione.

Osnovni koordinatni sistem korišćen u položajnoj astronomiji jeste, naravno, sistem rektascenzije i deklinacije. Namera je da ovaj sistem postane dovoljno prečišćen, da konačno obezbedi inercijalni sistem najviše moguće tačnosti. Ovom se sistemu postavljaju dva zahteva. Prvi, da koordinatne ose koje definišu sistem ne rotiraju, da je sistem nerotirajući u odnosu na deo vasione kao celine, i drugi, da početak ovog koordinatnog sistema nema ubrzanja u odnosu na deo vasione. U sledećim paragrafima ove glave oba zahteva biće detaljno proučavana.

§ 3.2. Precesija, nutacija i sopstveno kretanje.

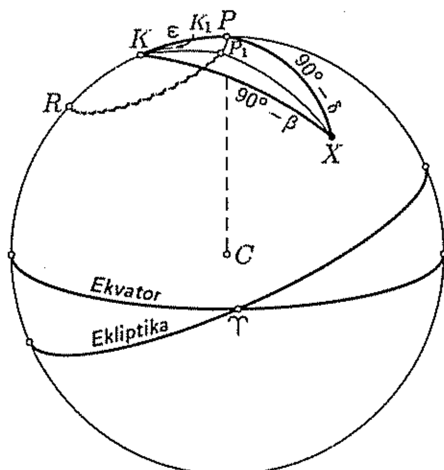
Na sl. 3.1 prikazani su ekvator i ekliptika i njihov presek u ♈ tački. Ekvatorski koordinatni sistem, rektascenzije i deklinacije, u potpunosti je određen ako su date ove dve ravni ili ako su poznati severni nebeski pol P i severni ekliptički pol K. Isto je i sa ekliptičkim koordinatnim sistemom; i on je određen sa dve tačke P i K. Iz ovoga je jasna zavisnost dva sistema. Posmatrajmo zvezdu X sa ekvatorskim koordinatama (α, δ) i ekliptičkim koordinatama (λ, β). Strane sfernog trougla PKX su

$$KP = \varepsilon, \qquad PX = 90^\circ - \delta, \qquad KX = 90^\circ - \beta. \tag{3.1}$$

Osim toga, pošto su $KP♈$ i $PK♈$ pravi uglovi, vidi se da su dva ugla ovog trougla

$$\begin{aligned} KPX &= 90^\circ + \alpha, \\ PKX &= 90^\circ - \lambda. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sada je potrebno da središte nebeske sfere C na sl. 3.1 bude početak *nekog* inercijalnog koordinatnog sistema. Ovo će postaviti određena ograničenja na položaj tačke C koja će biti razmotrena u sledećem paragrafu. U ovom trenutku ne moramo odrediti tačku C, potrebno je samo da ona bude početak inercijalnog sistema. Suština našeg razmatranja jeste kretanje tačaka P, K i X u odnosu na ovaj inercijalni sistem. U glavi 2 je pret-



СЛИКА 3.1

postavljeno da bi svaka od ovih tačaka mogla biti nepokretna. Ovo je, nesumnjivo, dobro za prvu aproksimaciju, ali ne i više. Usled različitih uzroka, svaka od ovih tačaka se kreće. Najviše se pomera tačka P i to usled *luni-solarne precesije* i *nutacije*, pomeranje tačke K nazvano je *planetna precesija*, dok je pomeranje samog X nazvano *sopstveno kretanje*. Ove tri tačke i njihova kretanja se kasnije posebno razmatraju. Pomeranje svake od njih prouzrokuje promene u ekvatorskim i ekliptičkim koordinatama zvezde.

Linija CP je, po definiciji, paralelna Zemljinoj osi rotacije. Stoga, ona definiše pravac vektora Zemljinog ugaonog momenta. Na Zemlju deluju gravitacione sile Sunca, Meseca i planeta. Gravitaciono privlačenje između dve idealne sfere ne stvara spreg sila.

Zato, u prvoj aproksimaciji, ugaoni moment ostaje konstantan, i CP je nepromenjeni pravac; odnosno tačka P je nepokretna na nebeskoj sferi. Uglavnom zbog svoje osne rotacije, Zemlja sa svojim ekvatorskim ispupčenjima, ipak, odstupa od sferno simetričnog oblika. Njen ekvatorski poluprečnik je veći od njenog polarnog poluprečnika za oko 0,3 procenta. Usled toga, svojim privlačenjem i Sunce i Mesec obrazuju spreg sila koji lagano menja pravac vektora Zemljinog ugaonog momenta, što uzrokuje pomeranje tačke P po nebeskoj sferi. Gravitacioni spreg sila je direktno proporcionalan masama tela koje privlači, a obrnuto je proporcionalan kubu (ne kvadratu) njihovih rastojanja. Stoga sledi da je uticaj Meseca dva puta veći od uticaja Sunca i da je najveći spreg koji nastaje usled planeta Jupitera i Venere 10^5 puta slabiji od pomenutih, pa je zato i izostavljen u daljim razmatranjima.

Rezultanta sprega sila koji nastaje usled privlačnog dejstva Meseca i Sunca na Zemlju menja se sa promenom konfiguracije i rastojanja ova tri tela. Međutim, odgovarajuće pomeranje tačke P po nebeskoj sferi je komplikovanije. Pogodno je podeliti ovo pomeranje na dva dela. Progresivno, dugo-periodično ili *sekularno* pomeranje severnog nebeskog pola nazvano je *luni-solarna precesija*, dok je kratko-periodično pomeranje nebeskog pola oko njegovog srednjeg položaja nazvano *nutacija*. Precesiono kretanje je prikazano na sl. 3.1 punom linijom PP_1R, dok je kretanje pravog pola usled nutacije predstavljeno talasastom linijom.

Uticaj nutacije je prilično mali—pomeranje nije veće od 15″. Nutaciju je, u 18. veku, prvi otkrio engleski astronom Bredli (BRADLEY), našavši u svojim meridijanskim merenjima periodične promene deklinacija zvezda. Odgovarajuće promene u rektascenziji nisu otkrivene jer u vremenu koje su pokazivali časovnici visoke preciznosti nisu postojale. Nasuprot tome, uticaj luni-solarne precesije za dugi vremenski interval može dovesti do vrlo velikih pomeranja. I zaista, ovaj uticaj je bio poznat još starim Grcima. U drugom veku pre naše ere, Hiparh (HIPPARCHUS) je upoređivao svoje položaje zvezda sa njihovim zapisanim položajima od 150 godina ranije. On nalazi da su ekliptičke latitude zvezda ostale nepromenjene dok su njihove ekliptičke longitude prirasle. Taj priraštaj iznosi oko 50″ godišnje. Grubo upoređujući, ovaj priraštaj odgovara opisanom precesionom uniformnom kretanju severnog nebeskog pola po malom krugu oko pola ekliptike K.

Neka je ψ *godišnji iznos luni-solarne precesije*. Ako je P bio početni položaj pola, a P_1 njegov položaj t godina kasnije, tada je sferni ugao $PKP_1 = \psi t$. Nagib ekliptike je nepromenjen, pa je $KP_1 = KP$. Neka su (λ_1, β_1) ekliptičke koordinate zvezde X za epohu t godina kasnije, pa upoređivanjem jednačina (3.1) i (3.2) imamo da je

$$P_1KX = 90° - \lambda_1, \qquad KX = 90° - \beta_1.$$

Ali, pošto je $P_1KX = PKX - PKP_1$, sledi da je

$$\lambda_1 = \lambda + \psi t. \tag{3.3}$$

Na kraju, pošto je KX nepromenjeno, znači da je ekliptička latituda stalna. Odgovarajuće promene u rektascenziji i deklinaciji su komplikovanije i moraju biti izvedene razmatranjem sfernih trouglova KPX i KP_1X.

Severni nebeski pol opiše oko pola ekliptike krug za oko 26 000 godina. Ovo kretanje se često upoređuje sa kretanjem naglo zarotirane čigre. Osa čigre se kreće precesiono zadržavajući stalni nagib prema vertikali. U slučaju luni-solarne precesije, Zemljina osa rotacije zadržava stalni nagib prema normali na ekliptičku ravan. Razmatraćemo promene u ekvatorskim koordinatama zvezde za celokupan precesioni period. Na primer, pretpostavimo da, ranije spominjana, početna epoha odgovara sadašnjem trenutku, pa se zvezda Polara (Severnjača) poklapa sa tačkom P. Posle isteka 13 000 godina severni nebeski pol će doći u tačku R, a severno polarno rastojanje zvezde Severnjače biće $PR = 2\varepsilon$ (oko 47°). Severnjača će tada biti daleko od severnog nebeskog pola i za širine manje od 47° ona neće biti čak ni cirkumpolarna.

Gornji opis precesije dat je, poređenja radi, nedovršen, jer se zasniva na dvema pretpostavkama, od kojih nijedna nije tačna. Naime, pretpostavlja se da su nagib ekliptike ε i godišnji iznos lunisolarne precesije konstantni. Do sada nije razmatrano kretanje pola ekliptike K. Saglasno Njutnovoj gravitacionoj dinamici, Zemljino kretanje oko Sunca vrši se približno po Keplerovoj putanji u ravni koja je stalna. Na ovaj način je definisan pol ekliptike. Međutim, ovaj zaključak je izveden na osnovu razmatranja problema dva tela (pogledati glavu 6), koji razmatra samo Zemlju i Sunce. Uticaji drugih planeta su zanemareni. Kada se oni uzmu u obzir, javljaju se mali poremećaji Zemljine Keplerovske putanje i, posebno, dolazi do promene položaja tačke K na nebeskoj sferi.

Pretpostavimo da je severni ekliptički pol pomeren iz tačke K u tačku K_1. Ovo pomeranje je malo; njegov iznos je oko $0'',5$ godišnje. Razmotrimo uticaj pomeranja KK_1 na ekvatorske koordinate zvezde X, smatrajući da je severni nebeski pol nepokretan u P. Pošto je $PX = 90° - \delta$, pomeranje K ne može uticati na deklinaciju zvezde. S druge strane, na sl. 3.1, ugao KPX koji je jednak $90° + \alpha$, smanjen je za ugao KPK_1. Stoga sledi da je i rektascenzija smanjena za ovaj iznos, koji ne zavisi od položaja zvezde. Možemo zaključiti da je uticaj pomeranja tačke K usled planetskih poremećaja isti za sve zvezde: rektascenzije se smanjuju svake godine za iznos koji se obično obeležava sa λ' i naziva *godišnji iznos planetne precesije*; deklinacije se ne menjaju. Sve ovo je praćeno smanjenjem nagiba ekliptike.

Korišćenje pojma precesija podrazumeva da se ovaj efekt smatra sekularnim. Međutim, postoje dve napomene. Prvo, da bi slika bila jasnija, godišnji iznos planetne precesije nije apsolutno konstantan, već ima malu promenu, jer se i P i K kreću. Drugo, izostavljanje kratko-periodičnih članova, sličnih nutacionim članovima, traži neko obrazloženje. U stvari, ovi članovi su veoma mali i mogu, u nekim slučajevima, biti izostavljeni iz određivanja položaja zvezda. U glavi 5 biće pokazano da meridijanska posmatranja zvezda daju apsolutne vrednosti za deklinaciju a samo relativne vrednosti za rektascenziju, i, kao što je već pokazano, pomeranje ekliptičkog pola K ne utiče na promene deklinacija, već samo na uniformne promene rektascenzija.

Sekularne promene nagiba, uzrokovane planetskim poremećajima, utiču na iznos luni-solarne precesije, jer je ovaj iznos određen srednjim privlačnim spregom sila Meseca i Sunca na Zemlju, koji zavisi od nagiba Zemljine ose rotacije na ravan njene putanje. Znači da, slično iznosu planetne precesije, i iznos luni-solarne precesije nije apsolutno konstantan već ima slabe sekularne promene.

Gore definisana dva iznosa precesije imaju sasvim različito dinamičko poreklo, ali, s druge strane, oni su slični jer svaki uzrokuje sekularne promene ekvatorskih ❊ koordinata zvezda. Zato je ovo pogodno za njihovo kombinovanje i definisanje *iznosa opšte precesije*, p, datog sa

$$p = \psi - \lambda' \cos\varepsilon. \tag{3.4}$$

Ovo je opšta precesija u longitudi, a pošto je planetna precesija u rektascenziji, to je lako objasniti faktor $\cos\varepsilon$ u gornjoj jednačini.

Ukupan efekt opšte precesije na kratkim intervalima, kraćim od jedne godine, može se jednostavno razmatrati kao superponovanje luni-solarne precesije i planetne precesije. Ovakav postupak je već bio usvojen, kada su kretanja tačaka P i K bila razmatrana nezavisno jedno od drugog. Međutim, ovakav postupak nije dovoljno tačan za duge vremenske intervale. Tada se moraju koristiti stroge formule koje su vrlo komplikovane. One će biti analizirane u glavi 9. Međutim, koeficijenti koji ulaze u ove formule moraju uslovno biti izračunati iz iznosa precesija gore spomenutih, koji imaju sledeće brojne vrednosti:

$$\begin{aligned} \text{Luni-solarna precesija}\ \psi &= 50'',3878 + 0'',0049\,T \\ \text{Planetna precesija}\ \lambda' &= 0'',1055 - 0'',0189\,T \\ \text{Opšta precesija}\ p &= 50'',2910 + 0'',0222\,T. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ovde je T vreme u vekovima od 2000,0.

U dosadašnjim razmatranjima više smo se oslanjali na tačke P i K nego na ekvator i ekliptiku. Na ovaj način prihvatili smo ideju jednog sfernog trougla. Međutim, u praksi je normalnije oslanjati se na same osnovne ravni, bolje nego na njihove polove. Ustanovili smo da se ekliptika njiše, u sekularnom smislu, stoga je neophodno navesti datum da bi se identifikovala jedinstvena ekliptika. Za taj isti datum ekvator se može definisati na dva različita načina, što zavisi od uzimanja ili neuzimanja u obzir nutacije. Ako je uzeta u obzir samo luni-solarna precesija, ❊ ekvator se menja isključivo u sekularnom smislu i naziva se *srednji ekvator*. Ako se uzmu u obzir i kratko-periodične nutacione promene, imamo ekvator koji se naziva ❊ *pravi ekvator*. Slična definicija se može napraviti i za ekvinokcij: *srednji* (*pravi*) ❊ ekvinokcij* je presek *srednjeg* (*pravog*) ekvatora sa ekliptikom istog datuma. Katološki položaji zvezda obično se odnose na srednji ekvator i srednji ekvinokcij; da bi se upoređivala, meridijanska posmatranja moraju prvo biti popravljena za nutaciju, pa, zatim, za neke druge efekte.

Da bi se upoređivala mnogobrojna posmatranja napravljena za različite datume, neophodno je da se sva svedu na *isti* ekvator i ekvinokcij. Iz svih posmatranja biće računate ekvatorske koordinate ali u odnosu na srednji ekvator i ekvinokcij neke standardne epohe. To je najčešće epoha 1900, ili 1950, ili odnedavno 2000.

* Koristi se srednji (pravi) ekvinokcij ili srednja (prava) ♈ tačka.

Zaista, svaka epoha, i prošla i buduća, kada se koristi, obezbeđuje upotrebu jedne jedine izabrane epohe. Ovo je bitno za posmatranja koja se koriste kao osnova za neke dinamičke analize. Pretpostavimo, na primer, da je napravljena posmatračka serija asteroida i da je potrebno izračunati putanju iz ovih posmatranja. Ako se koordinate dobijene iz svakog posmatranja odnose na ekvator i ekvinokcij datuma tog posmatranja, tada bi se te koordinate odnosile na obrtni koordinatni sistem i odgovarajuća dinamička analiza bi bila nevažeća. S druge strane, treba obezbediti tačne popravke za precesiju, čime je osigurano da su posmatranja, koja se odnose na srednji ekvator i ekvinokcij standardne epohe, data u odnosu na inercijalni sistem.

Spomenuti uslov je vrlo značajan. Ako smo pretpostavili da su zvezde nepokretne, tada bi promene nađene u meridijanskim merenjima njihovih koordinata mogle biti pripisane isključivo precesionim efektima. Međutim, svaka zvezda ima svoje *sopstveno kretanje*, što znači da će se tačka X sama pomerati po nebeskoj sferi prikazanoj na sl. 3.1. Pomeranje može biti u ma kom pravcu.

Posledice pomeranja su promene u koordinatama zvezde koje su male u poređenju sa precesionim promenama. Veoma mali broj zvezda ima sopstveno kretanje čiji iznos prelazi jednu lučnu sekundu godišnje, jer godišnji iznos je samo mali deo sopstvenog kretanja. Sopstveno kretanje zvezde zavisi od njenog kretanja u odnosu na centar nebeske sfere, a takođe zavisi od njenog rastojanja. Uopšteno govoreći, udaljene, slabe zvezde imaju vrlo malo sopstveno kretanje.

Može se napraviti radna pretpostavka da sopstvena kretanja zvezda imaju slučajne pravce. Ovim bi bilo moguće odvojiti sistematske efekte precesije od sopstvenog kretanja u meridijanskim posmatranjima. Tada bi, principijelno, bile određene i konstante precesije i pojedinačna sopstvena kretanja zvezda. Međutim, značajno je uočiti da tačnost jednog određivanja ograničava tačnost drugog. Kao posledica toga sledi da, iako se sopstvena kretanja odnose na inercijalni sistem, ona se mogu dobiti iz meridijanskih posmatranja sa tačnošću sa kojom su poznate konstante precesije.

Sopstvena kretanja se dobijaju upoređivanjem nezavisnih posmatranja razdvojenih dugim vremenskim intervalima. Dovoljno dug vremenski interval dozvoljava da pomeranje zvezde bude merljivo. Komponente godišnjeg sopstvenog kretanja u rektascenziji i deklinaciji se tada dobijaju s visokim stepenom tačnosti. Najuobičajeniji precizni metod je merenje serija astrografskih ploča snimljenih na uzastopnim datumima. Merenje svake fotografske ploče se redukuje (vidi glavu 13) da bi se dobile rektascenzije i deklinacije koje se odnose na standardni srednji ekvator i ekvinokcij. Precesioni efekti u ovom slučaju su zanemareni. Međutim, merenje fotografske ploče može dati samo relativne položaje zvezda. Zato je neophodno da se koriste određene zvezde na ploči kao uporišne zvezde pod pretpostavkom da su njihovi položaji unapred poznati za svaku epohu. To znači da su sopstvena kretanja uporišnih zvezda unapred poznata. Iz toga sledi da, iako *relativni* položaji i sopstvena kretanja zvezda mogu biti određeni sa većom tačnošću nego apsolutnim meridijanskim merenjima, ova pogodnost se ipak u većoj meri gubi zbog nužne zavisnosti položaja uporišnih zvezda od meridijanskih posmatranja. Tačnost apsolutnih položaja nije moguće povećati, pa sopstvena kretanja određena sa astrografskih ploča još mogu da sadrže i sistematske greške usvojenog referentnog sistema. Ovakve teškoće se mogu kasnije smanjiti korišćenjem, umesto uporišnih zvezda, objekata koji su na tako velikim rastojanjima da njihova sopstvena kretanja mogu biti

zanemarena. Pre razmatranja praktične realizacije ovoga, neophodno je razmotriti sve sistematske trendove u kretanjima samih zvezda.

Za izučavanje sopstvenih kretanja koristi se heliocentrična nebeska sfera. Tada je uzrok sopstvenog kretanja zvezde njena transverzalna brzina u odnosu na Sunce. Za Galaksiju koja rotira i zvezde i Sunce imaju svoja sopstvena kretanja unutar galaktičkog sistema. Iako je Sunce na rastojanju 10 kiloparseka od galaktičkog centra, slično drugim zvezdama u njegovoj okolini, i ono se (grubo rečeno) kreće po kružnoj putanji oko tog centra. Procenjuje se da je njegova brzina 200 do 250 km/s, pa sa ovom brzinom opiše krug oko galaktičkog centra za četvrtinu milijarde godina. Ovakvi zaključci slede iz analize galaktičke kinematike, koja je delom zasnovana na katalozima sopstvenih kretanja, ali koje su dopunjene podacima o radijalnim brzinama. Radijalne brzine imaju prednost; nezavisne su od rastojanja, jer su dobijene merenjem Doplerovog pomaka u spektralnim linijama zvezda.

❊ Prosečna brzina svih zvezda u neposrednoj okolini Sunca naziva se *lokalni standard mirovanja* (LSM). Svaka zvezda ima svoju pekularnu brzinu u odnosu na LSM, ❊ a isto važi i za Sunce. Pošto sopstveno kretanje zvezde zavisi od njene *relativne* ❊ *brzine u odnosu na Sunce*, uticaj Sunčeve sopstvene brzine, *lokalno Sunčevo kretanje*, prisutno je u sopstvenom kretanju svake zvezde. Međutim, pretpostavljajući da su pekularne brzine slučajno raspoređene, moguće je, na osnovu statističke analize sopstvenog kretanja, odvojiti sistematski uticaj lokalnog Sunčevog kretanja i odrediti veličinu i pravac tog kretanja.

Sam LSM se kreće nekom brzinom u odnosu na galaktički centar. To je upravo opšta brzina obrtanja Galaksije u pravcu $l = 90°$, $b = 0$. Međutim, sa rastojanjem od galaktičkog centra menja se brzina rotacije Galaksije, a ovo izaziva male ali sistematske uticaje na sopstvena kretanja zvezda. Veliki broj posmatranih i analiziranih zvezda nalazi se u istom delu Galaksije kao Sunce i na rastojanjima do nekoliko kiloparseka. Stoga sledi da je najvažnije razmotriti diferencijalnu galaktičku rotaciju, a ne rotaciju Galaksije u celini. U glavi 14 biće pokazano da diferencijalna galaktička rotacija uzrokuje, za svaku zvezdu u galaktičkoj ravni, sopstveno kretanje μ, dato sa

$$\mu \propto A \cos 2l + B, \tag{3.6}$$

gde je l galaktička longituda zvezde. Ovo sopstveno kretanje je u pravcu rasta galaktičke longitude i ne zavisi od rastojanja zvezde. Konstante A i B su poznate ❊ kao *Ortove konstante*. Obe imaju godišnji iznos reda $0'',01$, ali B je, posebno, slabo određeno.

Uticaj sopstvenog kretanja dat jednačinom (3.6) predstavljen je praktično konstantnim za sve zvezde na fotografskoj ploči. Pretpostavka da će slabe zvezde, statistički u najmanjem stepenu, biti na većim rastojanjima i da će, zbog toga, imati mala sopstvena kretanja nije sasvim tačna. One ne mogu, bez poboljšanja, da obezbede zadovoljavajući referentni sistem; takav da je potpuno inercijalan. Ovakve prepreke mogu se prevazići korišćenjem uporišnih tačaka na fotografskoj ploči koje su likovi objekata daleko izvan naše Galaksije, odnosno objekata koji su vangalaktički. Međutim, javljaju se teškoće. Položaji zvezda koje su tačkasti objekti mogu biti tačno određeni i činiti pogodne uporišne tačke. S druge strane, likovi galaksija su difuzni na fotografskoj ploči, pa je teže biti precizan sa njihovim koordinatama. Međutim, otkriće kvazara (QSOs—kvazi-zvezdani objekti), obezbeđuje

prikladnije prirodne tačkaste likove. Osim toga, mnogi QSOs su radio izvori pa im položaji mogu biti određeni sa vrlo visokom preciznošću metodama radio astronomije (glava 16). Za njih se najčešće misli da su, galaktička jezgra, na velikim kosmološkim rastojanjima, pa, stoga, na njih ne utiču galaktička sopstvena kretanja. Takvi ekstragalaktički izvori mogu određivati referentni sistem. U ovom trenutku to je nada koja postaje realnost.

Međutim, u ovakvom postupku napravljena je pretpostavka da vangalaktički objekti, na dovoljno velikim rastojanjima, neće imati sopstveno kretanje u odnosu na inercijalni sistem. Ova pretpostavka je slična Mahovom principu, po kojem vasiona ne može imati opštu rotaciju. Princip je prihvaćen u mnogim, ali ne u svim, kosmološkim teorijama, a naročito u onim koje prihvataju izotropne modele o širenju vasione. S posmatračkog stanovišta, opravdanost takvih modela izvedena je iz udaljenih galaksija koje, izgleda, pokazuju izotropnu raspodelu preko celog neba i imaju radijalne brzine koje sistematski rastu sa rastojanjem. Ipak, najjasnija potvrda izotropnosti je data pozadinskim mikrotalasnim zračenjem, koje je do vrlo visokog stepena uniformno preko cele nebeske sfere. Ovo zračenje je nastalo na vrlo ranom stupnju širenja vasione, te, stoga, pokazuje izotropnu prirodu vasione na vrlo velikim rastojanjima ($\sim 10^{10}$ svetlosnih godina).

U izotropnom modelu vasione, svaka tačka se može tretirati kao centralna. Posmatrane radijalne brzine sistematski rastu sa rastojanjem, približavajući se brzini svetlosti na „kraju vidljivog kosmosa"—na horizontu, kako se taj „kraj" zove. S druge strane, transverzalne brzine će imati samo slučajnu raspodelu oko nule, i to nezavisnu od rastojanja. Međutim, sopstvena kretanja vangalaktičkih objekata teže nuli s porastom rastojanja. U svakom slučaju, i očekuje se da budu mala za sve vangalaktičke objekte. Ocenu slučajnih transverzalnih brzina obezbeđuje sama Sunčeva brzina u odnosu na pozadinu vasione. Skorašnja istraživanja pozadinskog mikrotalasnog zračenja sugerišu da je ova brzina oko 400 km/s, a njoj bi odgovaralo beznačajno sopstveno kretanje s iznosom od 10^{-4} lučnih sekundi godišnje, na rastojanju od jednog megaparseka. Stoga, referentni sistem zasnovan na položajima vangalaktičkih izvora ispunjava sve uslove inercijalnog sistema referencije.

§ **3.3. Koordinatni početak referentnog sistema.** Sada ćemo pažnju usmeriti ka koordinatnom početku nebeske sfere, tački koju nismo ispitali u prethodnom paragrafu. Za koordinatni početak najčešće se koriste tri različite tačke—mesto posmatrača, centar Zemlje i centar Sunčevog sistema. Ove tačke odgovaraju središtima topocentrične, geocentrične i heliocentrične nebeske sfere, kao što je već pomenuto u §2.1. Na svoj način, svaki od ovih koordinatnih početaka je koristan i važan. Posmatranja se uvek vrše u odnosu na topocentrični referentni sistem; efemeride planeta i drugih nebeskih tela u Sunčevom sistemu, obično se daju u geocentričnom koordinatnom sistemu. Ovim se dobija prirodni standard uz čiju pomoć posmatrači na različitim mestima mogu da uporede svoja posmatranja. Slično tome, heliocentrična nebeska sfera predstavlja pogodan standard za posmatranje zvezda. Pri proučavanju efekata koji se ispoljavaju pri dugim vremenskim intervalima, kao što su sopstvena kretanja, moraju se otkloniti godišnje varijacije koje se javljaju u geocentričnim položajima zvezda.

Razmotrimo prvo topocentrični početak. Njegovo kretanje je posledica Zemljinog dnevnog kretanja. Ono je promenljivo (po pravcu) i stoga je ubrzano. Zato se ova tačka ne može uzeti za početak inercijalnog koordinatnog sistema. To kretanje se prikazuje na dva načina: prvo, ono uključuje promenljivu komponentu u radijalnim brzinama i, drugo, javljaju se promene položaja usled paralakse i aberacije. Efekti aberacije i radijalne brzine zavise od brzine kretanja posmatrača izražene u delovima brzine svetlosti. Posmatračeva brzina će biti maksimalna na ekvatoru, gde brzina rotacije iznosi oko 0,465 km/s. S druge strane, paralaksa zavisi od rastojanja jednog koordinatnog početka od drugog—u ovom slučaju to pomeranje je reda veličine Zemljinog poluprečnika koji je $6{,}378 \cdot 10^3$ km. Efekt paralakse opada s porastom rastojanja do tela i zanemarljiv je za tela izvan Sunčevog sistema.

Slična razmatranja se primenjuju na geocentrični koordinatni početak. Zbog Zemljinog godišnjeg kretanja oko Sunca, ovaj koordinatni početak se takođe kreće ubrzano. Ovo ubrzanje izaziva godišnje promene u radijalnim brzinama, godišnju paralaksu i godišnju aberaciju. Brzina Zemlje na putanji je oko 30 km/s, što iznosi oko 10^{-4} brzine svetlosti. Rastojanje koje stvara efekt godišnje paralakse je reda veličine jedne astronomske jedinice (AJ). Merenja paralakse obezbeđuju ključ za određivanje rastojanja do zvezda.

Situacija je prilično različita kada se koordinatni početak stavi u središte Sunca. Iako je tačno da se Sunce kreće oko centra Galaksije, brzina tog kretanja je, u osnovi, konstantna. Ubrzanje tog kretanja a može se proceniti na sledeći način. Uzmimo da se Sunce kreće po krugu poluprečnika $r = 10^4$ parseka ($1\,\mathrm{pc} = 3{,}1 \cdot 10^{16}$ m) sa periodom $T = 2{,}5 \cdot 10^8$ godina. Tada, u SI jedinicama, imamo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 8{,}0 \cdot 10^{-16},$$

tako da je

$$a = r\omega^2 = 2{,}0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Ovo, vrlo malo ubrzanje, teško je detektovati bilo kojim merenjem položaja ili radijalnih brzina. Ta promena brzine iznosi manje od jednog metra po sekundi u toku jednog veka. U praksi se, zato, heliocentar smatra koordinatnim početkom inercijalnog koordinatnog sistema. Ipak, može se izvršiti jedna fina popravka. Sunčev sistem kao celina kreće se po inerciji kroz Galaksiju, a ne samo Sunce. Tačka koju treba usvojiti kao početak inercijalnog koordinatnog sistema je, stoga, baricentar (centar mase) Sunčevog sistema. Kada se uključe mase velikih planeta dobija se da je heliocentar pomeren od baricentra za promenljivi iznos, koji je reda veličine 10^6 km. Zato treba praviti razliku između *heliocentrične* i *baricentrične* nebeske sfere. Baricentrična nebeska sfera nepokretnog ekvatora i ekvinokcija može se koristiti kao inercijalni referentni sistem.

Razmotrimo sada položajni efekt koji nastaje transformacijom koordinata datih u odnosu na neki standardni početak C u koordinate u odnosu na posmatrača, bilo stvarnog bilo fiktivnog u tački O. Neka je vektor položaja tačke O (u odnosu na C) označen sa $\mathfrak{R}$ i neka je $\mathfrak{r}$ vektor položaja izvora koji se nalazi u tački S (sl. 3.2). Prividni pravac ka izvoru za posmatrača u tački O dat je vektorom $\mathfrak{r}'$, gde je

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{R}. \qquad (3.7)$$

Razlika pravaca dva vektora $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{r}'$ predstavlja efekt paralakse. Najčešće je intenzitet vektora $\mathfrak{R}$ vrlo mali u poređenju sa intenzitetima vektora položaja izvora. Tada je pogodno koristiti se približnim formulama (formule sa veličinama prvog reda). Tačna jednačina (3.7) je, međutim, toliko jednostavna da će približna formula teško predstavljati pojednostavljenje. Ipak, prednost ostaje u pogodnostima pri računanju, pre nego u jednostavnosti analitičkih izraza. Kako se naša pažnja prvenstveno odnosi na pravce, neka $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ i $\mathfrak{s}_0$ budu jedinični vektori pravaca $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ i $\mathfrak{R}$, redom, odnosno

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{r}' = r'\mathfrak{s}', \qquad \mathfrak{R} = R\mathfrak{s}_0. \tag{3.8}$$

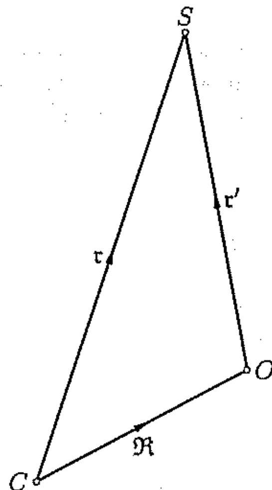
Tada jednačina (3.7) može biti napisana u obliku

$$r'\mathfrak{s}' = r\mathfrak{s} - R\mathfrak{s}_0. \tag{3.9}$$

Uzmimo vektorski proizvod ove jednačine sa vektorom $\mathfrak{s}$, dva puta, da bi dobili

$$\mathfrak{s}' - (\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}')\mathfrak{s} = \frac{R}{r'}\mathfrak{s}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}_0).$$

Sada, ako je $R \ll r$, paralaktičko pomeranje je malo. Tada možemo da pišemo $r \approx r'$ i $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}' = 1$. Poslednja jednačina daje približnu formulu



Слика 3.2

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' - \mathfrak{s} = \frac{R}{r}\mathfrak{s}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}_0). \tag{3.10}$$

Ovo je upravo oblik vektora pomeranja koji je razmatran u §1.7; ako se k identifikuje sa R/r, jednačina (3.10) je identična sa jednačinom (1.31). Zato formula izvedena u ovom paragrafu može biti primenjena na bilo koji mali paralaktički efekt. Međutim, ukoliko se ne mogu zanemariti efekti drugog i viših redova u R/r, najbolje je koristiti se originalnom vektorskom formulom (3.7), koja je tačna.

Na slici 3.2 tačke S i O predstavljaju izvor i posmatrača. Kako se i izvor i posmatrač kreću u odnosu na C, tačke S i O treba pažljivo definisati. Dalje ćemo smatrati da je tačka C nepokretna i da se O kreće brzinom $\mathfrak{V}$ u odnosu na ovu tačku. Pretpostavimo da je u trenutku t izvedeno posmatranje u pravcu O. Neka je τ vreme potrebno zračenju da od izvora stigne do posmatrača. Tada treba reći da na sl. 3.2 tačka O predstavlja posmatrača u trenutku t, a S položaj izvora u trenutku $(t-\tau)$. Jednačina (3.7) posle ovih pojašnjenja ostaje tačna, ali su efekti koji nastaju zbog kretanja izvora isključeni.

Linija SO sada predstavlja putanju posmatranih fotona, i to u koordinatnom sistemu sa centrom u C. Vektor $\mathfrak{s}'$, koji je razmatran ranije, predstavlja pravac izvora za fiktivnog *stacionarnog* posmatrača koji se nalazi u tački O. Stvarni posmatrač ima brzinu $\mathfrak{V}$ u odnosu na ovu tačku i kao rezultat prividni pravac izvora trpi aberaciono pomeranje. Prvo razmotrimo to sa klasičnog stanovišta.

Označimo intenzitet brzine fotona u referentnom sistemu C sa c. Tada, u tom referentnom sistemu fotoni imaju vektor brzine $-c\mathfrak{s}'$. Sam referentni sistem ima brzinu $-\mathfrak{V}$ u odnosu na posmatrača, tako da posmatrani fotoni imaju vektor brzine

$$\mathfrak{u} = -c\mathfrak{s}' - \mathfrak{V}. \tag{3.11}$$

Kako je ovo klasičan pristup, intenzitet u nije uvek jednak c, kao što bi trebalo da bude u relativističkom razmatranju. Stoga stavimo $\mathbf{u} = -c^*\mathbf{s}^*$ i $\mathfrak{V} = V\mathbf{n}$, gde su $\mathbf{s}^*$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori i gde vektor $\mathbf{n}$ daje posmatrani pravac ka izvoru. Tada iz (3.11) dobijamo

$$c^*\mathbf{s}^* = c\mathbf{s}' + V\mathbf{n}. \tag{3.12}$$

Ova jednačina je veoma slična jednačini (3.9) i može se razmatrati na isti način. Uzimajući vektorski proizvod dva puta sa $\mathbf{s}'$ i pretpostavljajući da je $V \ll c$, dobijamo približni rezultat

$$\mathbf{s}^* - \mathbf{s}' = -\frac{V}{c}\mathbf{s}' \times (\mathbf{s}' \times \mathbf{n}). \tag{3.13}$$

Ova formula je tačna samo do reda veličine V/c i, ponovimo još jednom, nju treba uporediti sa jednačinom (1.31), tako da se mogu koristiti formule §1.7.

Ukupan efekt u položaju usled pomeranja početka koordinatnog sistema iz tačke C u tačku O izveden je dodavanjem jednačina (3.10) i (3.13). Ovo dopušta tačnost prvog reda u R/r i V/c i to je savim dovoljno za mnoge potrebe. S ovom tačnošću $\mathbf{s}'$ može biti zamenjeno na desnoj strani jednačine (3.13) sa $\mathbf{s}$ dajući pri tome rezultat

$$\mathbf{s}^* - \mathbf{s} = \frac{R}{r}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0) - \frac{V}{c}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n}). \tag{3.14}$$

Da bi sumirali uvedene oznake, recimo da je $\mathbf{s}^*$ pravac posmatran sa O u trenutku t, dok je $\mathbf{s}$ geometrijski pravac ka izvoru sa tačke C u trenutku $t-\tau$. Pomeranje koordinatnog početka je $R\mathbf{s}_0$, a novi koordinatni početak ima brzinu $V\mathbf{n}$ u odnosu na C.

Pomeranja ovog tipa su razmatrana pri transformisanju topocentričnih u geocentrične koordinate u glavi 4 i geocentričnih u heliocentrične u glavi 8. Tamo gde se zahteva veća tačnost u paralaktičkom pomeranju, to se jednostavno postiže direktnim korišćenjem jednačine (3.7). Ako je veća tačnost potrebna u aberacionom pomeranju, moraju se koristiti metode specijalne teorije relativnosti.

§ 3.4. Odabrani pregled specijalne teorije relativnosti.

Pri razmatranju aberacije sa klasičnog stanovišta, prisilno smo imali da se brzina svetlosti menja sa referentnim sistemom. Ovo je u suprotnosti sa polaznim principom specijalne teorije relativnosti, po kome je brzina svetlosti univerzalna konstanta, nezavisna od posmatrača. Ovaj princip zahteva takvo međupovezivanje prostornih i vremenske koordinate, da se vreme uzima za četvrtu dimenziju. Dok se u Njutnovoj fizici, prostor može smatrati relativnim ali je vreme apsolutno, u specijalnoj relativnosti i prostor i vreme imaju relativnu prirodu i zavise od referentnog sistema ili, što je ekvivalentno, posebnog posmatrača.

Na taj način, prihvaćena je četvorodimenziona mnogostrukost tačaka, na kojoj svakoj tački odgovarju tri prostorne i jedna vremenska koordinata. Tačka predstavlja *događaj* jer njene koordinate određuju tačku u prostoru i trenutak vremena. Na primer, posmatranje je događaj čija vremenska koordinata daje trenutak kada se posmatranje dogodilo, a prostorne koordinate daju položaj posmatrača u tom trenutku. Koordinatni sistem se, naravno može i promeniti jer su različiti koordinatni sistemi prirodnije pridruženi različitim posmatračima. Kada se ove transformacije izvode, vremenska koordinata se menja formalno isto kao i prostorne koordi-

nate. Vremenska razlika između događaja nije invarijantna (menja se pri transformacijama). Veličina koja se ne menja je *interval* između dva događaja, koji se definiše na sledeći način.

Razmotrimo dva susedna događaja sa koordinatama (x, y, z, t) i $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z, t + \mathrm{d}t)$. Element intervala između ova dva događaja označavaćemo sa $\mathrm{d}s$ i on je dat *metrikom*. U specijalnoj relativnosti, koja opisuje prostor-vreme bez gravitacije, metrika ima formu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{3.15}$$

Ova, vrlo jednostavna, forma metrike javlja se samo kada je referentni sistem u odnosu na koji se ona odnosi inercijalan. U ovoj formi x, y i z su pravougle koordinate, a t je vreme koje meri bilo koji posmatrač koji miruje u odnosu na taj koordinatni sistem. Ako koordinatni sistem nije inercijalan, metrika ima mnogo komplikovaniju formu. Na primer, pretpostavimo da je (x, y, z, t) inercijalni koordinatni sistem, a da je (x', y', z', t') koordinatni sistem koji rotira stalnom ugaonom brzinom ω oko ose z. Dva koordinatna sistema su povezana transformacijom

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t', \\ y &= x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Diferenciranjem i zamenom u jednačinu (3.15) dobijamo metriku u novom koordinatnom sistemu, posle malih pojednostavljenja, kao

$$\mathrm{d}s^2 = \left[1 - (x'^2 + y'^2)\frac{\omega^2}{c^2}\right]\mathrm{d}t'^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2) + \frac{2\omega y'}{c^2}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t' - \frac{2\omega x'}{c^2}\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}t' \tag{3.17}$$

Dodatni članovi u ovoj formi izazivaju takozvane fiktivne sile—centrifugalnu silu i Koriolisovu silu—koje se javljaju u obrtnim referentnim sistemima. U specijalnoj relativnosti uobičajeno je da se radi isključivo u inercijalnim koordinatnim sistemima, ali to je stvar dogovora a ne i neophodnosti.

Element intervala $\mathrm{d}s$ između dva susedna događaja definisan je metrikom i invarijantan je u odnosu na koordinatne transformacije. Za ovaj interval kaže se da je *vremenskog* odnosno *prostornog* tipa ako je $\mathrm{d}s$ imaginaran ili realan broj, respektivno. Ako je $\mathrm{d}s^2 = 0$ za elemenat intervala se kaže da je *nulti*.

Interval između nesusednih događaja ne može se definisati jednoznačno. Pretpostavimo da su E_1 i E_2 dva takva događaja; oni su predstavljeni dvema tačkama u četvorodimenzionom prostor-vremenu. Neka je Γ otvorena kriva u prostor-vremenu koja prolazi kroz E_1 i E_2. Tada interval s *duž ove krive* može biti izveden integraljenjem elementarnog intervala $\mathrm{d}s$ duž te krive, pri čemu je $\mathrm{d}s$ izveden iz metrike. Tada je

$$s = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}s. \tag{3.18}$$

Ovaj inteval zavisi od puta—njegova vrednost zavisi od izbora krive Γ. U opštem slučaju, s će biti kompleksan broj, jer delovi krive mogu biti prostornog, vremenskog ili čak nultog tipa. Međutim, interval između E_1 i E_2 ipak može biti definisan
❈ jedinstveno ako se Γ izabere da bude *geodezijska* linija koja prolazi kroz te dve tačke. Ovo je kriva za koju interval s u jednačini (3.18) ima *stacionarnu* vrednost—koja ne mora da bude, i u stvari, i nije minimalna vrednost. Može se pokazati da je svaka geodezijska linija, prostornog ili vremenskog ili nultog tipa duž cele svoje dužine. Tako da svaka dva događaja povezana geodezijskom linijom, koja je jedinstveno definisana kriva, nedvosmisleno određuju interval koji je ili prostornog ili vremenskog ili nultog tipa, u zavisnosti od toga da li je interval imaginaran, realan ili nulti.

Kriva u četiri dimenzije, bilo da je geodezijska ili ne, je jednoparametarska familija tačaka, koja se može predstaviti sa

$$x = x(p), \qquad y = y(p), \qquad z = z(p), \qquad t = t(p). \tag{3.19}$$

Parametar p se može izabrati na mnogo načina. Posebno, ako je kriva vremenskog tipa, za parametar se može uzeti interval s koji se meri duž te krive od izabrane stalne tačke. Ovaj izbor je moguć, ali je nepodesan za prostornu krivu, zato što je s u tom slučaju imaginaran broj; ovaj izbor nije moguć ako je kriva nultog tipa. Sada kriva predstavlja niz događaja. Ako su događaji upravo oni koji su vezani za
❈ određeno telo, ta kriva se zove *svetska linija*. Pretpostavimo da telo ima brzinu $\mathfrak{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Tada, kako je $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, itd., možemo pisati da je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma v_x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma v_y, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma v_z, \quad \text{gde je} \quad \gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{3.20}$$

Poslednji rezultat sledi iz metrike (3.15).

Za materijalno telo, imamo da je $v < c$ tako da je γ realno—u stvari $\gamma > 1$. Kako je vremenska koordinata realna, sledi da je $\mathrm{d}s$ realno. Svetska linija tela je vremenskog tipa, a s se može usvojiti za parametar krive. Pretpostavimo dalje da se telo kreće slobodno i da na njega ne deluju nikakve spoljne sile. Tada prema prvom Njutnovom zakonu v_x, v_y, v_z, pa stoga i γ, predstavljaju konstante u toku kretanja. Algebarski svetska linija ima tada linearni oblik u četiri dimenzije. Jer, ako je (x_0, y_0, z_0, t_0) bilo koji događaj na svetskoj liniji i ako je s interval meren od tog događaja, tada integracija jednačina (3.20) daje

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \gamma v_x s, \\ y &= y_0 + \gamma v_y s, \\ z &= z_0 + \gamma v_z s, \\ t &= t_0 + \gamma s. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Svetska linija slobodne čestice može biti opisana kao prava linija u četiri dimenzije. Još preciznije, ona predstavlja geodezijsku liniju. Opšti oblik diferencijalne jednačine geodezijske linije dat je jednačinom (3.36). Za jednostavnu metričku formu (3.15) ove diferencijalne jednačine svode se na

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2} = 0. \tag{3.22}$$

Dve integracije jednačina (3.22) daju parametarsko rešenje (3.21) koje je već ustanovljeno. Jednostavan, linearan oblik metrike je osobina inercijalnog koordinatnog sistema. Za neinercijalne koordinatne sisteme, geodezijske linije će imati komplikovanije oblike. Kako su geodezijske linije invarijantne krive, one, međutim, čak i u neinercijalnim koordinatnim sistemima predstavljaju svetske linije slobodnih čestica. Ovo delimično ilustruje *geodezijski princip* koji se može iskazati na sledeći način: *Svetske linije slobodnih čestica su vremenske geodezijske linije*. Dalje, kao proširenje, imamo da su svetske linije fotona nulte geodezijske linije. Ovaj princip važi i u opštoj teoriji relativnosti.

Geodezijski princip se može smatrati i proširenjem prvog Njutnovog zakona—zakona inercije. Uvek kada metrika ima jednostavan oblik (3.15) odgovarajuća geodezijska linija ima oblik (3.21). U takvom koordinatnom sistemu slobodna čestica kreće se po pravoj liniji sa stalnom brzinom. Takav koordinatni sistem zove se inercijalni koordinatni sistem. Tako, pri transformaciji iz jednog inercijalnog koordinatnog sistema u drugi, oblik metrike mora ostati nepromenjen. Transformacija ovoga tipa zove se *opšta Lorencova tranformacija*. Ona je kombinacija tri jednostavnije transformacije, naime (i) translacije koordinatnog početka, (ii) rotacije prostornih koordinatnih osa i (iii) vremenske transformacije. Razmotrimo ove transformacije po redu.

(i) Translacija koordinatnog početka u novu tačku, na primer (x_0, y_0, z_0, t_0), ne utiče na diferencijale. Metrika ostaje nepromenjena.

(ii) Jednostavna rotacija ne utiče uopšte na vremensku koordinatu. Prostorni deo metrike odgovara trodimenzionoj Euklidskoj geometriji; ova geometrija se ne menja pri rotaciji osa. Tako je metrika kao celina nepromenjena.

(iii) Vremenska transformacija održava početak prostor-vremena, ali *prostorni* početak se kreće stalnom brzinom u odnosu na početni koordinatni sistem. Za vremensku transformaciju u pravcu x-ose sa brzinom V, jednačine koordinatne transformacije su

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \beta(x - Vt), \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ \bar{t} &= \beta(t - Vx/c^2), \end{aligned} \tag{3.23}$$

gde je

$$\beta = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}.$$

Lako se proverava da kao rezultat ove transformacije imamo traženu jednakost

$$d\bar{t}^2 - \frac{1}{c^2}\left(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2\right) = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \tag{3.24}$$

Inverzna transformacija se dobija stavljanjem $-V$ umesto V, tj. lako se pokazuje da je

$$\begin{aligned} x &= \beta(\bar{x} + V\bar{t}), \\ y &= \bar{y}, \\ z &= \bar{z}, \\ t &= \beta(\bar{t} + V\bar{x}/c^2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

O transformacijama (3.23) i (3.25) često se govori kao o Lorencovim transformacijama. Za naše sadašnje potrebe o njima bolje je govoriti kao o vremenskim transformacijama u pravcu x-ose. Uopštena Lorencova transformacija je, kao što je već naglašeno, kombinacija ranije navedenih transformacija (i), (ii), (iii).

Kao primer razmotrimo translaciju u nov koordinatni početak (X, Y, Z, T) praćenu vremenskom transformacijom $\mathfrak{V} = (V_x, V_y, V_z)$, u pravcu koji nije u pravcu ni jedne koordinatne ose. Prvo, ose moraju biti rotirane tako da x-osa bude u pravcu $\mathfrak{V}$, tada se primenjuje transformacija (3.23) i konačno ose moraju biti rotirane unazad za isti ugao. Rezultujuće jednačine transformacije se komplikuju ali jednačina (3.24) ostaje da važi. U stvari, posle priličnog svođenja (vidi probleme 3.7 i 3.8 na kraju ove glave) ove transformacione jednačine postaju

$$\left.\begin{aligned}
x^* &= \left(1 + \frac{\beta^2 V_x^2}{(\beta+1)c^2}\right)(x - X) + \frac{\beta^2 V_x V_y}{(\beta+1)c^2}(y - Y)\\
&\quad + \frac{\beta^2 V_x V_z}{(\beta+1)c^2}(z - Z) - \beta V_x (t - T),\\
y^* &= \frac{\beta^2 V_y V_x}{(\beta+1)c^2}(x - X) + \left(1 + \frac{\beta^2 V_y^2}{(\beta+1)c^2}\right)(y - Y)\\
&\quad + \frac{\beta^2 V_y V_z}{(\beta+1)c^2}(z - Z) - \beta V_y (t - T),\\
z^* &= \frac{\beta^2 V_z V_x}{(\beta+1)c^2}(x - X) + \frac{\beta^2 V_z V_y}{(\beta+1)c^2}(y - Y)\\
&\quad + \left(1 + \frac{\beta^2 V_z^2}{(\beta+1)c^2}\right)(z - Z) - \beta V_z (t - T),\\
t^* &= -\frac{\beta V_x}{c^2}(x - X) - \frac{\beta V_y}{c^2}(y - Y) - \frac{\beta V_z}{c^2}(z - Z) + \beta(t - T).
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Transformacije ovog tipa su važne u položajnoj astronomiji pri određivanju aberacionog pomeranja, usled promene početka koordinatnog sistema, koje su razmotrene u prethodnom paragrafu.

Pretpostavimo, kao pre, da je C prostorni početak inercijalnog referentnog sistema (x, y, z, t) Možemo ga smatrati baricentričnim koordinatnim početkom. Posmatrač O načini posmatranje (sl. 3.3) u trenutku $t = T$, kada se nalazio u tački sa vektorom položaja $\mathfrak{R} = (X, Y, Z)$. Tada je posmatranje događaj (X, Y, Z, T). Neka je posmatračeva brzina u trenutku posmatranja bila $\mathfrak{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Tada je koordinatni sistem (x^*, y^*, z^*, t^*), definisan jednačinama (3.26), inercijalni koordinatni sistem u tački O u trenutku T, koji se kreće stalnom brzinom. Možemo ga nazvati O-koordinatni sistem. Dalje, samo posmatranje je sada početak prostor-vremena u novom koordinatnom sistemu.

Neka posmatrani fotoni imaju brzinu $\mathfrak{v} = (v_x, v_y, v_z)$ u početnom koordinatnom sistemu. Kada je jednom popravljen za paralaksu, vektor $\mathfrak{v}$ daje pravac ka izvoru u C-ovom koordinatnom sistemu. Popravka za paralaksu sledi iz jednačine (3.7) i nisu

obračunati efekti specijalne teorije relativnosti. Klasičan pristup je egzaktan. Neka je brzina fotona u početnom koordinatnom sistemu $\mathfrak{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Ovo odgovara prividnom pravcu izvora i razlika između vektora brzina je u osnovi aberaciono pomeranje.

Sada, korišćenjem t koordinate kao parametra, svetske linije fotona dobijaju oblik

$$\begin{aligned} x &= X + v_x(t-T), \\ y &= Y + v_y(t-T), \\ z &= Z + v_z(t-T). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ove jednačine važe u C-ovom koordinatnom sistemu, a imamo

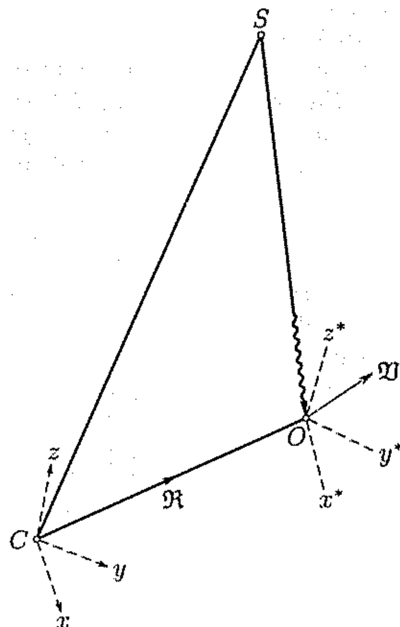
$$\mathfrak{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \tag{3.28}$$

Kako je svetska linija nulta geodezijska linija, to iz metrike sledi da je $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$. U O-ovom koordinatnom sistemu jednačine svetskih linija postaju

$$\begin{aligned} x^* &= u_x t^*, \\ y^* &= u_y t^*, \\ z^* &= u_z t^*. \end{aligned} \tag{3.29}$$

i

$$\mathfrak{u} = \left(\frac{dx^*}{dt^*}, \frac{dy^*}{dt^*}, \frac{dz^*}{dt^*}\right). \tag{3.30}$$



Слика 3.3

Tada nepromenjena forma metrike dovodi do nepromenjene brzine fotona—vidi jednačinu (3.24). Pojedinačne komponente ove brzine su, međutim, promenjene i te promene su određene koordinatnom transformacijom.

Ovo se može izvesti na sledeći način: zamenimo x, y i z iz jednačine (3.27) u jednačinu (3.26); dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \left[v_x + \frac{\beta^2 V_x}{(\beta+1)c^2}(v_x V_x + v_y V_y + v_z V_z) - \beta V_x\right](t-T), \\ y^* &= \left[v_y + \frac{\beta^2 V_y}{(\beta+1)c^2}(v_x V_x + v_y V_y + v_z V_z) - \beta V_y\right](t-T), \\ z^* &= \left[v_z + \frac{\beta^2 V_z}{(\beta+1)c^2}(v_x V_x + v_y V_y + v_z V_z) - \beta V_z\right](t-T), \\ t^* &= \beta\left[1 - \frac{(v_x V_x + v_y V_y + v_z V_z)}{c^2}\right](t-T). \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

Poslednja od ovih jednačina može se iskoristiti za eliminaciju $(t-T)$ iz ostale tri. Upoređujući ovaj rezultat sa (3.29) dobijamo (u_x, u_y, u_z). U vektorskom obliku ovaj rezultat je:

$$\mathfrak{u}=\left(1-\frac{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{V}}{c^2}\right)^{-1}\left[\frac{\mathfrak{v}}{\beta}-\mathfrak{V}+\frac{\beta\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{V}}{(\beta+1)c^2}\mathfrak{V}\right]. \tag{3.32}$$

Ova formula pokazuje kako se transformiše brzina pri uopštenoj Lorencovoj transformaciji. Ona se može primeniti na brzinu materijalne čestice kao i fotona. Za proveru, čitalac može kvadriranjem jednačine (3.32), da pokaže da kada $\mathfrak{v}$ ima intenzitet c, tada i $\mathfrak{u}$ ima isti intenzitet.

Napišimo jednačinu (3.32) izraženu preko jediničnih vektora, tako da bi redovi veličine bili jasni. Stavimo da je $\mathfrak{v}=-c\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{u}=-c\mathfrak{s}^*$ i $\mathfrak{V}=V\mathfrak{n}$, gde su $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}^*$ i $\mathfrak{n}$ jedinični vektori. Tada se jednačina (3.32) može napisati u obliku

$$\mathfrak{s}^*=\left(1+\frac{V}{c}\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n}\right)^{-1}\left[\frac{\mathfrak{s}'}{\beta}+\frac{V}{c}\mathfrak{n}+\frac{\beta V^2(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})}{(\beta+1)c^2}\mathfrak{n}\right]. \tag{3.33}$$

Ova formula daje tačan efekt aberacije prema specijalnoj teoriji relativnosti. Vektor $\mathfrak{s}^*$ daje posmatrani položaj izvora, a $\mathfrak{s}'$ pravac ka izvoru za posmatrača koji se trenutno poklapa sa O, ali se nalazi u stanju mirovanja u odnosu na C-ov koordinatni sistem. To nije pravac ka izvoru kako se vidi sa C, jer nije uključen efekt paralakse. Oznake odgovaraju onim koje se koriste i u klasičnom prilazu datom ranije [vidi jednačinu (3.12)]. Do prvog reda u (V/c) i klasični i pristup specijalne relativnosti daju isti rezultat. Zaista, formula prvog reda (3.13) može se ponovo izvesti uzimanjem vektorskog proizvoda jednačine (3.33) dva puta sa vektorom $\mathfrak{s}'$ i zanemarivanjem članova višeg reda. Dobija se

$$\mathfrak{s}^*-\mathfrak{s}'=-\frac{V}{c}\mathfrak{s}'\times(\mathfrak{s}'\times\mathfrak{n}). \tag{3.13}$$

Kao što je ranije pomenuto, poslednja formula je dovoljno tačna za veliki broj slučajeva, ali ne za sve. Međutim, nema slučaja kada treba uključiti članove reda višeg od drugog. Stoga je uobičajeno razviti (3.33) po binomnoj teoremi, da bi izveli

$$\mathfrak{s}^*=\left[1-\frac{V}{c}(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})+\frac{V^2}{c^2}(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})^2\cdots\right]\left[\frac{\mathfrak{s}'}{\beta}+\frac{V}{c}\mathfrak{n}+\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)\frac{V^2}{c^2}(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})\mathfrak{n}\right].$$

Veličina β mora, takođe, biti izražena preko stepenog reda po V/c, dajući

$$\beta=1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\cdots$$

Posle pojednostavljenja nalazimo formulu drugog reda

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{s}'-\frac{V}{c}\mathfrak{s}'\times(\mathfrak{s}'\times\mathfrak{n})+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\left\{[2(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})^2-1]\mathfrak{s}'-(\mathfrak{s}'\cdot\mathfrak{n})\mathfrak{n}\right\}. \tag{3.34}$$

Ovaj stepen tačnosti zahteva se samo za redukcije najpreciznijih posmatranja u položajnoj astronomiji. Međutim, kada imamo takav slučaj, javlja se drugi efekt istog reda veličine koji treba razmotriti, a koji se zasniva na opštoj teoriji relativnosti. Radi se o gravitacionom savijanju svetlosti—(savijanje putanje fotona). Savijanje utiče da figura CSO (sl. 3.3) ne može više biti posmatrana kao ravan trougao, zato što sam prostor više nije Euklidski. Korišćenje trodimenzionih vektora je tada pod sumnjom, i njih treba smatrati samo pogodnim načinom označavanja. Osnovni argumenti moraju se formulisati preko četvorodimenzionih vektora, kao što će biti objašnjeno u sledećem paragrafu.

§ **3.5. Opšta relativnost.** Za prostor-vreme u specijalnoj teoriji relativnosti rekli smo da je *ravan* Njegove geometrijske osobine, koje su potpuno određene metrikom, predstavljaju proširenje do četiri dimenzije obične Euklidske geometrije. Činjenica da je prostor ravan otkriva nam se kroz geodezijske linije, koje se mogu smatrati pravim linijama u četiri dimenzije. Ovo je posledica jednostavnog oblika metrike (3.15), u kome su koeficijenti uz kvadrate diferencijala konstante. To je tačno samo u inercijalnim sistemima referencije i ta činjenica pokazuje važnost i korisnost takvih referentnih sistema.

U opštoj teoriji relativnosti uključeni su efekti gravitacije. Posledično, prostor--vreme ima krivinu, i metrika ne može biti predstavljena u jednostavnom obliku (3.15). To znači da u prisustvu gravitacije ne postoji ni jedan inercijalni koordinatni sistem; ni jedan nema specijalni status. Stoga je Ajnštajn (EINSTEIN) formulisao princip kovarijantnosti, koji kaže da zakoni fizike moraju biti izraženi na isti način u *svim* koordinatnim sistemima. Tehnički, ovo je moguće samo ako se koristi tenzorski račun. Čitalac koji nije upoznat sa tenzorskim računom savetuje se, pre nastavka sa čitanjem ovog paragrafa, da pročita prilog A, gde su izložene i objašnjene osnovne osobenosti tenzorskog računa. Izvan domena ove knjige je da se dâ potpuno izlaganje opšte teorije relativnosti. Mi smo samo zainteresovani za njen uticaj na interpretaciju položajnih posmatranja. Nema potrebe da detaljno razmatramo kako je geometrija prostor-vremena povezana sa rasporedom gravitacionog materijala. To je izraženo preko Ajnštajnovih jednačina polja, koje, za uzvrat, definišu metriku. Propustićemo sva razmatranja ovih jednačina i uzeti metriku kao polaznu tačku.

Kao i ranije, prostor-vreme predstavlja četvorodimenzionu mnogostrukost tačaka. Svaka tačka predstavlja događaj, koji je dat sa četiri realne koordinate x^λ, $(\lambda = 1, \dots, 4)$. Dalje pojavljivanje indeksa značiće da on može uzimati bilo koju od ovih vrednosti. Koordinatni sistem može biti proizvoljan. Pojedinačne koordinate mogu biti ugaone koordinate, ili imati prostorne ili vremenske dimenzije ili, čak i, kombinacije ovih. Koordinate tačke treba smatrati samo oznakama koje identifikuju pojedine događaje. Geometrija prostor-vremena određena je metrikom, koja ima opšti Rimanski oblik

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \qquad (3.35)$$

Ovde se koristi označavanje nemog indeksa, a ponovljeni indeksi μ i ν znače dvostruku sumu, gde indeksi uzimaju vrednosti $1, \dots, 4$ nezavisno jedan od drugog. Sada je $g_{\mu\nu}$ kovarijantni tenzor reda dva, koji se zove još i metrički tenzor. Kako diferencijali dx^μ predstavljaju komponente kontravarijantnog vektora, jednačina (3.35) pokazuje da je ds^2 skalarna veličina, po vrednosti nezavisna od koordinatnog sistema.

Geodezijske linije su linije $x^\lambda = x^\lambda(p)$ koje zadovoljavaju geodezijsku diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dp}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0. \qquad (3.36)$$

Ove jednačine omogućavaju da se odrede geodezijske linije kada je metrika jednom poznata. Kao i ranije, geodezijske linije mogu biti prostornog, vremenskog i nultog tipa. Dalje, ponovo se može primeniti geodezijski princip, da su (i) svetske linije slobodne čestice vremenske geodezijske linije, (ii) svetske linije fotona su nulte geodezijske linije. Treba još razumeti pojam „slobodna čestica" kao česticu na ko-

ju ne deluju nikakve spoljne sile, nego se kreće samo pod dejstvom gravitacije. To je stoga što gravitaciju smatramo sada osobinom prostor-vremena, a ne spoljnom silom. Parametar krive p koji se javlja u jednačini (3.36) nije proizvoljno izabran, već mora biti „afini parametar“. Za vremensku geodezijsku liniju ovaj parametar može biti interval s meren od proizvoljnog položaja na geodezijskoj liniji.

Razmotrimo sada vremensku krivu, moguće, ali ne i neophodno geodezijsku liniju, izraženu u obliku $x^\lambda = x^\lambda(s)$. Neka je q^λ kontravarijantni vektor definisan sa

$$q^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds} \tag{3.37}$$

u svakoj tački te krive. Ovo je *jedinični tangentni vektor* na krivoj. On je jedinični jer je

$$q_\mu q^\mu = g_{\mu\nu} q^\nu q^\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1. \tag{3.38}$$

S druge strane, ako je $x^\lambda = x^\lambda(p)$ nulta kriva, tangentni vektor, recimo u^λ, može biti definisan slično, ali on nije jedinični vektor. Kada pišemo

$$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dp}, \tag{3.39}$$

sledi da je

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = 0. \tag{3.40}$$

Nulti vektor kao što je u^λ je, u stvari, normalan na samog sebe.

Pretpostavimo sada da imamo niz položajnih posmatranja načinjenih od jednog posmatrača u različitim trenucima. Svako posmatranje je događaj koji se nalazi na posmatračevoj svetskoj liniji, koja je obično vremenska geodezijska linija—svakako je kriva vremenskog tipa. Kako koordinate predstavljaju samo oznake, sva posmatračka svojstva moraju biti izražena u invarijantnom obliku. Razmotrimo prvo vremenski interval između dva posmatranja onako kako ga meri posmatrač. On može biti poistovećen sa intervalom s između ta dva događaja na posmatračevoj svetskoj liniji. Ovim je data zadovoljavajuća, invarijantna definicija vremena.

Definicija posmatranog pravca ka izvoru u opštoj teoriji relativnosti je mnogo komplikovanija. Obično je data preko tri kosinusa pravca, odnosno preko uglova koje zaklapa pravac brzine fotona sa koordinatnim osama. Sam foton je predstavljen nultom geodezijskom linijom, ali identifikacija koordinatnih osa nije odmah očigledna. U ovom trenutku korisno je poređenje sa specijalnom teorijom relativnosti. Razmotrimo koordinatni sistem inercijalnog posmatrača (x, y, z, t). Posmatračeva svetska linija je t-osa i njen tangentni vektor ima komponente $(0, 0, 0, 1)$. Videli smo da su vektori u pravcu koordinatnih linija normalni na posmatračevu svetsku liniju. Ova činjenica se koristi pri formulisanju invarijantne definicije posmatranog pravca ka izvoru u opštoj teoriji relativnosti.

Razmotrimo sada posmatranje koje odgovara događaju O. Neka je q^λ jedinični tangentni vektor na posmatračevu svetsku liniju u ovoj tački i neka je u^λ tangentni vektor, ponovo u tački O, na nultu geodezijsku liniju koja predstavlja posmatrane fotone. Posmatračeve koordinatne ose su predstavljene prostornim jediničnim vek-

torima u O, i^λ, j^λ, k^λ, na primer. Ovi vektori moraju biti međusobno normalni i svaki mora biti ortogonalan na q^λ, odnosno, formalno,

$$\begin{aligned} i^\lambda i_\lambda = j^\lambda j_\lambda = k^\lambda k_\lambda = -1, \\ i^\lambda j_\lambda = j^\lambda k_\lambda = k^\lambda i_\lambda = 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

i

$$i^\lambda q_\lambda = j^\lambda q_\lambda = k^\lambda q_\lambda = 0 \tag{3.42}$$

Nulti vektor u^λ može se razložiti na komponentu paralelnu sa q^λ i komponentu normalnu na taj vektor. Ovo znači da je

$$u^\lambda = \alpha q^\lambda + \beta e^\lambda, \tag{3.43}$$

gde je e^λ prostorni vektor i $e^\lambda q_\lambda = 0$. Kako je u^λ nulti vektor, iz (3.40) sledi da je

$$\alpha = \beta = u^\lambda q_\lambda. \tag{3.44}$$

Sada jedinični vektor e^λ određuje pravac ka izvoru onako kako ga vidi posmatrač. U stvari, i kosinusi pravca ka izvoru (l, m, n) dati su kao unutrašnji proizvodi e^λ sa svakim od tri jedinična vektora i^λ, j^λ, k^λ. Iz jednačina (3.43), (3.42) i (3.44) tada se izvodi

$$l = \frac{(u^\lambda i_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}, \qquad m = \frac{(u^\lambda j_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}, \qquad n = \frac{(u^\lambda k_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}. \tag{3.45}$$

Uslovi (3.41) i (3.42) su dovoljni da vektori i^λ, j^λ, k^λ predstavljaju potpun skup uzajamno normalnih osa za posmatrača, ali ne i da su te ose postavljene u željenim pravcima. Rešenje ovog problema je najbolje razmotreno u posebnom prostor-vremenu koje predstavlja gravitaciono polje Sunca.

Švarcšildovo (SCHWARZSCHILD) *prostor-vreme* je sferno simetrično i ima tačkasti singularitet. Kao što je naglašeno, ono opisuje gravitaciono polje oko tačkaste mase M, ili spoljnje polje za sferno simetrično telo te mase. Pogodno je staviti da je $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$. Tada je najjednostavniji oblik metrike Švarcšildovog prostor-vremena dat sa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right], \tag{3.46}$$

gde je

$$m = \frac{GM}{c^2}, \tag{3.47}$$

a G je Njutnova gravitaciona konstanta. Veličina m ima dimenziju dužine, i ako se Sunčeva masa zameni umesto M u (3.47) nalazimo da je $m \approx 1{,}5\,\text{km}$.

Ova se metrika može uporediti sa metrikom specijalne teorije relativnosti izraženom u sfernim koordinatama. Primenjujući transformaciju

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \qquad y = r \sin\theta \sin\phi, \qquad z = r\cos\theta, \tag{3.48}$$

na metriku (3.15) dobijamo

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{3.49}$$

Sličnost ove jednačine i jednačine (3.46) je očigledna. Dalje, Švarcšildova metrika se primenjuje pri vrednostima radijalne koordinate reda veličina 1 AJ, tako da je $m \ll r$. Ovo znači da su razlike između dve metrike vrlo male. Dalje, najveći broj problema u gravitacionoj dinamici Sunčevog sistema može se adekvatno razmatrati korišćenjem samo Njutnove teorije. Ovo je tačno, posebno za planetske poremećaje—jedini značajan efekt sa potpuno opšte relativističkim poreklom dolazi od Sunca. Švarcšildova metrika (3.46) kojom se uključuje samo gravitacioni uticaj centralnog tela u Sunčevom sistemu, je, u ovim okolnostima, zadovoljavajuća.

Planete su tela koja se slobodno kreću u gravitacionom polju Sunca. Njutnova teorija gravitacije predviđa Keplerove eliptične putanje koje su nepokretne u prostoru. Svetske linije planeta će u opštoj teoriji relativnosti biti geodezijske linije vremenskog tipa. One se mogu izvesti iz jednačina (3.36), korišćenjem komponenata metričkog tenzora koje su date u samoj metrici (3.46). Ovaj postupak biće sproveden do kraja u glavi 6. Ustanovljeno je da se planetske putanje mogu najbolje opisati kao elipse koje se lagano obrću u svojim putanjskim ravnima. Efekt je najveći za planetu Merkur, za koju to iznosi skoro $0'',5$ godišnje. Iz posmatranja položaja Merkura otkriven je ovaj efekt, preko 50 godina pre nego što je Ajnštajn formulisao opštu teoriju relativnosti i objasnio ga.

Drugi efekt koji ima poreklo u opštoj teoriji relativnosti i koji je važan za položajnu astronomiju je savijanje svetlosti. Ovo se može proučiti ispitivanjem nultih geodezijskih linija (3.46). To su krive, a ne prave linije, koje su savijene gravitacionim uticajem Sunca. One su malo ispupčene ka Suncu. Ukupno gravitaciono savijanje, izraženo u radijanima, je reda m/r, gde je r najkraće rastojanje putanje svetlosti do Sunca. Ovaj efekt koji je predvideo sam Ajnštajn 1915. godine, potvrđen je posmatranjima četiri godine kasnije u toku Sunčevog pomračenja. U toku totalnog pomračenja mogu se videti zvezde iz same okoline Sunca i svetlost ovih zvezda prolazi na rastojanju od nekoliko Sunčevih poluprečnika od centra Sunca. Tada je veličina m/r reda jedne lučne sekunde. Efekt je obilato potvrđen i položajnim posmatranjima radio izvora koji leže blizu ekliptike. U odgovarajućem trenutku u toku godine ovi izvori će se naći u okolini Sunca, a dnevna posmatranja radio izvora ne predstavljaju velike poteškoće.

Do nedavno, gravitaciono savijanje svetlosti se smatralo efektom koji se može otkriti položajnim posmatranjima izvora u bliskoj okolini Sunca, i kao takvo bilo je važnim testom opšte teorije relativnosti. Efekt se nije prihvatao pod opštijim okolnostima. Vrlo visoka astrometrijska tačnost koja se sada može postići čini ovo neprihvatanje neopravdanim. Za bilo koje posmatranje sa Zemlje minimalno rastojanje putanje zraka ne može da pređe jednu AJ, a odnos m/r za to rastojanje odgovara uglu od $0'',002$. Taj efekt je istog red veličine kao i član drugog reda zbog uticaja godišnje aberacije. To, međutim, nije koincidencija. Iz Njutnove gravitacione teorije sledi (vidi glavu 6) da je brzina tela koje se kreće po kružnoj putanji poluprečnika a oko Sunca data sa $V^2 = GM/a$. Sledi da za bilo koje posmatranje sa Zemlje imamo

$$\frac{m}{r} \gtrsim \frac{V^2}{c^2}. \tag{3.50}$$

Stoga se, za gravitaciono savijanje svetlosti, očekuje da bude veliko barem kao aberacioni član drugog reda.

§ 3.6. Razmatranje paralakse, aberacije i savijanja svetlosti sa stanovišta opšte teorije relativnosti. Tri položajna efekta, godišnja paralaksa, godišnja aberacija i savijanje svetlosti obično se posmatraju odvojeno. Ovo je sigurno opravdano ako su ti efekti dovoljno mali, što je obično razumna pretpostavka. Paralaksa se tada posmatra sa klasičnog stanovišta, aberacija sa aspekta specijalne teorije relativnosti, dok samo savijanje svetlosti zahteva formulaciju u okviru opšte teorije relativnosti. I dok to može biti praktičan postupak, njegovo teorijsko opravdanje zavisi od postojanja zadovoljavajuće sinteze ova tri efekta u okviru opšte teorije relativnosti.

Problem je u povezivanju heliocentričnog položaja izvora sa položajem koji je opazio zamišljeni geocentrični posmatrač. Iako se ovaj problem može formulisati u proizvoljnom koordinatnom sistemu, znatno je pogodnije formulisati ga u nekom posebnom koordinatnom sistemu koji je jednostavno povezan sa Dekartovim koordinatama i kosinusima pravca. Švarcšildovu metriku (3.46) transformišimo u nove koordinate (r', θ', ϕ', t'), gde je

$$r = r'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m}{r'}\right)^2, \qquad \theta = \theta', \qquad \phi = \phi', \qquad t = t'. \tag{3.51}$$

Posle primene ove transformacije dobijamo takozvanu izotropnu formu metrike koja, ako izostavimo primove, ima oblik

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \dfrac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{m}{2r}\right)^2}\,dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\phi^2\right). \tag{3.52}$$

Poslednja zagrada na desnoj strani ove jednačine predstavlja metriku u Euklidskom trodimenzionom prostoru izraženu u sfernim koordinatama. Sada je moguće, formalno, izvršiti transformaciju u pravougle koordinate, odnosno u jednačine (3.48), i napisati metriku u kvazipravouglој formi

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \dfrac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{m}{2r}\right)^2}\,dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{3.53}$$

gde je

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{3.54}$$

Ovo je forma metrike koja će biti korišćena. Treba, međutim, imati u vidu da su koordinate u opštoj relativnosti u osnovi samo oznake za tačke prostor-vremena. Možemo govoriti o t kao vremenskoj koordinati, a o x, y i z kao prostornim koordinatama, ali njih ne treba prebrzo poistovetiti sa realnim vremenom i rastojanjima. Ove veličine moraju biti definisane na invarijantan način. Posebno, striktno govoreći, r nije rastojanje od Sunca, iako je, naravno, približno upravo to.

Pretpostavimo da je posmatranje načinjeno iz prostornih koordinata (x_0, y_0, z_0) u trenutku kada je vremenska koordinata bila t_0. Ovo posmatranje je onda doga-

đaj, recimo O, sa koordinatama (x_0, y_0, z_0, t_0). Pretpostavimo dalje da je u trenutku emisije posmatranih fotona izvor imao prostorne koordinate (x_e, y_e, z_e). Emisija tih fotona je takođe događaj, recimo E, sa koordinatama (x_e, y_e, z_e, t_e), gde je $t_e = t_0 - \tau$, a τ je koordinatno vreme putovanja svetlosti između dva događaja. Ali dva događaja E i O povezana su nultom geodezijskom linijom. Stoga je moguće odrediti τ rešavanjem geodezijskih diferencijalnih jednačina (3.36), sa poznatim prostornim koordinatama ova dva događaja. Sada se heliocentrični pravac ka izvoru može definisati kao jedinični (tro)vektor s gde je

$$s = \left(\frac{x_e}{r_e}, \frac{y_e}{r_e}, \frac{z_e}{r_e}\right) \tag{3.55}$$

i, naravno,

$$r_e^2 = x_e^2 + y_e^2 + z_e^2. \tag{3.56}$$

Označimo geocentrični pravac ka izvoru jediničnim vektorom s^*. Tada, iz prethodnog paragrafa sledi da je

$$s^* = (l, m, n), \tag{3.57}$$

gde su kosinusi pravca definisani jednačinom (3.45), naime, imamo da je

$$l = \frac{(u^\lambda i_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}, \qquad m = \frac{(u^\lambda j_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}, \qquad n = \frac{(u^\lambda k_\lambda)}{(u^\lambda q_\lambda)}. \tag{3.45}$$

Ovde je u^λ tangentni vektor u tački O na nultu geodezijsku liniju. Kako je geodezijska linija već bila izračunata, u^λ je poznato. Ponovo je q^λ tangentni vektor u tački O na posmatračevu svetsku liniju. Međutim, tri jedinična vektora i^λ, j^λ, k^λ, koji predstavljaju koordinatne ose, nisu precizno dati i to treba uraditi na način koji ih čini efektivno paralelnim sa koordinatnim osama heliocentričnog posmatrača.

Prvi korak u ostvarivanju ovog cilja je definisanje međusobno normalnih vektora I^λ, J^λ, K^λ, Q^λ na sledeći način

$$\begin{aligned} I^\lambda &= \left(c(1+m/2r_0)^2, 0, 0, 0\right), \\ J^\lambda &= \left(0, c(1+m/2r_0)^2, 0, 0\right), \\ K^\lambda &= \left(0, 0, c(1+m/2r_0)^2, 0\right), \\ Q^\lambda &= \left(0, 0, 0, (1+m/2r_0)^2(1-m/2r_0)^{-1}\right), \end{aligned} \tag{3.58}$$

gde je

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \tag{3.59}$$

Lako se proverava, korišćenjem metrike (3.53), da su ovo zaista jedinični vektori. Pretpostavimo da je S posmatrač u stanju mirovanja u koordinatnom sistemu u tački (x_0, y_0, z_0). Tada je Q^λ tangentni vektor na svetsku liniju posmatrača S. Dalje, I^λ, J^λ i K^λ definišu lokalno pravougli koordinatni sistem osa za S u x, y i z pravcima. Naša je namera da konstruišemo takav koordinatni sistem za stvarnog posmatrača. Te ose će biti predstavljene sa međusobno normalnim vektorima i^λ, j^λ i k^λ, svaki normalan na q^λ. Koristićemo činjenicu da se, lokalno, a to znači i u susedstvu događaja O, prostor-vreme može poistovetiti sa prostor-vremenom u specijalnoj teoriji relativnosti.

Ekvivalentni vektori I^λ, J^λ, K^λ i Q^λ u specijalnoj teoriji relativnosti su dobijeni stavljanjem da je $m = 0$ u jednačinu (3.58). Dalje, ako $\mathfrak{V} = (V_x, V_y, V_z)$ predstavlja posmatračevu brzinu, tada vektori ekvivalentni sa i^λ, j^λ, k^λ i q^λ jesu jedinični vektori u koordinatnim pravcima posle primenjene Lorencove transformacije sa brzinom $\mathfrak{V}$, zapravo jednačina (3.26). Uobičajeno je razmotriti obrnutu transformaciju koja je data sa

$$\left.\begin{aligned}
x - x_0 &= \left[1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_x^2}{c^2}\right]x^* + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_xV_y}{c^2}y^* + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_xV_z}{c^2}z^* + \beta V_x t^*,\\
y - y_0 &= \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_yV_x}{c^2}x^* + \left[1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_y^2}{c^2}\right]y^* + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_yV_z}{c^2}z^* + \beta V_y t^*,\\
z - z_0 &= \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_zV_x}{c^2}x^* + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_zV_y}{c^2}y^* + \left[1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_z^2}{c^2}\right]z^* + \beta V_z t^*,\\
t - t_0 &= \frac{\beta V_x}{c^2}x^* + \frac{\beta V_y}{c^2}y^* + \frac{\beta V_z}{c^2}z^* + \beta t^*.
\end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

Tada možemo pročitati iz ovih jednačina komponente vektora i^λ, j^λ, k^λ i q^λ; na primer i^λ je u pravcu $y^* = z^* = t^* = 0$. Rezultat su, posle normalizacije, sledeći vektori

$$\left.\begin{aligned}
i^\lambda &= c\left[1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_x^2}{c^2}, \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_xV_y}{c^2}, \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_xV_z}{c^2}, \frac{\beta V_x}{c^2}\right],\\
j^\lambda &= c\left[\frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_yV_x}{c^2}, 1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_y^2}{c^2}, \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_yV_z}{c^2}, \frac{\beta V_y}{c^2}\right],\\
k^\lambda &= c\left[\frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_zV_x}{c^2}, \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_zV_y}{c^2}, 1 + \frac{\beta^2}{(\beta+1)}\frac{V_z^2}{c^2}, \frac{\beta V_z}{c^2}\right],\\
q^\lambda &= (\beta V_x, \beta V_y, \beta V_z, \beta)
\end{aligned}\right\} \tag{3.61}$$

Kako ove rezultate koristimo u opštoj teoriji relativnosti, neophodno je izraziti ih u vektorskoj formi. Pre svega, korišćenjem jednačine (3.58) sa $m = 0$, dobijamo

$$q^\lambda = \beta\left[Q^\lambda + \frac{V_x}{c}I^\lambda + \frac{V_y}{c}J^\lambda + \frac{V_z}{c}K^\lambda\right] \tag{3.62}$$

Tada (3.61) daje tri prostorna, jedinična vektora u obliku

$$\begin{aligned}
i^\lambda &= I^\lambda + \frac{\beta}{(\beta+1)}\frac{V_x}{c}(q^\lambda + Q^\lambda),\\
j^\lambda &= J^\lambda + \frac{\beta}{(\beta+1)}\frac{V_y}{c}(q^\lambda + Q^\lambda),\\
k^\lambda &= K^\lambda + \frac{\beta}{(\beta+1)}\frac{V_z}{c}(q^\lambda + Q^\lambda).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Komponente brzine $\mathfrak{V}$ i, naravno, β, sada mogu biti eleminisane. Uzimajući uzastopne, unutrašnje proizvode (3.62) dobijamo

$$\begin{aligned} \beta V_x &= -cq^{\lambda} I_{\lambda}, \\ \beta V_y &= -cq^{\lambda} J_{\lambda}, \\ \beta V_z &= -cq^{\lambda} K_{\lambda}, \\ \beta &= q^{\lambda} Q_{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Zamenjujući to u jednačine (3.63) dobijamo konačne izraze

$$\begin{aligned} i^{\lambda} &= I^{\lambda} - \frac{(q_{\mu} I^{\mu})}{(1 + q_{\nu} Q^{\nu})}(q^{\lambda} + Q^{\lambda}), \\ j^{\lambda} &= J^{\lambda} - \frac{(q_{\mu} J^{\mu})}{(1 + q_{\nu} Q^{\nu})}(q^{\lambda} + Q^{\lambda}), \\ k^{\lambda} &= K^{\lambda} - \frac{(q_{\mu} K^{\mu})}{(1 + q_{\nu} Q^{\nu})}(q^{\lambda} + Q^{\lambda}). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Tri vektora i^{λ}, j^{λ}, k^{λ}, dati jednačinama (3.65), međusobno su normalni, jedinični vektori, od kojih je svaki normalan na q^{λ}—ova tvrđenja čitalac može sam da proveri. Konačni izrazi za ove vektore su tenzorske jednačine, u koje su uključene one veličine koje su već definisane u opštoj teoriji relativnosti. Dok je specijalna teorija relativnosti korišćena kao sredstvo za identifikovanje ovih vektora na način koji ima fizičkog smisla, krajnji rezultat su tenzorske jednačine koje mogu biti usvojene kao definicije u opštoj teoriji relativnosti

Ovaj postupak za određivanje posmatranog pravca ka izvoru u opštoj teoriji relativnosti može biti sumiran u sledećem.

1. Izvođenje nulte geodezijske linije iz (3.36) koja povezuje događaj posmatranja $O(x_0, y_0, z_0, t_0)$ i događaj emisije $E(x_e, y_e, z_e, t_e)$. Tada je tangentni vektor u^{λ} na ovu geodezijsku liniju u tački O poznat.

2. Izvođenje jediničnih vektora I^{λ}, J^{λ}, K^{λ}, Q^{λ} iz jednačina (3.58).

3. Kombinovanje ovih vektora sa q^{λ} jediničnim tangentnim vektorom na posmatračevu svetsku liniju u tački O, da bi se izveli i^{λ}, j^{λ}, k^{λ} iz jednačina (3.65).

4. Posmatrani kosinusi pravca (l, m, n) se sada mogu odrediti iz (3.45). Rezultujući trovektor $\mathbf{s}^*$, jednačina (3.57) daje posmatrani pravac ka izvoru.

5. Ovo se sada može uporediti sa heliocentričnim pravcem ka izvoru $\mathbf{s}$ datim jednačinom (3.55). Razlika između dva vektora $\mathbf{s}$ i $\mathbf{s}^*$ uključuje efekte koji se posebno mogu zvati paralaksa, aberacija i savijanje svetlosti.

Potpun relativistički pristup opisan gore, neophodan je kada se može postići položajna tačnost reda veličine lučne milisekunde. Čak i tada, moguća su prilična pojednostavljenja, korišćenjem približnih, ali dovoljno tačnih metoda. Ova pojednostavljenja su suštinska, ako postupak koji je upravo sumiran treba da bude eksplicitan i posebno kada rastojanje $\mathbf{s}^* - \mathbf{s}$ treba izraziti algebarski. To će biti preduzeto u glavi 8. Primena opšte teorije relativnosti na putanjsku dinamiku data je u glavi 6.

Na početku ove glave naglašeno je da je identifikacija inercijalnog sistema referencije osnovna briga položajne astronomije. Stoga, postoji prividna kontradikcija

u uvođenju opšte teorije relativnosti u položajnu astronomiju, jer u opštoj teoriji relativnosti ne postoje inercijalni koordinatni sistemi. Efekti opšte teorije relativnosti su, ipak, jedino značajni u okolini Sunca, barem sa položajne tačke gledišta. Na velikim rastojanjima od Sunca oni mogu biti u potpunosti zanemareni i koordinatni sistem korišćen u jednačini (3.53) teži koordinatnom sistemu specijalne teorije relativnosti kako r teži beskonačnosti. Ranija razmatranja referentnih sistema, na primer u vezi sa sopstvenim kretanjem, nisu, zbog toga, ni na koji način narušena uključivanjem opšte teorije relativnosti. Na protiv, njeno uključenje je neophodno da bi se identifikovao referentni sistem koji je inercijalan na veoma velikim udaljenostima od Sunca.

Zadaci

[ε—nagib ekliptike = 23°,5]

3.1. Pokazati da je ukupna promena deklinacije zvezde, usled uticaja precesije bilo 2ε ili $180° - 2|\beta|$ u zavisnosti od njene ekliptičke latitude β. Pokazati da u bilo kojim okolnostima maksimalna i minimalna deklinacija predstavljaju apsolutne vrednosti od

$$\arcsin[\sin(\beta + \varepsilon)] \quad \text{i} \quad \arcsin[\sin(\beta - \varepsilon)].$$

3.2. Pokazati da precesija proizvodi monoton porast rektascenzije zvezda niske ekliptičke latitude, ali da je, za zvezde u okolini ekliptičkih polova, rektascenzija ograničena intervalom inteziteta $2\arcsin(\cos\beta\csc\varepsilon)$.

3.3. Pokazati da južna zvezda deklinacije $-\delta$ i rektascenzije α mora za neku epohu biti cirkumpolarna u nekoj stanici severne geografske širine φ, pri tome obezbeđujući da

$$\sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha < -\cos(\varphi - \varepsilon).$$

3.4. Dajte grubu aproksimaciju deklinacije sadašnje zvezde Severnjače za 44. godinu pre Hrista.

3.5. Dva događaja E_1 i E_2 povezana su vremenskom geodezijskom linijom u specijalnoj teoriji relativnosti. Pokazati da postoji opšta Lorencova transformacija koja transformiše geodezijsku liniju E_1E_2 u vremensku osu. Načinite ekvivalentno tvrđenje za dva događaja međusobno pridružena prostornom geodezijskom linijom i dajte opravdanje za to tvrđenje.

3.6. Dokažite da interval meren duž vremenske geodezijske linije u specijalnoj teoriji relativnosti jeste maksimalan u smislu da je veći od intervala duž drugih vremenskih krivih koje povezuju krajnje tačke geodezijske linije.

3.7. Koordinate (x, y, z) odgovaraju standardnom nizu normalnih ekvatorskih osa. Osa x je preusmerena ka tački na nebeskoj sferi sa koordinatama (α, δ), primenom rotacije za ugao α oko ose z, pa zatim rotacije za ugao δ oko y-ose. Pokazati da su nove koordinate (x', y', z') povezane sa starim jednačinama

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha\cos\delta + y\sin\alpha\cos\delta + z\sin\delta \\
y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\
z' &= -x\cos\alpha\sin\delta - y\sin\alpha\sin\delta + z\cos\delta .
\end{aligned}
$$

Pokažite da je obrnuta transformacija

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha\cos\delta - y'\sin\alpha - z'\cos\alpha\sin\delta \\
y &= -x'\sin\alpha\cos\delta + y'\cos\alpha - z'\sin\alpha\sin\delta \\
z &= x'\sin\delta + z'\cos\delta .
\end{aligned}
$$

3.8. Ako β označava Lorencov faktor

$$\beta = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

dokazati da je

$$V^2 = \frac{c^2(\beta^2 - 1)}{\beta^2}.$$

Koristite ovaj rezultat i rezultate utvrđene u prethodnom pitanju za izvođenje transformacionih jednačina (3.26).

3.9. Četiri vektora I^λ, J^λ, K^λ i Q^λ definisani su u nekoj tački prostor-vremena i međusobno su normalni. Prva tri su vektori prostornog tipa, dok je četvrti vremenski vektor. Dokažite da, za bilo koji vremenski jedinični vektor q^λ koji je definisan u istoj tački, jednačina (3.65) definiše skup međusobno normalnih prostornih jediničnih vektora, pri čemu je svaki od njih normalan na q^λ.

Глава Четврта

Geocentrične koordinate

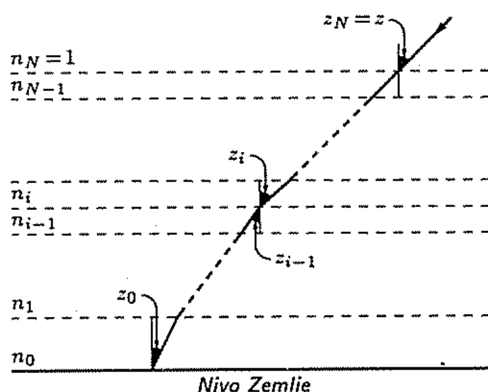
§ **4.1. Uvod.** U poslednjoj glavi značajna pažnja je posvećena teorijskom aspektu pomeranja koordinatnog početka iz jedne tačke u drugu. Ova glava biće mnogo specifičnija. To se odnosi na praktične detalje kojih posebno ima u slučaju prelaza iz topocentra u geocentar. U kasnijim paragrafima, razmatrana je stvarna priroda udaljenosti koordinatnih početaka i rezultujući uticaji aberacije i paralakse na položaj. Uzrok aberacije je kretanje posmatrača u odnosu na geocentar, tj. Zemljina rotacija. Dakle, aberacioni uticaj se naziva *dnevna aberacija*. ❊ Slično tome, odgovarajući efekt paralakse naziva se *dnevna paralaksa*, mada se, ta- ❊ kođe, koristi i termin *geocentrična paralaksa*. ❊

Međutim, postoji drugi efekt koji se mora uzeti u obzir za bilo kog posmatrača sa Zemlje, naime efekt atmosferske refrakcije. Znači, kako svetlosni zraci od zvezde prolaze kroz atmosferu Zemlje, oni nailaze na slojeve progresivno veće gustine i odgovarajuće većeg indeksa prelamanja. Međutim, putanja zraka nije prava linija, pa se zraci postepeno lome ka vertikali. Ovaj efekt je veoma teško tačno tretirati, jer iznos refrakcije zavisi od atmosferskih uslova koji variraju od dana do dana. Dakle, esencijalno je definisanje topocentričnih koordinata koje znače koordinate u odnosu na topocentar, ali sa potpuno eliminisanim efektima atmosferske refrakcije.

§ **4.2. Približne formule za refrakciju.** Približne formule izvedene u ovom paragrafu zasnovane su na pretpostavci da se atmosfera može smatrati planparalelnom, kao što je prikazano na sl. 4.1. Ovim je zanemarena zakrivljenost Zemljine površine, ali još uvek se dobijaju formule koje su dobra aproksimacija za zvezde bliske zenitu. U samom zenitu efekti refrakcije nestaju zbog simetrije. Opravdanje pretpostavke planparalelnosti ostaje u činjenici da se znatna refrakcija pojavljuje u najgušćem delu atmosfere, u troposferi, koja se prostire do na samo nekoliko kilometara iznad Zemljine površi. Međutim, poluprečnik krivine troposfere znatno prevazilazi njeno vertikalno prostiranje i za troposfersku refrakciju aproksimacija planparalelnosti ima smisla. Za optičke izvore, samo je refrakcija u troposferi značajna a refrakcija u gornjim slojevima atmosfere generalno može da se zanemari. Ipak, ovo ne važi za radio talase, za koje jonosferska refrakcija

može da bude značajna, posebno za duge radio talase. Kako se jonosfera prostire do visina preko 1000 km od Zemljine površi, jasno je da aproksimacija planparalelnim ravnima ne zadovoljava u tom slučaju. Dalje, vodićemo računa da aproksimacija na kojoj se zasniva ovaj paragraf ima ograničeno važenje.

Predstavimo atmosferu sa N horizontalnih slojeva sa indeksima prelamanja $n_0, n_1, \ldots, n_{N-1}$, kako je prikazano na sl. 4.1. Indeks prelamanja opada sa visinom, n_0 je njegova vrednost na nivou mora, a iznad, u najvišem sloju gde je u okolnom prostoru prividni vakuum, indeks prelamanja je jedinica. Razmotrimo zrak koji ulazi u atmosferu pod uglom z u odnosu na vertikalu. Neka je z_i njegov nagib prema vertikali u sloju sa indeksom prelamanja n_i. Onda je z_0 posmatrana zenitska daljina izvora. Zakon prelamanja može da se primeni na svaki sloj. Uopšte, primenjujući Snelov (SNELL) zakon, koji povezuje i-ti i $(i+1)$ nivo, imamo



Refrakcija u planparalelnoj atmosferi.

Слика 4.1

$$n_i \sin z_i = n_{i-1} \sin z_{i-1}. \tag{4.1}$$

Vidi se da je veličina $n_i \sin z_i$ sačuvana za svaki sloj i možemo da zaključimo da je

$$n_0 \sin z_0 = n_N \sin z_N = \sin z. \tag{4.2}$$

Ovaj rezultat je nezavisan od načina na koji je atmosfera podeljena u diskretne slojeve i važi sve do granice kontinualne promene indeksa prelamanja sa visinom. Ugao z daje pravac u kojem bi trebalo da se pojavi izvor u odsustvu bilo kakve refrakcije. Ovo znači da je z *topocentrična zenitna daljina* izvora. Kako je $n_0 > 1$, jednačina (4.2) znači da je posmatrana zenitska daljina manja od topocentrične. Šta više, kako se refrakcioni proces jasno odvija u ravni vertikala, azimut izvora se ne menja.

Označimo ugao refrakcije sa R, što daje

$$R = z - z_0. \tag{4.3}$$

Onda jednačina (4.2) daje

$$\sin z_0 \cos R + \cos z_0 \sin R = n_0 \sin z_0.$$

Kako je ugao refrakcije mali, može da se izvrši obična aproksimacija za male uglove, dajući

$$R = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0. \tag{4.4}$$

Ovaj izraz je dat u radijanima; pretvaranje u lučne sekunde daje

$$R = K \operatorname{tg} z_0, \tag{4.5}$$

gde je

$$K = 206\,265 (n_0 - 1). \tag{4.6}$$

Formula (4.2) je egzaktna u granicama pretpostavke planparalelnosti stratifikacije atmosfere. Jednačine (4.4) i (4.5) su tačne samo do prvog reda $(n_0 - 1)$ i

korisne su za male zenitske daljine. Međutim, nema polazišta za izvođenje članova višeg reda po $(n_0 - 1)$. Jer, ako je zenitska daljina dovoljno velika da su ti članovi značajni, onda vrednost K, potrebna da bi sačuvala istu tačnost, mora da se modifikuje uključivanjem efekta Zemljine zakrivljenosti.

Jedna dobra osobina tek izvedene formule je da ugao refrakcije zavisi samo od posmatrane zenitske daljine objekta i vrednosti indeksa prelamanja na površini. Detalji o varijaciji indeksa prelamanja sa visinom su irelevantni. Sve što je potrebno da se koriguje posmatrana zenitska daljina je poznavanje lokalnih atmosferskih uslova, tako da lokalni indeks prelamanja može da se odredi. Na nesreću, ova korisna osobina ne može da se očuva uvođenjem efekta zakrivljenosti.

Veličina n_0 značajno zavisi od lokalnih atmosferskih uslova. Za standardne uslove usvojeni su atmosferski pritisak 760 mmHg i atmosferska temperatura 0 °C. Indeks prelamanja pod ovim uslovima dat je sa

$$n_0 = 1{,}000\,292\,7, \tag{4.7}$$

koji daje

$$K = 60'',4. \tag{4.8}$$

Ova vrednost K se ponakad naziva *konstantom refrakcije*.

Vrednost K za nestandardne uslove može da se izvede iz zakona Deil-Gledstona (DALE-GLADSTONE), koji tvrdi da je $(n_0 - 1)$ proporcionalno gustini vazduha. Onda, ako je P atmosferski pritisak u mmHg, t je temperatura u stepenima Celzijusa, iz gasnih zakona sledi da je

$$n_0 - 1 \propto \frac{P}{(273 + t)}. \tag{4.9}$$

Koristeći vrednosti već date za standardne uslove, refrakciona formula (4.5) može da se napiše kao

$$R = 60'',4 \frac{(P/760)}{(1 + t/273)} \operatorname{tg} z_0. \tag{4.10}$$

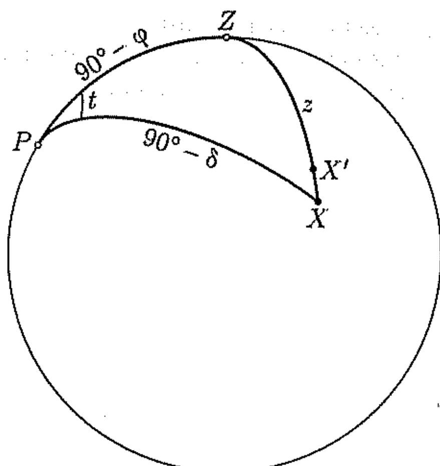
Dalja poboljšanja refrakcione formule se obično ne čine bez uključivanja efekta zakrivljenosti Zemlje. Međutim, dve sledeće tačke su vredne pažnje. Indeks prelamanja na površini mora ne zavisi samo od lokalnog pritiska i temperature, kako je razmotreno ranije, već i od sastava vazduha i od talasne dužine upadne svetlosti Sastav atmosfere može da se smatra konstantnim, izuzev promene sadržaja vodene pare. Efekt toga je zadovoljavajuće mali i opravdava njegovo zanemarivanje u približnim formulama koje se razmatraju ovde. Situacija je za nijansu ozbiljnija ako razmatramo zavisnost indeksa prelamanja od talasne dužine. Vrednost n_0 navedena u jednačini (4.7) odgovara centru V-oblasti koja se koristi u definisanju vizuelne veličine zvezde. Na celom vidljivom delu spektra, veličina $(n_0 - 1)$ varira oko dva procenta, sa odgovarajućom promenom u K. Rezultat je da se tačkasti lik zvezde rasipa u mali spektar duž kruga vertikala sa ljubičastim krajem bliže zenitu. Ovo može da stvori sistematske efekte u merenjima položaja zvezda raznih boja i uključivanje promena talasnih dužina u jednačinu (4.10) delimično je opravdano uprkos aproksimativnoj prirodi jednačine.

Promena talasne dužine indeksa prelamanja može da se izrazi sa

$$n_0 - 1 = 2{,}871 \cdot 10^{-4}\left(1 + \frac{0{,}00567}{\lambda^2}\right), \tag{4.11}$$

gde je λ talasna dužina u mikronima (ALLEN, 1976). Ova varijacija može da se ugradi u jednačinu (4.10) dajući ugao refrakcije kao

$$R = 21'',3\,\frac{P(1 + 0{,}00567/\lambda^2)}{(273 + t)}\,\mathrm{tg}\, z_0. \tag{4.12}$$



СЛИКА 4.2

Ovaj paragraf o približnoj formuli refrakcije biće završen izvođenjem rezultujućih efekata na rektascenziju i deklinaciju zvezde. Uočimo nebesku sferu prikazanu na sl. 4.2 na kojoj X predstavlja topocentrični položaj, a X' posmatrani položaj zvezde. Tačke P i Z su, redom, severni nebeski pol i zenit. Promena položaja zvezde X je duž velikog kruga XZ.

Moguće je koristiti za mala pomeranja zvezde na nebeskoj sferi opšti rezultat koji je izveden u §1.7. Rezultujuće promene $(d\alpha, d\delta)$ date su jednačinom (1.29). Primenjujući ovaj opšti rezultat, moramo uočiti luk θ kao zenitsku daljinu z, a (α_0, δ_0) su ekvatorske koordinate zenita. Onda je

$$\alpha_0 = s, \qquad \delta_0 = \varphi,$$

gde je φ širina posmatrača. Iz jednačine (2.14) sledi da je $\alpha_0 - \alpha = t$, časovni ugao zvezde. Pomeranje zvezde dato je sa (1.27) kao $d\theta = k \sin\theta$. Poređenje sa jednačinom (4.5) ukazuje, u ovoj primeni, da veličina k nije konstanta već je data sa

$$k = -K \,\mathrm{sc}\, z.$$

Dalje, zgodno je eliminisati z koristeći kosinusni obrazac za sferni trougao PZX, koji daje

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t.$$

Onda, posle malih pojednostavljenja, jednačine (1.29) konačno daju

$$d\alpha = \frac{K\,\mathrm{sc}^2\delta \sin t}{\cos t + \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta}, \qquad d\delta = K\frac{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\delta\cos t}{\cos t + \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta}. \tag{4.13}$$

§ 4.3. Refrakcija u sferno simetričnoj atmosferi.

Aproksimacija Zemljine atmosfere u obliku planparalelnih slojeva vodi jednostavnoj formuli refrakcije, ali postaje sve netačnija sa porastom zenitske daljine. Aproksimirajući atmosferu sferno simetričnom, može da se dobije znatno poboljšanje. Onda su gustina atmosfere i indeks prelamanja funkcije samo rastojanja od centra Zemlje,

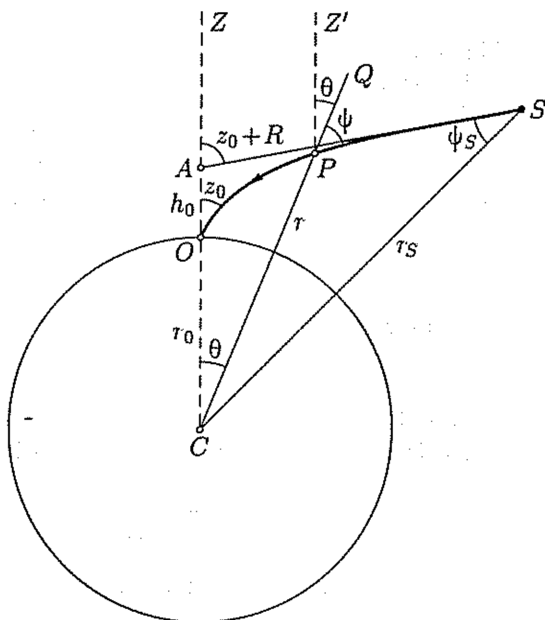
tačke C na sl. 4.3. Pretpostavimo dalje da O predstavlja posmatrača na geocentričnoj daljini r_0, a P je proizvoljna tačka izlomljene putanje zraka OPS. Neka je $CP = r$ i ugao $OCP = \theta$. Onda su (r, θ) polarne koordinate tačke P. Rešavanje $\theta = \theta(r)$ daće putanju zraka.

Produžimo liniju CO do Z. Onda je OZ zenitski pravac posmatrača. Konstruišimo PZ' paralelno sa OZ i produžimo CP do Q. Onda je $Z'PQ = \theta$. Označimo sada sa z ugao koji zaklapaju svetlosni zrak i pravac zenita posmatrača u tački P. Neka je z_0 vrednost z u O, što je posmatrana zenitska daljina. Dalje, označimo sa ψ ugao što ga čine zrak i radijus vektor CPQ. Onda je

$$z = \theta + \psi. \qquad (4.14)$$

Zapazimo da je ugao ψ upravo ugao između radijalnog pravca i tangente na krivu $\theta = \theta(r)$ i

$$\operatorname{tg}\psi = r\frac{d\theta}{dr}. \qquad (4.15)$$



Refrakcija u radijalno simetričnoj atmosferi.

СЛИКА 4 3

Konačno, konstruišimo asimptotu na putanju zraka i neka ona seče OZ u tački A. Označićemo visinu OA sa h_0.

Idući dalje, moramo da izvedemo zakon refrakcije. Kako je indeks refrakcije $n = n(r)$, zamišljamo atmosferu koja se sastoji od konačnog broja koncentričnih slojeva, slično razmatranju u slučaju planparalelnosti. Slika 4 4 prikazuje uvećani izgled tipičnog sloja sa indeksom prelamanja n_i i prikazanim uglovima ψ_i i ψ_{i+1}. Neka je ugao $RPC = \chi$. Onda iz zakona prelamanja

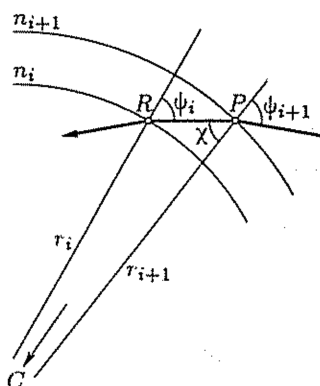
$$n_{i+1}\sin\psi_{i+1} = n_i \sin\chi.$$

Ugao χ može da se eliminiše primenom sinusnog obrasca na ravan trougao RPC. To daje

$$r_{i+1}\sin\chi = r_i \sin\psi_i.$$

Kako je

$$r_{i+1}n_{i+1}\sin\psi_{i+1} = r_i n_i \sin\psi_i.$$



СЛИКА 4 4

Ovo povlači za sobom da je veličina $rn\sin\psi$ očuvana na ma kom nivou čak i u nastavku do granice kon-

tinualne varijacije indeksa prelamanja. Izjednačavajući to sa veličinom na površini, imamo

$$rn\sin\psi = r_0 n_0 \sin z_0, \tag{4.16}$$

jer je u tački O, $\theta = 0$ i $\psi = z_0$.

Međutim, prelamanje zraka je dato promenama z sa visinom, a ne promenama ψ. Iz jednačina (4.14) i (4.15) dobija se da je

$$dz = d\psi + \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\psi.$$

Međutim, diferencijalni oblik zakona prelamanja (4.16) može da se napiše u obliku

$$rn\cos\psi\left(d\psi + \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\psi\right) = -dn\, r\sin\psi,$$

dajući kao rezultat

$$dz = -\frac{dn}{n}\operatorname{tg}\psi. \tag{4.17}$$

U pogledu oblika ove jednačine, pogodnije je uzeti n pre nego r kao nezavisnu promenljivu. Dalje, $\operatorname{tg}\psi$ može da se izvede iz (4.16) kao

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r_0 n_0 \sin z_0}{\left(r^2n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{1/2}}. \tag{4.18}$$

Konačno, smenjujući ovo u jednačinu (4.17) i integraleći dobija se ugao refrakcije kao

$$R = r_0 n_0 \sin z_0 \int\limits_1^{n_0} \frac{dn}{n\left(r^2n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{1/2}}. \tag{4.19}$$

Ova formula je tačna. Ako je pretpostavljena promena indeksa prelamanja sa visinom, tj. funkcija $r = r(n)$, jednačina (4.19) može da se integrali numerički da bi se izveo ugao refrakcije. Dalje, stvarna putanja zraka može da se izračuna, takođe, za datu radijalnu raspodelu atmosferske gustine i, svakako, indeksa prelamanja. Jednačina (4.15) može da se integrali i, koristeći (4.18), rezultujući integral je

$$\theta = r_0 n_0 \sin z_0 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'\left(r'^2n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{1/2}}. \tag{4.20}$$

Kad jednom znamo putanju zraka, odredićemo njenu asimptotu, a onda visina h_0 (OA na sl. 4.3) može da se izračuna. Razmatrajući trougao ACS na sl. 4.3 može da se dobije jednostavna formula za h_0. Ovde se tačka S smatra tačkom na velikoj visini putanje zraka, efektivno iznad atmosfere gde je $n = 1$. Neka su r_S i ψ_S vrednosti r i ψ koje odgovaraju ovoj tački. Onda, kako je $ZAS = z_0 + R$, primena sinusnog obrasca na trougao ACS daje

$$r_S \sin\psi_S = (r_0 + h_0)\sin(z_0 + R).$$

Sada, ako se primeni zakon prelamanja na levu stranu ove jednačine, dobija se sledeći rezultat

$$h_0 = r_0\left[\frac{n_0 \sin z_0}{\sin(z_0 + R)} - 1\right]. \tag{4.21}$$

Visina h_0 je veoma mala, potpuno zanemarljiva za male zenitske daljine. Čak za srednje zenitske daljine, njen iznos je nekoliko metara. Međutim, raste brzo blizu horizonta i za izvore na samom horizontu je oko 1,5 km. Značenje visine h_0 je sledeće: kada se primeni popravka za refrakciju, topocentrične koordinate koje su izvedene ne odgovaraju samom položaju posmatrača već položaju za visinu h_0 iznad posmatrača. Može biti neophodno da se ova fina promena prepozna ako se bude primenjivala uzastopna korekcija za geocentričnu paralaksu. Međutim, zbog male vrednosti h_0 potrebno je da se korekcije primene samo na posmatranja Meseca, i to samo na niskim visinama, jer je zanemarljiva za sve ostale nebeske objekte. S druge strane, efekt je značajan za kretanje veštačkih satelita.

Opšta formula refrakcije u njenom tačnom obliku (4.19) zahteva detaljno poznavanje indeksa prelamanja, odnosno atmosferske uslove za celu atmosferu Zemlje. Tabela 4.1 daje indeks prelamanja za glavne (ne standardne) uslove u funkciji visine nad površinom Zemlje. Poslednja kolona u ovoj tabeli daje parametar K kako je definisan u jednačini (4.6). Ovo daje približan iznos refrakcije koja postoji iznad razmatranog nivoa, za objekt na zenitskoj daljini 45°. Pregled tabele 4.1 ukazuje na približno eksponencijalno opadanje $(n-1)$ sa skalom visina, H_0, što je manje od 10 km. Opravdanje ranije aproksimacije, uključujući potpuno zanemarivanje efekta zakrivljenosti, je prividno. Normalan postupak je uzimanje ove aproksimacije jedan korak kasnije uključivanjem samo efekta Zemljine zakrivljenosti prvog reda. U razvoju ove aproksimacije, koristićemo razvoj u red jednačine (4.19). Moramo da uočimo da postoje dve nezavisne male veličine, naime $(n_0 - 1)$ i H_0/r_0. Precizna definicija skale visina H_0 biće data u toku analize.

Tabela 4.1. Promena indeksa refrakcije i ugla refrakcije sa visinom iznad površine Zemlje

Visina h [kilometara]	$\log(n-1)$	K [lučnih sekundi]
0	−3,55	57,8
10	−4,03	19,2
20	−4,69	4,2
30	−5,38	0,85
40	−6,04	0,19
50	−6,63	0,05
100	−9,96	$2\cdot10^{-5}$

Sada razmotrimo jednačinu (4.19) i napišimo

$$r = r_0 + h \tag{4.22}$$

u integralu te jednačine. Formalno, h teži beskonačnosti za $n \to 1$, ali je jasno iz tabele 4.1 da integracija može da se prekine na donjoj granici razlikujući se neznatno od jedinice, ali odgovarajući vrednosti h koja je još mnogo manja od r_0. Dalje, radijus vektor r može da se razvije u stepeni red po (h/r_0) i ako zadržimo samo nulti član i članove prvog reda, jednačina (4.19) može da se napiše kao

$$R = R_1 - R_2 + O\left(\frac{h^2}{r_0^2}\right), \tag{4.23}$$

gde je

$$R_1 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{\mathrm{d}n}{n\left(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{1/2}}, \tag{4.24}$$

i

$$R_2 = \frac{n_0 \sin z_0}{r_0} \int_1^{n_0} \frac{hn\,dn}{\left(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{3/2}}. \tag{4.25}$$

Da bi ovaj razvoj važio, neophodno je da samo $\left(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0\right)^{1/2}$ ne bude mala veličina istog reda kao h/r_0. Ovo zahteva da će z_0 biti znatno manje od $\arcsin(1/n_0)$— objekt ne sme biti blizu horizonta.

Integral R_1 može da se izvede tačno dajući

$$R_1 = \left[-\arcsin\left(\frac{n_0 \sin z_0}{n}\right)\right]_1^{n_0} = \arcsin(n_0 \sin z_0) - z_0.$$

Alternativno, ovaj rezultat može da se napiše kao

$$\sin(z_0 + R_1) = n_0 \sin z_0,$$

u preciznom slaganju sa rezultatom izvedenim za planparalelnu atmosferu, jednačina (4.2). Zgodno je razviti R_1 u stepeni red po $(n_0 - 1)$, ali je sada neophodno uključiti članove reda $(n_0 - 1)^2$, koji ranije nisu bili uzimani u obzir. Korektno do ovog reda, imamo

$$R_1 = (n_0 - 1)\,\mathrm{tg}\, z_0 + \frac{1}{2}(n_0 - 1)^2\,\mathrm{tg}^3 z_0. \tag{4.26}$$

U razvoju integrala R_2 uobičajeno je da se radi sa članovima gustine atmosfere ρ, a ne sa članovima indeksa prelamanja. Prema zakonu Deil-Gledstona, n možemo da izrazimo kao

$$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{\rho}{\rho_0}, \tag{4.27}$$

gde je ρ_0 gustina atmosfere na nivou mora. Šta više, kako je $\rho \le \rho_0$, ovo olakšava razvoj po stepenima od $(n_0 - 1)$, dajući rezultat

$$R_2 = \frac{\mathrm{tg}\, z_0 \,\mathrm{sc}^2 z_0}{r_0} \frac{(n_0 - 1)}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} h\,d\rho + \cdots,$$

gde će samo prvi član biti zadržan. Sada, integraleći deo po deo, može se videti da je

$$\int_0^{\rho_0} h\,d\rho = [h\rho]_0^{\rho_0} + \int_0^{\infty} \rho\,dh.$$

Prvi član na desnoj strani ove jednačine se gubi, jer je $h = 0$ kada je $\rho = \rho_0$ i $h\rho \to 0$ za $\rho \to 0$, zahvaljujući približno eksponencijalnom opadanju gustine sa visinom. Dalje, odredimo H_0 kao *visinu ekvivalentne homogene atmosfere*, stavljajući

$$H_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \rho\,dh. \tag{4.28}$$

Ovo je ekvivalentno skali visina koju bi atmosfera imala ako bi njena raspodela gustine stvarno bila eksponencijalna, ali jednačina (4.28) ne zahteva tu pretpostavku. Onda primena ove definicije daje rezultat

$$R_2 = (n_0 - 1)\frac{H_0}{r_0}\,\mathrm{tg}\, z_0 \,\mathrm{sc}^2 z_0. \tag{4.29}$$

Dva razvoja iz jednačina (4.26) i (4.29) mogu da se kombinuju i da daju totalnu refrakciju. To je u obliku

$$R = A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0 + \cdots, \tag{4.30}$$

gde je, preko članova fizičkih parametara,

$$\begin{aligned} A &= (n_0 - 1)\left(1 - \frac{H_0}{r_0}\right), \\ B &= -(n_0 - 1)\left(\frac{H_0}{r_0} - \frac{1}{2}(n_0 - 1)\right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Međutim, najčešći postupak je iskoristiti jednačinu (4.30) kao zakon refrakcije, ali smatrajući A i B empirijski određenim konstantama, jer oba fizička parametra variraju zbog brojnih uzroka.

§ 4.4. Konstante i tablice refrakcije. Sledi jedan od mnogih posmatračkih metoda koji može da se koristi u određivanju konstanti A i B, koje su formalno bile definisane u poslednjem paragrafu. Cirkumpolarna zvezda deklinacije δ posmatrana je i u gornjem i u donjem prolazu, i zenitska daljina je merena u oba slučaja. Tačke X i Y na sl. 4.5 predstavljaju topocentrične položaje zvezde u gornjem i donjem prolazu, redom, dok X_1 i Y_1 predstavljaju posmatrane položaje. Onda je $PX = PY = 90° - \delta$ i $PZ = 90° - \varphi$, gde je φ širina posmatrača. Topocentrična zenitska daljina u gornjem prolazu $ZX = PX - PZ = \varphi - \delta$. Ako z_0 označava posmatranu zenitsku daljinu u isto vreme, onda, iz jednačine (4.30), je očigledno

$$\varphi - \delta = z_0 + A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0.$$

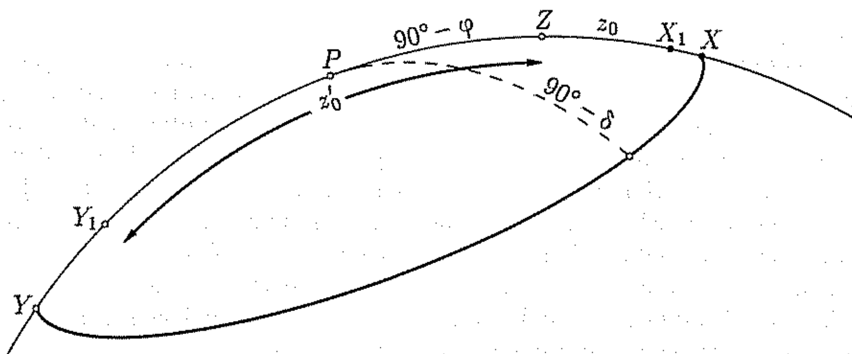
Sličan argument može da se primeni na donji prolaz $ZY = PZ + PY = 180° - \varphi - \delta$. Onda, ako je z_0' posmatrana zenitska daljina, sledi da je

$$180° - \varphi - \delta = z_0' + A \operatorname{tg} z_0' + B \operatorname{tg}^3 z_0'.$$

Iz ovih jednačina može da se eliminiše deklinacija δ, dajući

$$180° - 2\varphi = z_0' - z_0 + A(\operatorname{tg} z_0' - \operatorname{tg} z_0) + B(\operatorname{tg}^3 z_0' - \operatorname{tg}^3 z_0). \tag{4.32}$$

Veličine z_0 i z_0' koje se pojavljuju u ovim jednačinama, znaju se direktno iz posmatranja—instrumenti koji omogućavaju takva merenja razmatrani su u sledećoj glavi.



СЛИКА 4.5

Dakle, u jednačini (4.32) nepoznate veličine su A i B i možda φ. Posmatranja tri razne zvezde daju tri jednačine slične sa (4.32) koje će, u principu, biti dovoljne za određivanje konstanti refrakcije A i B, a takođe i posmatračeve širine. Međutim, u praksi, da bi se minimizirale neizbežne posmatračke greške, zenitska daljina svake zvezde se meri više puta i veliki broj zvezda se posmatra na isti način. Onda veličine A, B i φ mogu da se odrede statistički metodom najmanjih kvadrata.

U smislu njihovih fizičkih definicija očekivano je da refrakcione konstante A i B zavise od meteoroloških uslova. Posmatračke vrednosti prevazilaze očekivane promene. Međutim, za standardne uslove pritiska i temperature refrakciona formula postaje

$$R = 60'',29 \operatorname{tg} z_0 - 0'',06688 \operatorname{tg}^3 z_0. \tag{4.33}$$

Neki od uzroka promena refrakcionih konstanti bili su razmotreni u prethodnom paragrafu, naime atmosferski pritisak, temperatura, vlažnost i promena sa promenom talasne dužine. Svaki od njih deluje na vrednost n_0 dobijenu iz (4.31). Vrednost skale visina H_0, međutim, takođe zavisi od lokalne gravitacije i, kako ona zavisi u principu od daljine posmatrača od centra Zemlje, potrebna je korekcija zbog širine i nadmorske visine mesta posmatranja.

Kako su uzroci promena refrakcije tako različiti i komplikovani, bilo bi mukotrpno praktikovati korišćenje specijalnih refrakcionih tablica umesto primene eksplicitne formule koja uzima u obzir sve efekte. Nekoliko velikih opservatorija ima izvedene iscrpne tablice refrakcije koje uključuju sve gore razmotrene efekte, npr. Pulkovske tablice refrakcije (ORLOV, 1956). Međutim, sve što mogu postići, pa čak i najdetaljnije tablice refrakcije, je da se izrazi refrakcija kao funkcija lokalnih uslova. Sada, opšta formula refrakcije (4.19) pokazuje da totalna refrakcija ne zavisi samo od uslova na površini, već od potpune varijacije indeksa prelamanja sa visinom. Samo ako je razvoj u red ograničen na prva dva člana, kao u (4.30), onda navedeni koeficijenti mogu zadovoljavajuće da se izraze preko članova sa lokalnim uslovima. Međutim, formula (4.30) postaje veoma netačna na velikim zenitnim daljinama i prestaje da daje zadovoljavajuće rezultate ako zenitska daljina pređe 75°. Članovi višeg reda zavise od fine strukture atmosfere i za $z_0 > 80°$ ova zavisnost je kritična. Na normalnim zenitskim daljinama, refrakcione tablice su zasnovane na kombinaciji teorije i posmatranja. S druge strane, blizu horizonta, utabličene vrednosti refrakcije su bazirane skoro potpuno na posmatranjima. Naime, ugao prelamanja blizu horizonta je veoma veliki, promenljiv i skoro neodređen, tako da refrakcione tablice mogu dati samo približne vrednosti, a precizna položajna merenja postaju nemoguća.

Kada je nebesko telo posmatrano na zenitnoj daljini od tačno 90°, ugao refrakcije se naziva *horizontskom refrakcijom*. Mada je ovaj ugao nepoznat, u cilju računanja trenutaka izlaza i zalaza, korisno je usvojiti standardnu vrednost od 34′, jer veća tačnost se obično i ne traži. Na taj način su računati izlazi i zalazi Sunca u *Astronomical Almanacu*. Međutim, sledeća aproksimacija je uvedena da se da veličina Sunčevog diska. Trenucima izlaza i zalaza Sunca smatraju se trenuci kada gornji Sunčev rub dodiruje horizont. Usvajanje ugaonog poluprečnika Sunca od 16′ znači da je tada centar Sunca realno 50′ ispod horizonta. Utabličene vrednosti trenutaka izlaza i zalaza Sunca, dakle, odgovaraju trenucima za koje je zenitna daljina Sunca 90°50′. Slično razmatranje je primenljivo na trenutke izlaza i zalaza Meseca,

koji su takođe uključeni u *Astronomical Almanac*. Međutim, u tom slučaju, računa se popravka za geocentričnu paralaksu, dok se ta popravka za Sunce zanemaruje.

Biće jasno, iz diskusije u ovom i dva prethodna paragrafa, da atmosferska refrakcija menja koordinate zvezda na način koji ne može u potpunosti da se predvidi i da tačnost naglo opada sa rastom zenitne daljine. Međutim, postoji definitivna povoljnost ako se položajna posmatranja svedu na male zenitne daljine, posebno ako mora da se očuva visoka tačnost. Zato će u sledećoj glavi biti opisan instrument koji se koncentriše na zenitska posmatranja.

Data diskusija o refrakciji odnosi se na nisku atmosferu i usredsredili smo se na optički slučaj. Većina razmatranja primenljiva je na radio refrakciju, ali se vrednosti konstanti znatno razlikuju. Šta više, radio refrakcija, za razliku od optičke, strogo je zavisna od vlažnosti atmosfere. Dalje, na dugim radio talasima pojavljuje se znatna refrakcija u jonosferi. U tom slučaju, aproksimacije date u ovoj glavi ne odgovaraju. Potpunija diskusija radio refrakcije data je u glavi 16.

Poziciona posmatranja u optičkom dijapazonu, koja se obavljaju na satelitima snabdevenim teleskopima, uklapaju u potpunosti problem atmosferske refrakcije. Kao što pokazuje poslednji ulaz u tabeli 4.1, tada se ne zahteva nikakva korekcija za refrakciju. U tom slučaju direktno se posmatraju topocentrične koordinate, nezavisno od neznatnih instrumentskih popravki.

§ **4.5. Geocentrične koordinate posmatrača.** Ostatak ove glave odnosi se na svođenje koordinata zvezda sa topocentričnog na geocentrični položaj. To zahteva popravke za geocentričnu paralaksu i dnevnu aberaciju, koje su razmotrene redom. Iznos popravke za paralaksu zavisi od daljine posmatranog objekta i zanemarljiva je za tela izvan Sunčevog sistema. S druge strane, u neposrednoj okolini Zemlje, paralaksa se uzima u obzir; ona je približno jedan stepen za Mesec i može da bude znatno veća za veštačke satelite. Egzaktni pristup je bitan u ovim okolnostima, a potrebno je i odgovarajuće tačno poznavanje položaja posmatrača u odnosu na centar Zemlje. Tada je jednostavna aproksimacija oblika Zemlje sferom neodgovarajuća i mora da se razmotri mnogo detaljnije.

Prema tome, srednji nivo okeana je u gravitacionoj ravnoteži i, dakle, primoran je da prati ekvipotencijalnu površ prividne gravitacije. Izvedena potencijalna funkcija prirodno uključuje član koji predstavlja centrifugalne efekte koji proističu iz Zemljine rotacije. Ova ekvipotencijalna površ koja zahvata nivo okeana i nastavlja se pod (nad! pp.) Zemljom nazvana je *geoid* i normalno je predstavljena nivoom mora. Prema definiciji, napomenimo da je pravac lokalne gravitacije pravac normale na geoid. Ova površ ima sigurno male nepravilnosti koje mogu veoma blisko da se izravnaju (nafituju) na obrtni elipsoid, tj. sferoid, čija se osa rotacije poklapa sa osom rotacije Zemlje. *Standardni sferoid* je usvojen u referentne svrhe i osnova je za geodetska merenja.

Slika 4.6 predstavlja meridijanski presek standardnog sferoida u obliku elipse velike poluose a i male poluose b. Standardni sferoid se obično definiše ekvatorskim poluprečnikom a i (polarnom) spljoštenošću f, gde je

$$b = a(1 - f). \tag{4.34}$$

Jednačina elipse onda može da se napiše kao

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-f)^2} = 1. \tag{4.35}$$

Razmotrimo posmatrača O na visini h iznad standardnog sferoida. Nezavisno od male geodetske popravke, obično nekoliko metara, ovo je njegova nadmarska visina. Povlačeći normalu kroz O na sferoid, ona ga prodire u tački O' i daje presek te linije sa x-osom u Q. Onda je $QQ' = h$. Mogu da se daju najmanje tri nezavisne odredbe za zenitni pravac posmatrača O. Stvarni pravac mirnog viska definiše *astronomski zenit*; on nije prikazan na sl. 4.6. Pravac QO definiše *geodetski zenit*. On će biti identičan sa astronomskim zenitom ukoliko se geoid poklapa sa standardnim sferoidom—oni se razlikuju samo usled lokalnih gravitacionih anomalija. Ugao između ova dva zenitna pravca naziva se *deflekcijom vertikale*. Ona je retko veća od nekoliko lučnih sekundi. Treći zenitni pravac, *geocentrični zenit*, dat je pravcem CO. Ugao između njega i geodetskog zenita, recimo v, naziva se *uglom vertikale*.

Uz svaku definiciju zenita ide i definicija posmatrača. Jednostavno, to je ugao koji čini zenitni pravac sa ekvatorskom ravni. *Geodetska širina* φ i *geocentrična širina* φ' za posmatrača u O prikazani su na sl. 4.6. Međutim, *astronomska širina* nije označena jer pravac astronomskog zenita nije, u opštem slučaju, u ravni slike. Alternativno, širine, kao i dužine, mogu da se definišu preko elemenata nebeske sfere.

Meridijanski presek standardnog sferoida.

Слика 4.6

Znači, ako je Z jedna od tačaka zenita i P svetski pol, onda je luk PZ kolatituda. Veliki krug PZ definiše meridijan posmatrača i ugao koji on čini sa Graničnim meridijanom je geografska dužina posmatrača. Lako se vidi da su geografska i geodetska dužina identične. Označimo ih jednostavno sa λ.

Neka je ρ geocentrična daljina posmatrača, tj. $\rho = CO$. Sada ρ, zajedno sa geografskom širinom i dužinom posmatrača (φ', λ), potpuno definiše njegov položaj u odnosu na centar Zemlje. Poželjno je da se oni izraze preko posmatračeve geodetske širine, dužine i visine h, koje su po pretpostavci poznate. Neka su (x_0, y_0) pravougle koordinate posmatrača i (x, y) pravougle koordinate tačke O'. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \rho\cos\varphi' &= x_0 = x + h\cos\varphi, \\ \rho\sin\varphi' &= y_0 = y + h\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sada je tačka (x, y) na elipsi koja je data sa (4.35), a $\operatorname{tg}\varphi$ je nagib normale u odnosu na krivu u datoj tački, što znači da je $\operatorname{tg}\varphi = -dx/dy$. Diferenciranje jednačine (4.35) daje

$$y = x(1-f)^2 \operatorname{tg}\varphi. \tag{4.37}$$

Ovaj rezultat sada može da se smeni u (4.35), pa je

$$x^2(1+(1-f)^2\operatorname{tg}^2\varphi)=a^2.$$

Odavde i iz (4.37) i x i y mogu da se izraze preko parametra φ. Rezultati se obično pišu u obliku

$$\begin{aligned} x &= aC\cos\varphi, \\ y &= aS\sin\varphi, \end{aligned} \qquad (4.38)$$

gde su C i S funkcije po φ određene sa

$$\begin{aligned} C &= \left[\cos^2\varphi+(1-f)^2\sin^2\varphi\right]^{-1/2}, \\ S &= (1-f)^2C. \end{aligned} \qquad (4.39)$$

Ove funkcije su utabličene u *Explanatory Supplement*, ali za nešto drugačiju vrednost f od one usvojene niže. Verovatno je najbolje, kada nam je to potrebno, da je računamo direktno iz (4.39). Kombinovanje jednačina (4.38) i (4.36) daje traženi izraz za geografske koordinate posmatrača, naime

$$\begin{aligned} \rho\cos\varphi' &= a\cos\varphi\left(C+\frac{h}{a}\right), \\ \rho\sin\varphi' &= a\sin\varphi\left(S+\frac{h}{a}\right). \end{aligned} \qquad (4.40)$$

Ove jednačine su tačne.

Ponekad je zgodno imati definitivnije izraze za geocentričnu daljinu ρ i ugao vertikale v ($\equiv \varphi-\varphi'$). Oni mogu da se predstave kao stepeni red po f. Pojednostavljujući stvar, stavićemo $h=0$ u jednačinama (4.40), a ρ_0 i v_0 biće rezultujuća geocentrična daljina i ugao vertikale. Ovo se strožije odnosi na tačku O' na sl. 4.6 nego na stvarnog posmatrača O, tj. $\rho_0 = CO'$ i $CO'Q = v_0$. Tako je moguće izbeći razvoje u red i za f i za h—veličine ρ_0 i v_0 su prve izvedene i kasnije će se povezati sa ρ i v.

Geocentrična širina O' je $\varphi_0' = O'CQ$ i iz jednačina (4.40) i (4.39) imamo

$$\operatorname{tg}\varphi_0' = \frac{S}{C}\operatorname{tg}\varphi = (1-f)^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Onda je, zbog $v_0=\varphi-\varphi_0'$,

$$\operatorname{tg}v_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_0'}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_0'} = \frac{(2f-f^2)\operatorname{tg}\varphi}{1+(1-f)^2\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Množeći imenilac i brojilac sa $\cos^2\varphi$, posle nekih pojednostavljenja, jednačinu možemo da napišemo kao

$$\operatorname{tg}v_0 = \frac{q\sin 2\varphi}{1+q\cos 2\varphi}, \qquad (4.41)$$

gde je

$$q=\frac{2f-f^2}{1+(1-f)^2}. \qquad (4.42)$$

Ako se sve trigonometrijske funkcije u (4.41) napišu u eksponencijalnom obliku imamo da je

$$e^{2iv_0}=\frac{1+qe^{2i\varphi}}{1+qe^{-2i\varphi}},$$

ili, u logaritamskom obliku,

$$2iv_0 = \log(1 + qe^{2i\varphi}) - \log(1 + qe^{-2i\varphi}).$$

Kako je q mala veličina, logaritamski razvoj može da se iskoristi dajući rezultat

$$v_0 = q\sin 2\varphi - \frac{1}{2}q^2\sin 4\varphi + \frac{1}{3}q^3\sin 6\varphi \cdots. \tag{4.43}$$

Sada, spljoštenost f ima vrednost oko jednog tristotog dela i q je istog reda veličine. Prema tome, članovi preko trećeg reda mogu da se zanemare u razvoju u red.

Sličan razvoj u red može da se izvede za ρ_0, ali ne tako lako. Kvadriranje i dodavanje jednačina (4.40) za $h = 0$, daje

$$\rho_0^2 = a^2C^2(\cos^2\varphi + (1-f)^4\sin^2\varphi).$$

Ako je izveden razvoj u red za C, onda ρ_0 može da se izrazi kao stepeni red, koji, posle znatnog pojednostavljenja, daje

$$\rho_0 = a\left[1 - \frac{1}{2}f + \frac{5}{16}f^2 + \frac{5}{32}f^3 + \left(\frac{1}{2}f - \frac{13}{64}f^3\right)\cos 2\varphi - \left(\frac{5}{16}f^2 + \frac{5}{32}f^3\right)\cos 4\varphi + \frac{13}{64}f^3\cos 6\varphi \cdots\right], \tag{4.44}$$

gde su ponovo zanemareni članovi reda f^4.

Izrazi za ρ_0 i v_0, koji se strogo odnose na tačku O', dobra su aproksimacija za ρ i v, koji mogu da se poprave razmatranjem trougla OCO' na sl. 4.6. Uvećani izgled ovog trougla dat je na sl. 4.7. Primena kosinusnog obrasca na taj trougao daje

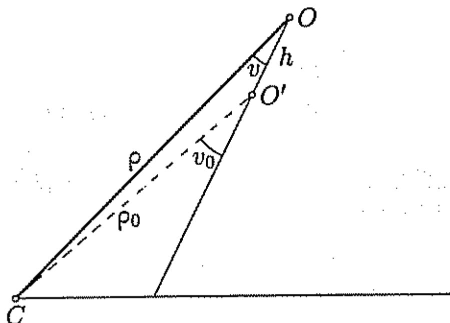
$$\rho^2 = \rho_0^2 + h^2 + 2\rho_0 h\cos v_0.$$

Kako je v_0 mali ugao, možemo da razvijemo $\cos v_0$ kao $1 - \frac{1}{2}v_0^2 \cdots$, dobijajući

$$\rho = (\rho_0 + h)\left[1 - \frac{1}{2}\rho_0 h v_0^2(\rho_0 + h)^{-2} \cdots\right].$$

U stvari, drugi član desne zagrade može da se zanemari. On je reda $v_0^2(h/a)$. Kako je v_0 reda $O(f)$, član je reda $O(f^2h/a)$. Članovi trećeg reda po f su malo važni i, kako je (h/a) znatno manje od f, taj član se može izostaviti. Dakle, sa dovoljnom tačnošću možemo da pišemo

$$\rho = \rho_0 + h. \tag{4.45}$$



Слика 4.7

Primenjujući sinusni obrazac na trougao OPO' imamo da je

$$\rho\sin v = \rho_0\sin v_0.$$

Razvijajući sinuse dva mala ugla i primenjujući slične argumente, dobija se rezultat

$$v = \left(1 - \frac{h}{a}\right)v_0. \tag{4.46}$$

Veličine ρ i v mogu da se dobiju kombinovanjem jednačina (4.43) i (4.46). Rezultati će biti tačni do drugog reda po f i h, ali će sadržati i članove f^3, ali ne članove trećeg reda ostalih argumenata. Time se očekuje tačnost od $0'',001$ u v i 1 cm u ρ.

Dimenzije standardnog sferoida koji je bio usvojen od Međunarodne astronomske unije (*International Astronomical Union*—IAU) 1976. g. su sledeće:

$$\text{Ekvatorski radijus } a = 6378{,}140\,\text{km},$$
$$\text{Spljoštenost } f = 0{,}003\,352\,81 = \frac{1}{298{,}257}. \tag{4.47}$$

Tako se mogu izvesti i veličine

$$\text{Polarni poluprečnik } b = a(1-f) = 6356{,}755\,308\,\text{km}$$

i

$$q = \frac{1-(1-f)^2}{1+(1-f)^2} = 0{,}003\,358\,431.$$

U numeričkom obliku jednačine (4.43) i (4.44) su

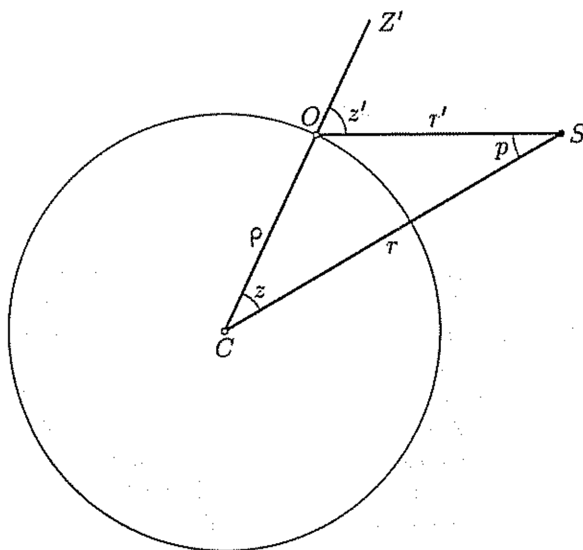
$$\begin{aligned} v_0 &= 692'',7260 \sin 2\varphi - 1'',1632 \sin 4\varphi + 0'',0026 \sin 6\varphi, \\ \rho_0 &= 6367{,}470\,098 + 10{,}692\,297 \cos 2\varphi \\ &\quad - 0{,}022\,443 \cos 4\varphi + 0{,}000\,049 \cos 6\varphi\ \text{km}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

§ 4.6. Geocentrična paralaksa.

Na sl. 4.8, posmatrač je u O, C je centar Zemlje i S je bliski nebeski objekt. Linija CO produžena do Z' daje pravac posmatračevog geocentričnog zenita. Ravan crteža je ravan definisana sa tri tačke C, O i S, i to je ravan vertikalnog kruga kroz S. U opštem slučaju, tako označeni profil Zemlje nije meridijanski presek. Označimo ugao $Z'OS$ sa z'. To je posmatrana zenitna daljina objekta u odnosu na geocentrični zenit. Pravci geodetskog i astronomskog zenita nisu u ravni crteža. Neka su r' i r geocentrična rastojanja objekta i ρ geocentrična daljina posmatrača—sve kako je naznačeno na slici. *Geocentrična paralaksa** p je ugao OSC. Onda je

$$z' = z + p, \tag{4.49}$$

gde je z ugao OCS, koji je



Слика 4.8.

* Geocentrična paralaksa se često naziva *dnevna paralaksa*.

formalno geocentrična zenitna daljina. Znači, uticaj geocentrične paralakse dovodi do rasta *geocentrične zenitne daljine* za p i, kako je promena položaja u ravni OCS, azimut (geocentrični) ostaje nepromenjen.

Primena sinusnog obrasca na trougao OCS daje

$$\sin p = \frac{\rho}{r} \sin z' = \frac{\rho}{r'} \sin z. \tag{4.50}$$

Jasno je da povećanje daljine nebeskog tela smanjuje paralaksu. Pojedine vrednosti paralakse zavisiće od zenitne daljine sa vremenom i takođe od ρ. Potrebna je neka standardizacija. *Ekvatorska horizontska paralaksa* P definiše se kao paralaksa za posmatrača na ekvatoru ($\rho = a$) kada se nebesko telo nalazi na horizontu ($z' = 90°$). Onda je, iz (4.50),

$$\sin P = \frac{a}{r}. \tag{4.51}$$

Ekvatorska horizontska paralaksa, često skraćena na *horizontska paralaksa*, je inverzna mera geocentrične daljine nebeskog tela. Daljina Meseca je utabličena u *Astronomical Almanacu*. Paralaksa pojedinih tela data je sa

$$\sin p = \frac{\rho}{a} \sin P \sin z'. \tag{4.52}$$

Geocentrična paralaktička merenja vrše se samo za tela u Sunčevom sistemu. Zbog kretanja ovih tela oko Sunca i kretanja same Zemlje, menjaće se njihova horizontska paralaksa. Na primer, zahvaljujući ekscentričnosti putanje Meseca oko Zemlje, njegova horizontska paralaksa ima veoma širok interval promene od 54′ do 61′. Prema Mareju (Murray, 1983), srednja vrednost horizontske paralakse Meseca, u skladu sa preporukama Međunarodne astronomske unije, je P_0 data sa

$$\sin P_0 = 3422{,}485 \sin 1'',$$

ili

$$P_0 = 57'02'',6050. \tag{4.53}$$

Horizontska paralaksa planete je mnogo manja. Za Saturn je oko 1″, a za najbližu planetu, Veneru, varira u širokim granicama, 34″ do 5″. Horizontska paralaksa tela na rastojanju jedne astronomske jedinice naziva se *paralaksom Sunca*, jer ona odgovara, ne uzimajući neke male finese, srednjoj paralaksi samog Sunca.

Merenje geocentričnih paralaksi omogućava određivanje daljina tela u Sunčevom sistemu. Ovaj metod je danas istisnut neposrednim radarskim merenjima, ali paralaktički metod zaslužuje neko razmatranje zbog njegovog istorijskog značaja. Šta više, principi dati u interpretaciji merenja daljina, bilo da se mere paralaksom ili radarom, su isti

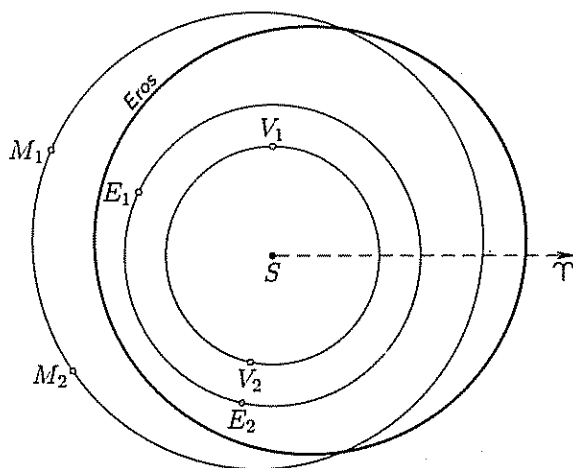
Merenja položaja planeta moraju da se interpretiraju u svetlu gravitacione dinamike. Ako zanemarimo mase planeta u odnosu na masu Sunca i zanemarimo značajne i složene modele nebeske mehanike, postupak interpretacije biće direktan. Može da se smatra da se sva tela na heliocentričnim putanjama kreću samo pod dejstvom Sunca i putanje su zaista Keplerove elipse. Treći Keplerov zakon kretanja planeta može da se primeni uzimajući da su kubovi velikih poluosa (a_P) proporcionalni kvadratima perioda obilaska (T_P), odnosno

$$k^2 a_P^3 = T_P^2, \tag{4.54}$$

gde je k^2 konstanta. Posmatranja položaja na dugom vremenskom intervalu omogućavaju veoma tačno određivanje perioda obilaska za svaku planetu. Sledi da su relativne veličine planetskih putanja poznate. Sve što nedostaje za njihovo apsolutno određivanje je vrednost jedine konstante k^2 u jednačini (4.54), koja zavisi od nepoznate mase Sunca. U stvari, može da se konstruiše relativni model celog Sunčevog sistema, ali da se odredi razmera modela u kilometrima potrebna su merenja rastojanja. U principu, dovoljno je jedno merenje.

Merenja daljina zasnovana na geocentričnoj paralaksi imaju malu unutrašnju tačnost usled male vrednosti paralakse koja se meri. Ako se vrši samo jedno merenje, jasna je potreba da se izabere telo koje će imati najveću moguću paralaksu. Ovo maksimalno poboljšava relativnu tačnost samog merenja daljine i, time, izvedene razmere Sunčevog sistema.

Tabela 4.2 daje putanjske elemente Zemlje i dve najbliže planete, Venere i Marsa. Dalje, ove putanje su šematski prikazane na sl. 4.9, zanemarujući činjenicu da su putanje u različitim ravnima. Tačke E_1, V_1, M_1 predstavljaju položaje tri planete za trenutak kada su Mars, Zemlja i Sunce na istoj liniji, u navedenom redosledu. Kažemo da je Mars u *opoziciji*. Nekoliko meseci kasnije planete prelaze u položaje E_2, V_2, M_2 i Venera je onda tačno između Zemlje i Sunca. Ova konfiguracija se naziva *donja konjunkcija*. (Druga moguća kolinearnost, *gornja konjunkcija*, kada je planeta na suprotnoj strani od Zemlje u odnosu na Sunce, neće se ovde razmatrati.) Jasno je da najveće približavanje Venere i Marsa Zemlji odgovara donjoj konjunkciji i opoziciji, redom. Mars ima ekscentričnost putanje od oko 0,1 i njegova daljina od Zemlje u opozicijama varira znatno, zavisno od ekliptičke longitude (ili doba godine) dešavanja opozicije. S druge strane, putanje Zemlje i Venere su bliske kružnicama. Postoji mala varijacija u daljini Venere od Zemlje između uzastopnih donjih konjunkcija.



Слика 4.9

Naravno, Venera ne može da se posmatra u donjoj konjunkciji zbog njene potpune blizine Suncu u tom trenutku—izuzimajući veoma speci-

Tabela 4.2. Putanjski elementi tela prikazanih na sl. 4.9

	Velika poluosa [a (AJ)]	Ekscentričnost [e]	Longituda perihela [ϖ]	Nagib putanje [i]
Venera	0,7233	0,0068	131°,5	3°,4
Zemlja	1	0,0167	102 ,5	0
Mars	1,5236	0,0939	335 ,7	1 ,9
Eros	1,4581	0,2227	178 ,5	10 ,8

fične okolnosti kada Venera stvarno prelazi Sunčev disk. U principu, paralaktička merenja Venere biće moguća tačnim vremeniranjem sa različitih tačaka Zemljine površine njenog prolaza po disku Sunca. Nepoznat uticaj guste atmosfere Venere izobličio je merenja koja su pokušana krajem 19. veka u poslednjem prolazu Venere. Onda je posmatrački napor usmeren prvenstveno na opozicije Marsa, a zatim i na malu planetu Eros, koja je bila i otkrivena negde u to doba.

Kako pokazuju sl. 4.9 i tabela 4.2, Eros se kreće po ekscentričnoj putanji koja se održava unutar 0,16 AJ od Zemlje. Veliki programi paralaktičkih merenja bili su preduzeti 1901. i 1931. g. kada su bile najveće opozicije. Rezultati su bili nova vrednost paralakse Sunca i revizija razmera planetskog sistema. Paralaksa Sunca određena iz merenja u opozicijama 1931. g. bila je uopšte usvojena za standard sve do ranih 60-tih.

Radarska astronomija je omogućila mnogo neposredniji metod merenja daljina. Odnos šuma i signala u radarskom odjeku veoma je osetljiv na oblast i proporcionalan je četvrtom stepenu daljine. Međutim, Venera je planeta koja daje snažan radarski eho i prva radarska veza je ostvarena u donjoj konjunkciji 1959. g. Konzistentni i konačni rezultati bili su dobijeni u sledećoj donjoj konjunkciji 1961. g. Ova i sledeća merenja omogućuju osnovu za nova određivanja paralakse Sunca i astronomske jedinice. Vrednosti ovih veličina usvojene su u mnogo ranijim IAU sistemima konstanti (IAU, 1977) i date su sa

$$\text{1 AJ}, \quad A = 1{,}495\,978\,70 \cdot 10^{11}\ \text{m},$$
$$\text{Paralaksa Sunca}, \quad P_0 = 8'',794\,148. \qquad (4.55)$$

Ove dve konstante su međusobno strogo povezane. Iz jednačine (4.51)

$$\sin P_0 = \frac{a}{A}. \qquad (4.56)$$

Astronomska jedinica više se ne definiše kao prava velika poluosa Zemljine putanje, koja je, u svakom slučaju, promenljiva usled planetskih poremećaja. Umesto toga, definisana je u gravitacionoj teoriji na sledeći način. Konstanta k u jednačini (4.54) poznata je kao *Gausova* (GAUSS) *gravitaciona konstanta*. To je definiciona konstanta u IAU sistemu konstanti i njena usvojena vrednost je

$$k = 0{,}017\,202\,098\,95. \qquad (4.57)$$

Ova vrednost se očuvala u svim ranijim revizijama sistema konstanti i ne izgleda da će bilo kad u budućnosti biti izložena promeni. Ona je jednaka približno količniku 2π i broja dana u godini. Sada se astronomska jedinica definiše kao daljina za koju se a_P mora predstaviti sa (4.54) za gornju vrednost za k i T_P je izraženo u danima. Vrednost navedena u (4.55) odgovara ovoj definiciji astronomske jedinice i razlikuje se delimično od srednje udaljenosti Zemlje od Sunca. Vrednost paralakse Sunca sada izvedena iz radarskih posmatranja ima tačnost od jedne lučne mikrosekunde. Ovo je daleko izvan domašaja bilo kakvih položajnih posmatranja. Najnovija pogodna opozicija Erosa 1975. g. nije bila prilika za obnavljanje paralaktičkih merenja, već prilika za izučavanje fizičke prirode malih planeta u srazmerno malim zonama. Posebno, radarska izučavanja Erosa učinjena su radi ispitivanja njegovih topografskih osobina. Dok su takva istraživanja moguća za većinu velikih planeta, ona su mahom neizvodiva za male planete zbog njihovih malih površina.

Paralaktička merenja Meseca omogućila su određivanje daljine koja je nedvosmisleno tačnija od daljina planeta dobijenih istom metodom. Uzrok ovome je jednostavan—paralaksa Meseca je nekoliko stotina puta veća. Paralaktička određivanja daljine Meseca, takođe, su prevaziđena, prvo radarskim, a kasnije i laserskim merenjima. Reflektori potrebni za laserska merenja postavili su astronauti Apola. Više nema situacije u kojoj bi paralaktička merenja daljina u Sunčevom sistemu bila primarna. Danas, zaista, geocentrična paralaksa ima manje fundamentalnu ulogu; međutim, još uvek mora da se uzme u obzir njen uticaj na koordinate nebeskih tela.

§ 4.7. Uticaj geocentrične paralakse na rektascenziju i deklinaciju.

U poslednjem paragrafu je stavljeno da uticaj geocentrične paralakse povećava geocentričnu zenitnu daljinu tela ali ne menja njegov azimut. Ako je paralaksa dovoljno mala, jednačina (4.50) može da se napiše kao

$$dz = \frac{\rho}{r} \sin z. \tag{4.58}$$

Pomeranje po nebeskoj sferi je obilka datog u §1.7 i mogu da se koriste opšte formule (1.29). Neophodno je samo staviti $k = \rho/r$ i identifikovati tačku (α_0, δ_0) sa geocentričnim zenitom. Onda je $\delta_0 = \varphi'$, geografskoj širini posmatrača, a α_0 je mesno zvezdano vreme. Ovo znači da je $\alpha_0 - \alpha = t$, časovnom uglu objekta. Jednačine (1.29) onda daju

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{\rho}{r} \cos\varphi' \sin t \sec\delta, \\ d\delta &= \frac{\rho}{r}(\cos\varphi' \cos t \sin\delta - \sin\varphi' \cos\delta). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Kako su ove formule tačne samo do prvog reda (ρ/r), one se neće koristiti za paralaksu Meseca. Međutim, one su adekvatne za paralaksu tela na heliocentričnim putanjama, ali ne u neposrednoj okolini Zemlje, kada je paralaktički ugao nekoliko lučnih sekundi. Dalje, ako je paralaksa veoma mala, kao u slučaju spoljnih planeta, nije bitna razlika između geografske i geodetske širine i dovoljno je staviti umesto ρ ekvatorski poluprečnik Zemlje. Kao i uvek, formule prvog reda se koriste obazrivo; stroge formule se lako izvode u ovom slučaju.

Uzimajući centar Zemlje za početak, neka su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ vektori položaja tela S i posmatrača O. Onda, kao što je već pokazano u jednačini (3.7), vektor OS od posmatrača do objekta dat je sa

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{R}. \tag{4.60}$$

Ove oznake su u skladu sa ranijim dijagramom, sl. 4.8. Usvojimo da je položajni vektor $\mathfrak{R}$ tačno poznat. To je vektor intenziteta ρ pravca ka geocentričnom zenitu, koji je u ekvatorskim koordinatama

$$\mathfrak{R} = \rho(\cos\varphi' \cos s, \cos\varphi' \sin s, \sin\varphi'), \tag{4.61}$$

gde je s mesno zvezdano vreme posmatranja. Pretpostavljajući da je jedno od $\mathfrak{r}$ ili $\mathfrak{r}'$ poznato, jednačina (4.60) može da se iskoristi za dobijanje drugog.

Pretpostavimo, na primer, da su geocentrična rektascenzija i deklinacija (α, δ) i horizontska paralaksa Meseca P izvedeni iz *Astronomical Almanaca*. Onda, iz (4.51),

$$\mathbf{r} = a \csc P(\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta) \tag{4.62}$$

i svaka komponenta ovog vektora može da se izračuna. Ako sada komponente vektora $\mathbf{r}'$ označimo sa (x', y', z') i posmatranu rektascenziju i deklinaciju sa (α', δ'), jednačina (4.60) u skalarnom obliku je

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\delta'\cos\alpha' = a\csc P\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\varphi'\cos s, \\ y' &= r'\cos\delta'\sin\alpha' = a\csc P\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\varphi'\sin s, \\ z' &= r'\sin\delta' \qquad\quad = a\csc P\sin\delta - \rho\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Kada se jednom izračunaju (x', y', z') iz ovih jednačina, (α', δ') mogu da se izvedu kao

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}, \qquad \delta' = \operatorname{arctg}\frac{z'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{1/2}}. \tag{4.64}$$

Zahteva se malo pažnje u korišćenju ovih formula da bi se uklonila moguća dvojnost rektascenzije. Za δ' je uzeta, u svakom slučaju, osnovna vrednost inverznog tangensa, ali za α' mora da se doda 12^h na osnovnu vrednost ako je $x' < 0$.

Zaključićemo ovaj paragraf ilustrujući numeričkim primerom inverzni proces računanja geocentričnog položaja posmatrača. Takođe je ilustrovan račun sopstvenih geocentričnih koordinata posmatrača kako je opisan u §4.5.

Primer. *Izvršena su kombinovana optička i radio posmatranja veštačkog satelita sa stanice na geodetskoj širini* 39°42′48″ N. *Nadmorska visina stanice je* 456 m. *Iz ovih posmatranja dobijeno je da su daljina i ekvatorske koordinate satelita* $r' = 1735{,}87$ km, $\alpha = 7^h12^m19^s$, $\delta = -21°42'21''$, *i posmatranje je izvršeno u* $9^h17^m34^s$ *mesnog zvezdanog vremena. Izračunati geocentrični položaj i daljinu satelita.*

Koristićemo oznake ovog paragrafa i §4.5 bez dodatnih objašnjenja. Prvo mora da se izračuna vektor položaja posmatrača $\mathfrak{R}$. Standardni sferoid je dat sa

$$a = 6378{,}14\,\text{km}, \qquad f = 3{,}35281 \cdot 10^{-3}.$$

Za ovaj dati posmatrački položaj imamo

$$\varphi = 39°{,}7133, \qquad \text{i} \qquad \frac{h}{a} = 7{,}15 \cdot 10^{-5}.$$

Dalje je

$$s = 139°{,}3917$$

Primena jednačina (4.39) i (4.40), redom, daje

$$\begin{aligned} C(\varphi) &= 1{,}001\,369\,3, & \rho\cos\varphi' &= 4913{,}459\,\text{km}, \\ S(\varphi) &= 0{,}994\,665\,8, & \rho\sin\varphi' &= 4053{,}845\,\text{km}. \end{aligned}$$

Onda, iz jednačine (4.61), računamo

$$\mathfrak{R} = (-3730{,}183;\ 3198{,}095;\ 4053{,}845)\,\text{km}.$$

Vektor $\mathbf{r}'$ se računa iz posmatračkih podataka

$$r' = 1735{,}87\,\text{km}, \qquad \alpha' = 108°{,}0792, \qquad \delta' = -21°{,}7058,$$

dajući

$$\mathbf{r}' = (-500{,}498;\ 1533{,}162;\ -641{,}997)\,\text{km}.$$

Tako geocentrični vektor $\mathfrak{r}$ može da se izračuna iz

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{R} = (-4230{,}681;\ 4731{,}257;\ 3411{,}849)\,\mathrm{km}.$$

Konačno, konvertujući iz pravouglih u sferne koordinate imamo

$$r = 7205{,}843\,\mathrm{km},$$
$$\alpha = 131^\circ{,}8030 = 8^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}13^{\mathrm{s}},$$
$$\delta = +28^\circ{,}2607 = +28^\circ 15' 38''.$$

§ 4.8. Dnevna aberacija.

Geocentrična paralaksa je bitna popravka u transformaciji sa topocentričnih na geocentrične koordinate, ali samo za tela u Sunčevom sistemu. Naprotiv, aberaciona popravka—dnevna aberacija—nezavisna je od daljine tela i mora da se unese u položaj svakog nebeskog objekta. Međutim, to nije veliki efekt. Ekvatorska brzina rotacije Zemlje je samo $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ od brzine svetlosti i promena položaja izazvana dnevnom aberacijom nikad ne prelazi $\frac{1}{3}$ lučne sekunde. Odatle, klasični pristup prvog reda je dovoljan i relativistički efekti mogu da se zanemare.

Vratimo se jednačini (3.13) koja daje aberaciono pomeranje za posmatrača koji se kreće brzinom $V\mathfrak{n}$, gde je $\mathfrak{n}$ jedinični vektor. Pojednostavljujući delimično oznake, promena položaja za izvor u pravcu $\mathfrak{s}$ data je sa

$$d\mathfrak{s} = -\frac{V}{c}\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{n}). \tag{4.65}$$

Ovo pomeranje je identično po formi sa onim datim u jednačini (1.31), tako da opet važi razmatranje §1.7. Posebno, promene rektascenzije i deklinacije izvedene su iz (1.29) kao

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{V}{c}\,\mathrm{sc}\,\delta\cos\delta_0\sin(\alpha_0 - \alpha) \\ d\delta &= \frac{V}{c}\left[\cos\delta\sin\delta_0 - \sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha_0 - \alpha)\right], \end{aligned} \tag{4.66}$$

gde su (α_0, δ_0) ekvatorske koordinate određene jediničnim vektorom $\mathfrak{n}$.

Razmotrimo posmatrača na geografskoj širini φ' i geocentričnom rastojanju ρ. Ako ω predstavlja ugaonu brzinu Zemlje, brzina posmatrača u odnosu na centar Zemlje biće

$$V = \rho\omega\cos\varphi'. \tag{4.67}$$

Ova brzina ima pravac ka istoku. Ovo znači da je vektor $\mathfrak{n}$ usmeren ka istočnoj tački horizonta posmatrača i zato je

$$\alpha_0 = s + 6^{\mathrm{h}}, \qquad \delta_0 = 0. \tag{4.68}$$

Stavljajući ove rezultate u jednačine (4.66) i uvodeći časovni ugao izvora t, imamo

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\rho\omega\cos\varphi'}{c}\,\mathrm{sc}\,\delta\cos t, \\ d\delta &= \frac{\rho\omega\cos\varphi'}{c}\sin\delta\sin t. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Ove formule su dovoljno tačne za sve namene. U stvari, efekt je tako mali da se neke dalje aproksimacije rade često. Razlika geografske i astronomske širine obično se izostavlja i obično je dovoljno izjednačiti ρ sa ekvatorskim poluprečnikom Zemlje. Sada, zamenjujući vrednost ω sa 2π radijana po zvezdanom danu, ili u SI jedinicama

$$\omega = 7{,}292 \cdot 10^{-5}.$$

Onda, uz gore dato pojednostavljenje, jednačine (4.69) se preko praktičnih jedinica pišu kao

$$\begin{aligned} d\alpha &= 0^{s}{,}0213 \cos\varphi \sec\delta \cos t \\ d\delta &= 0''{,}320 \cos\varphi \sin\delta \sin t. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Strogo govoreći, ove formule daju razlike između topocentričnih koordinata i onih koje bi dobio posmatrač nepokretan u odnosu na centar Zemlje. Radi kompletiranja transformacije na geocentrične koordinate takođe je potrebno uneti popravku za paralaksu. Kada su oba uticaja mala, redosled njihovog računanja je nevažan. Međutim, ako je paralaksa znatno veća, neophodno je pre primene strogih formula za paralaksu da se ukloni aberacija.

Rečeno je da se relativistički efekti mogu zanemariti zbog malosti (V/c). Ovo se odnosi na specijalne relativističke efekte u aberaciji. Zanemarivanje opšte relativističkog savijanja svetlosti u Zemljinom gravitacionom polju zahteva posebnu potvrdu. U stvari, ovo savijanje, recimo $\delta\psi$, ne može da pređe $2m/\rho$ radijana, gde je m jedna polovina Švarcšildovog poluprečnika Zemlje, tj.

$$m = \frac{GM_{\oplus}}{c^2} = 4{,}4\,\mathrm{mm}. \tag{4.71}$$

Odatle je

$$\delta\psi < 0''{,}0003, \tag{4.72}$$

opravdavajući sopstveno zanemarivanje.

Zadaci

4.1. Dokazati da je azimut maksimalan u trenutku kada refrakcija ne utiče na deklinaciju. [Smart (1977)]

4.2. Oceniti koliko dugo, u okolini letnjeg solsticija, neki deo Sunčevog diska je neprekidno iznad horizonta za položaj na arktičkom krugu (polarni krug).

4.3. Teorijski zalaz Sunca je definisan kao trenutak kada topocentrična zenitna daljina centra Sunčevog diska iznosi 90°. Posmatrani zalaz znači konačni nestanak gornjeg Sunčevog ruba. Pokazati da je interval između posmatranog i teorijskog zalaza Sunca na širini φ dat približno sa

$$\Delta T = 3\tfrac{1}{3}^{m}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\delta\right)^{-1/2},$$

gde je δ deklinacija Sunca.

4.4. Astronomski sumrak, po definiciji, počinje ili se završava kada topocentrična zenitna daljina Sunca bude 108°. Pokazati da postoji period od oko tri meseca tokom leta kada nema noćne tame na širini od 56°.

4.5. Ako formula refrakcije ima tačan oblik $R = K \operatorname{tg} z_0$, kako se indeks refrakcije menja sa visinom? Odrediti K i debljinu atmosfere preko indeksa refrakcije na površini

4.6. Uzimajući za refrakciju formulu $R = K \operatorname{tg} z_0$, pokazati da se, usled refrakcije, disk Sunca pojavljuje kao elipsa spljoštenosti f date sa

$$f = \frac{K \operatorname{sc}^2 z}{1 - K},$$

gde je z topocentrična zenitna daljina centra Sunca.

4.7. Ako su a i b ekvatorski i polarni poluprečnik Zemlje (pretpostavimo sferoidne), pokazati da je maksimalna vrednost ugla koji dostiže vertikala na geodetskoj širini $\varphi' = \operatorname{arctg}(a/b)$.

4.8. Izračunati geocentričnu daljinu, geocentričnu širinu i ugao vertikale za posmatrača na nivou mora i širini $55°52'$.

4.9. Koristeći rezultate prethodnog zadatka, izračunati maksimalnu geodetsku visinu koja se može dosegnuti u posmatračkom mestu, satelitom koji se kreće po kružnoj putanji poluprečnika 8798 km i nagiba $18°36'$ u odnosu na ekvator.

4.10. Pokazati da je, ako je horizontska paralaksa tela P tako mala da se $\sin^2 P$ može zanemariti, prividna dnevna putanja tela, za posmatrača na širini φ, mali krug poluprečnika $90° - \delta + P \sin\varphi \cos\delta$, opisan oko tačke spuštene za $P \cos\varphi \sin\delta$ ispod pola. [Smart (1977)]

4.11. Definisati i razlikovati astronomski, geodetski i geografski zenit. Utvrditi šta se dešava sa uglom vertikale i pokazati da je, na geodetskoj širini φ, dat sa

$$\operatorname{tg} v = \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)},$$

gde je e ekscentričnost standardnog sferoida.

I atmosferska refrakcija i geocentričan paralaksa menjaju zenitnu daljinu nebeskog tela. Na koju zenitsku tačku se pomeranje odnosi?

Глава Пета

Merenja rektascenzije i deklinacije

§ **5.1. Uvod.** Meridijanski krug, kratko prikazan u §2.8, predstavlja klasični instrument položajne astronomije. Detaljna teorija instrumenta je van domašaja ove knjige, ali neke osnovne popravke instrumenta biće razmatrane niže. Popravke instrumenta se dele na dva osnovna tipa, naime, one koje potiču od nesavršenosti samog instrumenta i one koje potiču od neizbežnog, malog neslaganja konstrukcije i montaže instrumenta. Poslednje su čisto geometrijskog karaktera i razmatraju se metodama sferne astronomije.

U isto vreme, sa popravkama instrumenta, u praksi je normalno praviti i popravke za refrakciju i dnevnu aberaciju, a ako je neophodno i za dnevnu paralaksu. Na ovaj način, geocentrične koordinate zvezda se dobijaju više ili manje direktno iz posmatranja. One se, takođe, spominju kao *prividne koordinate*, koje su formalno uvedene definicijom koja sledi

Definicija. *Prividne koordinate zvezde, za jedan datum, su njene koordinate na geocentričnoj nebeskoj sferi koje se odnose na pravi ekvator i pravi ekvinokcij istog tog datuma.*

Geocentrične, prividne koordinate ne zavise od pojedinih posmatrača, ali se prilično brzo menjaju sa datumom, uglavnom usled godišnje aberacije i precesije. Godišnjak koji publikuje, Astronomski računski institut (*Astronomisches Rechen-Institut*) u Hajdelbergu, nazvan je *Prividni položaji fundamentalnih zvezda* [*The Apparent Places of the Fundamental Stars* (APFS)]. Namenjen je za meridijanska posmatranja i daje prividnu rektascenziju i deklinaciju za 1535 zvezda na desetodnevnim intervalima.

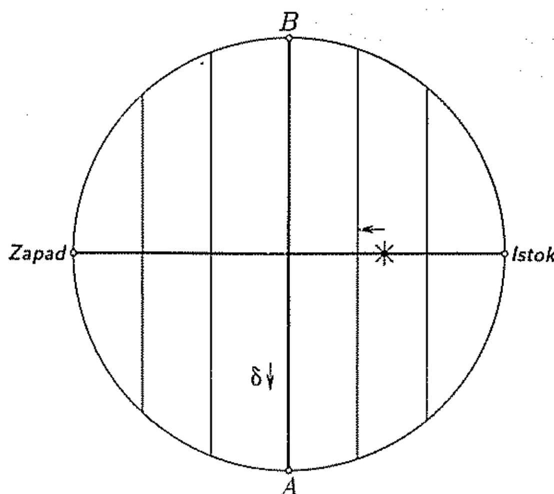
§ **5.2. Greške meridijanskog kruga.** Tipičan izgled vidnog polja pasažnog instrumenta u meridijanu ilustrovan je na sl. 5.1. Mada su moguće znatne promene u konstrukciji instrumenta, posmatranja se u osnovi sastoje od određivanja trenutaka prolaza lika zvezde preko niza vertikalnih konaca (pri tome lik zvezde klizi po horizontalnom koncu mikrometra). Srednja vrednost ovih trenutaka usvaja se kao posmatrano vreme prolaza zvezde kroz meridijan. Ono odgovara prolazu lika zvezde preko *srednjeg konca* koji se skoro podudara, ali ne sasvim, sa

položajem centralnog krst-konca AB. Neka T bude vreme prolaza preko srednjeg konca kako je određeno opservatorijskim časovnikom koji održava mesno zvezdano vreme. Ako je ΔT *popravka časovnika*, rektascenzija zvezde biće zapisana kao

$$\alpha' = T + \Delta T. \tag{5.1}$$

Fundamentalno određivanje popravke časovnika zahteva da je položaj ekvinokcija na nebu poznat, pošto je mesno zvezdano vreme časovni ugao tog ekvinokcija (♈ tačke). Međutim, privremena vrednost ΔT može se dobiti korišćenjem vremenskih radio signala, koji će dati svetsko vreme sa kojeg se može preći na Griničko zvezdano vreme pomoću tablica u *Astronomical Almanacu* (Astronomski Almanah); pa se mesno zvezdano vreme dobija iz

$$s = S + \lambda, \tag{5.2}$$



Vidno polje pasažnog instrumenta.
Слика 5.1

gde je λ geografska dužina (ili longituda) instrumenta. Napomenimo da je s potrebnom tačnošću sama longituda poznata *a priori*, što je, u stvari, neprihvatljivo, jer je nađeno da geografska širina i geografska dužina instrumenta sadrže slabe varijacije usled kretanja Zemljinih polova. Ovo će biti razmatrano u §5.5.

Dok zvezda prolazi kroz vidno polje, prikazano na sl. 5.1, pri zauzimanju visine teleskop se mora podesiti tako da horizontalni konac prepolovi lik zvezde, čime je omogućeno tačno merenje deklinacije zvezde; za visinu zvezde u meridijanu pravilno je uzeti zbir njene deklinacije i kolatitude instrumenta $(90° - \varphi)$. Pogodnom montažom vertikalnog, graduisanog kruga koji je pričvršćen za obrtnu osovinu instrumenta, direktnim čitanjem D možemo imati deklinaciju zvezde. Tada se deklinacija zvezde može definisati kao

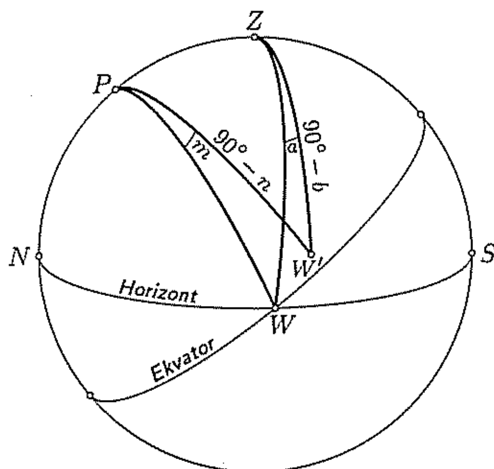
$$\delta' = D + d, \tag{5.3}$$

gde je d mala konstanta koja se mora uključiti, jer gore pomenuta montaža instrumenta nije precizna.

Kada se pasažni instrument obrće oko svoje osovine, svi vertikalni konci (preciznije, svaka tačka preseka sa horizontalnim koncem) opisuju krivu na nebeskoj sferi. Ove krive biće skup malih paralelnih krugova čije su ravni normalne na obrtnu osovinu instrumenta. Njima paralelan veliki krug definiše *kolimacijsku ravan*. Ako bi konci bili idealno postavljeni, ovaj krug bi se poklapao sa srednjim koncem, ali, u praksi, srednji konac je pomeren izvan kolimacijske ravni za mali ugao c, koji je poznat kao *konstanta kolimacije*. Ona se smatra pozitivnom ako je srednji konac istočno od kolimacijske ravni.

Pravac obrtne osovine instrumenta definiše dve dijametralno suprotne tačke na nebeskoj sferi, E' i W'. Za perfektno postavljenu osovinu ove bi se tačke poklopile sa istočnom i zapadnom tačkom horizonta. Međutim, neophodno je za svako malo nepoklapanje uvesti još dva parametra. Pomeranje osovine po azimutu (jugo-zapadno) naziva se *konstanta azimuta* a, a uzdignutost zapadnog kraja obrtne osovine naziva se *konstanta nagiba* b. Kako je prikazano na sl. 5.2, konstante a i b su pozitivne i definisane su kao

$$a = WZW', \qquad b = 90° - ZW'. \tag{5.4}$$



Слика 5.2

Pet popravki koje su definisane, dovoljne su za analizu meridijanskih posmatranja. Očekujemo da će ovih pet popravki biti male veličine za dobro-postavljen instrument!

Često je pogodnije izraziti popravke posmatranjem obrtne osovine u ekvatorskoj, nego u horizontalnoj ravni. Male veličine m i n su definisane kao odstupanje tačke W' od istočne tačke horizonta u rektascenziji i deklinaciji, redom, tj.

$$m = WPW', \quad n = 90° - PW'. \tag{5.5}$$

Dve grupe malih veličina (m, n) i (a, b) mogu se povezati rešavanjem sfernog trougla PZW'. Stranice ovog trougla su:

$$PW' = 90° - n, \qquad W'Z = 90° - b, \qquad PZ = 90° - \varphi;$$

dok su uglovi

$$W'PZ = 90° - m \quad \text{i} \quad W'ZP = 90° + a.$$

Stoga, primenom četvoroelementnog obrasca imamo

$$-\sin\varphi \sin a = \cos\varphi \operatorname{tg} b - \cos a \operatorname{tg} m,$$

odakle je

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \sin\varphi + \operatorname{tg} b \operatorname{sc} a \cos\varphi. \tag{5.6}$$

Veličina n se dobija iz kosinusnog obrasca kao

$$\sin n = \sin b \sin\varphi - \sin a \cos b \cos\varphi. \tag{5.7}$$

Pošto su a, b, m i n sve male veličine, to je retko potrebno koristiti za m i n njihove tačne izraze. Sa uobičajenom aproksimacijom malog ugla, mogu se lako izvesti sledeći izrazi:

$$m = a \sin\varphi + b \cos\varphi, \quad n = b \sin\varphi - a \cos\varphi. \tag{5.8}$$

Uopšteno rečeno, ove veličine su dovoljne tačnosti.

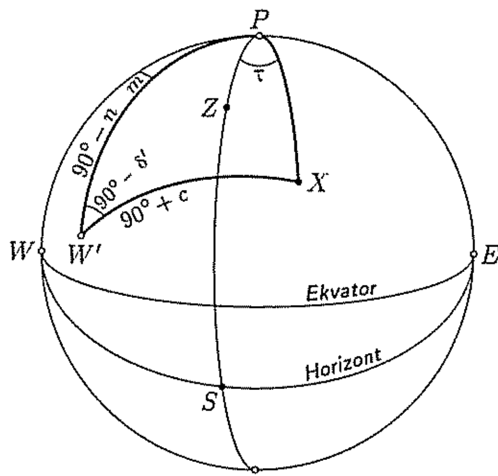
Poslednja izjava može izgledati malo neočekivana u pogledu ranije pomenutih nedostataka formule prvog reda. Ipak, jednačine (5.8) su tačnije od prvih, očigledno pretpostavljenih, pošto nemaju članove drugog reda. Prinude za smanjenje grešaka instrumenta su, ipak, manje stroge nego njihovi, na prvi pogled, mogući ispadi. Odsustvo članova drugog reda posledica je geometrijske simetrije oko meridijana. Kad god je potrebna popravka prvog reda, odgovarajuća popravka drugog reda automatski otpada, i samo kada je popravka prvog reda jednaka nuli potrebni su članovi drugog reda za razmatranje. Ako se takve okolnosti pojave, to će biti naznačeno u tekstu, ali u drugim prilikama sledećih razmatranja biće zadržana samo tačnost prvog reda.

Konstante instrumenta obično su izražene u vremenskim jedinicama, pošto su, uglavnom, potrebne za redukciju posmatranja rektascenzije. Izuzeta je samo konstanta deklinacije d, koju je pogodnije izraziti u lučnim sekundama.

§ 5.3. Otklanjanje instrumentskih grešaka.

Koordinate (α', δ') koje su razmatrane u prethodnom paragrafu, bile su opisane kao merena rektascenzija i deklinacija; one su bile popravljene samo za greške ΔT i d, koje se mogu direktno dodati časovniku i čitanju kruga. Neka su (α, δ) „prave" koordinate zvezde u meridijanu, koja kao da je posmatrana idealno postavljenim instrumentom. Zbog izostavljanja popravke za refrakciju ove koordinate će biti topocentrične. Pretpostavimo da je X položaj zvezde na nebeskoj sferi u trenutku registrovanja prolaza kroz meridijan. Kao što je pokazano na sl. 5.3, ovo se događa ranije od „pravog" prolaza za vremenski interval τ, gde je

$$\tau = \alpha - \alpha'. \qquad (5.9)$$



СЛИКА 5.3

Razmatrajmo sferni trougao PXW'. Po definiciji, konstante instrumenta su $PW' = 90^\circ - n$, $W'X = 90^\circ + c$ i $W'PX = 90^\circ - m + \tau$. Dalje je, $PX = 90^\circ - \delta$. Primenom sinusnog obrasca na ovaj trougao dobija se

$$-\sin c = \sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(m - \tau).$$

Posle uobičajenih aproksimacija malih uglova, ovo se svodi na

$$\tau = \alpha - \alpha' = m + n \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta. \qquad (5.10)$$

Ovo je poznato kao Beselova (BESSEL) formula, koja će omogućiti određivanje prave rektascenzije.

Sferni ugao $PW'X$ je jednostavno povezan sa očitavanjem kruga. U stvari, sa podesnom definicijom nulte tačke, možemo napisati

$$PW'X = 90^\circ - \delta'. \qquad (5.11)$$

Tada je prava deklinacija data preko kosinusnog obrasca kao

$$\sin\delta = -\sin n \sin c + \cos n \cos c \sin\delta'. \tag{5.12}$$

Ova jednačina pokazuje da su između δ i δ' samo razlike drugog reda, te nije bitno koja se deklinacija koristi na desnoj strani jednačine (5.10). Ipak, za tačno određivanje same deklinacije može biti potrebno uključivanje članova drugog reda. Razvojem u red, jednačina (5.12) daje približan rezultat

$$\delta' - \delta = \frac{1}{2}(n^2 + c^2)\,\mathrm{tg}\,\delta' + nc\,\mathrm{sc}\,\delta'.$$

Međutim, ovde su korišćeni radijani, pa će rezultat izražen u praktičnim jedinicama biti

$$\delta' - \delta = 225''\sin 1''\left[\frac{1}{2}(n^2 + c^2)\,\mathrm{tg}\,\delta' + nc\,\mathrm{sc}\,\delta'\right]. \tag{5.13}$$

Odgovarajuća Beselova formula se dobija ako se (m, n) zamene sa (a, b). Korišćenjem jednačina (5.8), dobija se novi rezultat, poznat kao Majerova (MAYER) formula:

$$\tau = \left[a\sin(\varphi - \delta) + b\cos(\varphi - \delta) + c\right]\mathrm{sc}\,\delta. \tag{5.14}$$

Beselova formula se više koristi za rutinsku redukciju meridijanskih posmatranja, ali je Majerova formula još podesnija.

Svi ovi rezultati izvedeni su za gornju kulminaciju. Podjednako dobro, ove formule važe za gornju kulminaciju cirkumpolarne zvezde, ali kod donje kulminacije postoje male razlike. Potrebna analiza je vrlo slična ovoj već datoj, tako da će detalji biti izostavljeni i zadržaćemo se samo na rezultatima. Beselova formula za donju kulminaciju biće

$$\tau = \alpha - \alpha' = m - n\,\mathrm{tg}\,\delta - c\,\mathrm{sc}\,\delta, \tag{5.15}$$

gde je, još jednom, τ srednji trenutak prave kulminacije minus trenutak zabeležene kulminacije. Veličina α' je sada, jasnoće radi, izmereno mesno zvezdano vreme kulminacije plus 12 sati. Dalje, Majerova formula biće oblika

$$\tau = \left[a\sin(\varphi + \delta) + b\cos(\varphi + \delta) - c\right]\mathrm{sc}\,\delta. \tag{5.16}$$

Teorija sadržana u jednačinama od (5.10) do (5.16) dovoljna je da obezbedi popravke posmatrane rektascenzije i deklinacije za glavne instrumentske greške, pretpostavljajući, naravno, da su same instrumentske konstante već poznate. Određivanje neke od ovih veličina povlači sa sobom posmatranje zvezda. Osim toga, pošto je potrebno stalno kontrolisati instrumentske konstante, njihovo određivanje je, u praksi, pretvoreno u sastavni deo programa posmatranja zvezda. Detaljan opis takvog programa za postavljanje fundamentalnog sistema koordinata zvezda dat je u glavi 17 (Woolard & Clemence, 1966). Procedura koja je niže opisana jeste veštačka. Namenjena je samo za ilustrovanje principa uključenih u određivanje svake konstante instrumenta i istovremeno pokazuje da njeno određivanje neće dovesti u pitanje nezavisnost posmatranja sledeće zvezde. Osim toga, jednostavnosti radi, zanemaren je i značajni uticaj refrakcije.

Meridijanski instrument je, na neki način, opremljen za merenja u žižnoj ravni. Na primer, jedno od mogućih načina je, dodati krstu-konaca, prikazanih na sl. 5.1, još jedan pokretan konac koji se može pomerati preko vidnog polja skladno mikro-

metru za koji je pričvršćen. Sada je moguće izvršiti seriju merenja sa ovim mikrometrom koji će dati obe konstante, kolimaciju i nagib. Osim toga, ova merenja se ne oslanjaju na posmatranja svake zvezde.

Za određivanje konstante kolimacije c, postavljena su dva kolimatora da obezbede repere u blizini severne i južne tačke horizonta, koji se neće tačno poklapati sa glavnim tačkama horizonta, ali se mogu postaviti tako da precizno budu u dijametralno suprotnim pravcima. Pasažni instrument se tada usmerava na svaki od ova dva kolimatora, a položajem njegovog nepokretnog sistema vertikalnih konaca merenja se vrše u odnosu na svaki od definisanih pravaca. Ova merenja se svode prvenstveno na vrednost kolimacijske konstante c u mikrometarskim jedinicama.

Da bi izmerili konstantu nagiba b, neophodno je imati pasažni instrument sa durbinom u vertikalnom položaju. Obično je pravac nadira bolji nego pravac zenita, tako da posuda sa živom može da obezbedi horizontalnu reflektujuću površinu. Upoređivanje položaja nepokretnih konaca sa njihovim, od živine površine, reflektovanim likovima, omogućava da se odredi konstanta b, opet u mikrometarskim jedinicama. Jedna od metoda koja obezbeđuje da teleskop pri navođenju bude tačno vertikalan, jeste podešavanje njegove visine sve dok se horizontalni konac ne poklopi sa njegovim reflektovanim likom. Ovo podešavanje nije kritično za merenje gore opisanog b, ali obezbeđuje tačan način određivanja geografske širine. Deklinacija nadira je $-\varphi$. U ovim okolnostima za očitavanje je uzeta skala deklinacije. Ovu vrednost geografske širine treba korigovati za instrumentske konstante—glavna je deklinacijska konstanta d. Ovo se može obezbediti pošto metod za određivanje konstante d bude razmatran niže.

Pretpostavimo da je posmatrana cirkumpolarna zvezda u gornjoj i donjoj kulminaciji. Deklinacija pročitana u ova dva slučaja biće različita, osim za refrakcijske efekte koje smo zanemarili, pošto se deklinacijska konstanta d koristi sa suprotnim znakom u dvema kulminacijama. Srednje od dva čitanja daje deklinaciju zvezde—strogo uzevši δ'. Zvezda može biti vremenski podešena krstom pokretnog konca u vidnom polju, koji meri rastojanje u mikrometarskim jedinicama, pri čemu je pređeni ugao jednostavno vremenski interval pomnožen sa $\cos\delta$. Ovim je mikrometarska skala kalibrisana u vremenskim sekundama, pa se ranije mereno b i c može pretvoriti u ove jedinice. Osim toga, deklinacijska konstanta d određena je kao polovina razlike čitanja deklinacije u dvema kulminacijama.

Stoga T_G i T_D mogu da označavaju pokazivanje časovnika u gornjoj i donjoj kulminaciji cirkumpolarne zvezde. Tada jednačine (5.10) i (5.15) za njene meridijanske prolaze daju, redom,

$$\begin{aligned} \alpha - T_G - \Delta T &= m + n\,\mathrm{tg}\,\delta + c\csc\delta \\ \alpha - T_D - \Delta T - 12^{\mathrm{h}} &= m - n\,\mathrm{tg}\,\delta - c\csc\delta. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Napravljena je gruba pretpostavka da se za 12 časova, vremenski interval između dveju kulminacija, neće promeniti popravka časovnika. Da bi se ova teškoća savladala, mora se vršiti praćenje promena u ΔT upoređivanjem sa vremenskim signalima—videti zadatak 5.3. Sada, eliminisanjem nepoznate rektascenzije i popravke časovnika, jednačine (5.17) daju vrednost za n kao

$$n = \left[6^{\mathrm{h}} - \frac{1}{2}(T_G - T_D)\right]\mathrm{ctg}\,\delta - c\csc\delta. \tag{5.18}$$

Na kraju, konstanta azimuta a i veličina m mogu se izvesti iz jednačina (5.8) korišćenjem prethodno određenih vrednosti konstante nagiba i geografske širine.

Fundamentalno određivanje časovnikova stanja ΔT zahteva da među zvezdama bude poznat položaj ekvinokcija. Ekvivalentno tome, mora biti posmatran objekt čija je rektascenzija *a priori* poznata, a Sunce je očigledno pogodno za to. Za izvođenje Sunčeve rektascenzije potrebna je detaljna dinamička teorija Zemljinog putanjskog kretanja, koja se u osnovi može predstaviti izjednačavanjem Sunčeve ekliptičke latitude sa nulom. Na sl. 5.4, položaj Sunca je predstavljen sa S, severni nebeski pol sa P i ekvinokcij sa Υ. Produžimo luk velikog kruga PS do preseka sa ekvatorom u tački U. Onda su rektascenzija i deklinacija Sunca $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ date sa

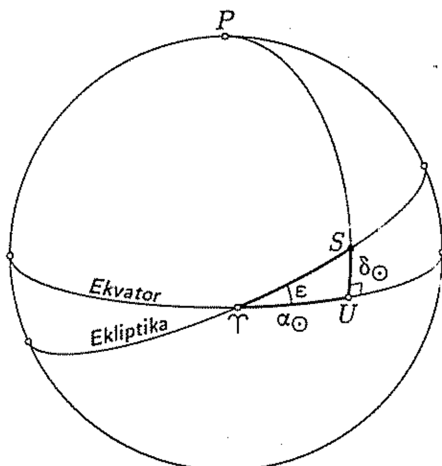
$$\begin{aligned} \alpha_\odot &= \Upsilon U, \\ \delta_\odot &= SU. \end{aligned} \qquad (5.19)$$

Primena četvoroelementnog obrasca na sferni trougao $S\Upsilon U$, u kojem je $S\Upsilon U = \varepsilon$, daje

$$\cos\alpha_\odot \cos\frac{1}{2}\pi = \sin\alpha_\odot \operatorname{ctg}\delta_\odot - \sin\frac{1}{2}\pi \operatorname{ctg}\varepsilon.$$

Odavde je

$$\alpha_\odot = \arcsin(\operatorname{ctg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta_\odot). \qquad (5.20)$$



Слика 5.4

Deklinacija Sunca može biti merena u trenutku njegove kulminacije, a jednačina (5.20) dopušta izračunavanje $\alpha_\odot$ ako je nagib ekliptike prema ekvatoru poznat. Ovo, takođe, može biti određeno iz meridijanskih posmatranja, pošto je ε maksimalna vrednost Sunčeve deklinacije u letnjem solsticiju.

Neka sada T bude pokazivanje časovnika u trenutku kulminacije pravog Sunca. Stanje časovnika je tada, sa jednačinama (5.1) i (5.9), dato sa

$$\Delta T = \alpha_\odot - T - \tau. \qquad (5.21)$$

Određeno stanje časovnika znači tačno poznavanje mesnog zvezdanog vremena. Ono se može upoređivati sa Griničkim zvezdanim vremenom korišćenjem vremenskih radio signala, kao što je objašnjeno u §5.2. Tačna vrednost posmatračeve geografske dužine može se tada odrediti iz jednačine (5.2).

Neophodno je detaljnije razmatranje posmatračevih geografskih koordinata ❈ (λ, φ), pošto se obe menjaju usled *kretanja Zemljinih polova*, pri čemu je uticaj vrlo mali i njegova analiza je ostavljena za §5.5. Glavno zanemarivanje u prethodnom razmatranju nije polarno kretanje već atmosferska refrakcija. Ovaj uticaj je toliko važan da je njegovo obuhvatanje bitno, čak i u redukcijama najvišeg stepena aproksimacije deklinacijskih merenja. Dosadašnje izostavljanje refrakcije, koje je sasvim pojednostavilo razmatranje, biće brzo popravljeno u sledećem paragrafu.

§ 5.4. Redukovanje na prividni položaj.

Procedura opisana u prethodnom paragrafu je neprirodna i idealizovana. Međutim, ona demonstrira mogućnost određivanja svih instrumentskih konstanti bez prethodnog poznavanja položaja zvezda. Sledstveno tome, merenja meridijanskim krugom mogu se tada korigovati za instrumentske greške, dajući fundamentalne vrednosti i rektascenzije i deklinacije preko jednačina (5.10) i (5.13). Ipak, normalna je praksa da se posmatranja dalje svedu na prividni položaj. To povlači sa sobom obračunavanje popravke za refrakciju, dnevnu aberaciju i dnevnu paralaksu, odnosno svih popravki koje su u potpunosti razmatrane u glavi 4. U stvari, moguće je pojednostaviti razmatranja, pošto se popravke odnose na merenja u blizini posmatračevog meridijana.

Na primer, stavljanjem u jednačine (4.70) da je časovni ugao jednak nuli, za uticaj dnevne aberacije dobijamo

$$\begin{aligned} d\alpha &= 0^s{,}0213\cos\varphi\,\mathrm{sc}\,\delta, \\ d\delta &= 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Iz ovoga se vidi da su deklinacijska merenja nepromenjena, dok je popravka za rektascenziju slična kolimacijskoj popravci jer su obe proporcionalne $\mathrm{sc}\,\delta$, što znači da se dnevna aberacija u potpunosti može obračunati korišćenjem modifikovane kolimacijske konstante u Beselovoj ili Majerovoj formuli. Jednostavno, u ovim formulama zamenićemo c sa c^*, gde je

$$c^* = c - 0^s{,}0213\cos\varphi. \tag{5.23}$$

Uticaj atmosferske refrakcije je znatniji, pa je obično i njegova popravka najveća. Usled refrakcije smanjuje se zenitska daljina zvezde, ali azimut se ne menja. Refrakcijski ugao R može se naći u refrakcijskim tablicama i mora se oduzeti od merene deklinacije—osim u slučaju kada zvezda kulminira između zenita i pola, kada je smisao popravke suprotan.

Popravke za refrakciju i dnevnu aberaciju mogu se sada objediniti u jednačinama za posmatranje meridijanskim krugom. Geocentrična paralaksa je zanemarljiva za zvezde kao i za sve objekte izvan Sunčevog sistema, pa dodatne popravke nisu potrebne. Pretpostavimo da su ponovo (α', δ') merena rektascenzija i deklinacija zvezde, kao što su definisane u jednačinama (5.1) i (5.3). Ako sada (α, δ) predstavljaju prividni položaj zvezde, onda je, s tačnošću prvog reda,

$$\alpha = \alpha' + m + n\,\mathrm{tg}\,\delta' + c\,\mathrm{sc}\,\delta', \tag{5.24}$$

$$\delta = \delta' - R. \tag{5.25}$$

Obično su instrumentske konstante izražene u vremenskim sekundama, dok je refrakcijski ugao u lučnim sekundama.

Poslednje dve jednačine mogu se poboljšati dodavanjem članova drugog reda, koji su za drugu jednačinu već bili dati u (5.13). Refrakcija, takođe, unosi popravke drugog reda za rektascenziju (v. zadatak 5.7), što može biti značajno za velike zenitske daljine.

Za tela Sunčevog sistema, mora biti uključena i popravka za dnevnu paralaksu. To je obično mala popravka (nekoliko lučnih sekundi) koja se može izvesti iz jednačine (4.59) pod uslovom da je $t = 0$. Ovo pokazuje da se rektascenzija ne menja, dok, s oznakama §4.7, zabeležena deklinacija mora da poraste za $(\rho/r)\sin(\varphi' - \delta)$. Pri tome se i znak popravke menja između zenita i nebeskog pola.

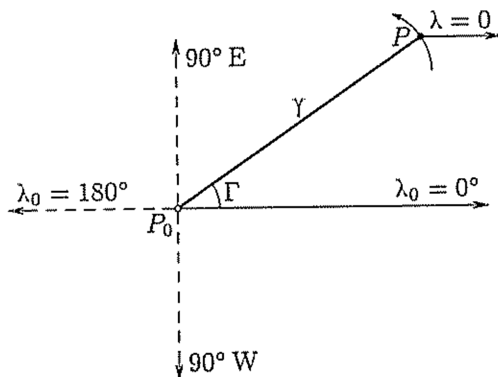
Ipak, ovaj postupak, nije odgovarajući za Mesec ili veštačke satelite, kada se paralaktički ugao ne može tretirati kao mala veličina. Tada je najbolje prvo dodati popravke za refrakciju i dnevnu aberaciju, kao što je gore opisano. To će dati geometrijski pravac izvora za topocentričnog posmatrača. Prelazak na geocentrični položaj tada je kompletno dat vektorskim metodom opisanim u §4.7.

§ 5.5. Kretanje Zemljinih polova.

Termin *kretanje Zemljinih polova* (ili *polarno kretanje*) koristi se za opisivanje laganog i vrlo malog pomeranja geografskih polova po Zemljinoj površini. Napomenimo da se pomeranje vrši u odnosu na Zemlju, a ne u odnosu na zvezde. Trenutni pravac Zemljine rotacione ose određuje *pol rotacije* na Zemljinoj površini i pravi nebeski pol na nebeskoj sferi. Svakako će kasnije biti spomenuto pomeranje u odnosu na zvezde usled luni-solarne precesije i nutacije (glava 9), ali takvi efekti se ne razmatraju u ovom paragrafu. Za sada, Zemljina rotaciona osa biće tretirana kao stalni (nepokretni) pravac u odnosu na zvezde. Nas interesuje prividno pomeranje ovog stalnog pravca u odnosu na Zemlju, ali, u apsolutnom smislu, pravilnije je reći da Zemljino telo „klimata“ oko stalnog pravca a ne da se pol rotacije pomera.

Pošto polarno kretanje ne utiče na promenu pravca pola u odnosu na zvezde, to ne dolazi do promena u rektascenziji i deklinaciji zvezde, ali, ipak, utiče na redukciju merenja ovih koordinata meridijanskim instrumentom. Pri postavljanju instrument se vezuje za Zemljinu površinu, pa se tako nebeski pol, i zaista cela zvezdana podloga, pomeraju u odnosu na instrument. U stvari, dolazi do promena instrumentskih konstanti usled polarnog kretanja, kao što će niže biti pokazano.

Na sl. 5.5 predstavljen je u „ptičjoj perspektivi“ geografski severni pol. Tačka P je trenutni pol rotacije, dok je P_0 srednji položaj, koji se slobodno može nazvati *geometrijski pol*. Za razliku od pola rotacije, geometrijski pol je stalna tačka na Zemljinoj površini. Pomeranje γ od P do P_0 je oko $0'',3$, što odgovara rastojanju od nekih 10 m na Zemljinoj površini. Istočna longituda pomeranja Γ obično je rastuća, tako da se pol rotacije pomera u direktnom smeru (suprotno kazaljci na časovniku) oko pola P_0. Međutim, kretanje je komplikovano, te ne može biti detaljno izloženo, ali periodi rotacije su prepoznatljivi— iznose 428 dana i jedna godina.



Pogled odozgo severnog Zemljinog pola.

СЛИКА 5.5

Uzroci polarnog kretanja su skoro sasvim geofizički. Ako bi Zemlja bila slobodno rotirajuće kruto telo, pomeranje pola rotacije od ose simetrije uzrokovalo bi uniformno kružno kretanje oko geometrijskog pola sa periodom od 305 dana. Međutim, zbog Zemljine prirode, ovaj period je znatno povećan, pa 428-dnevni period predstavlja modifikovano slobodno kretanje. Godišnja komponenta je prinudno kretanje usled stalnih promena geofizičkih uslova.

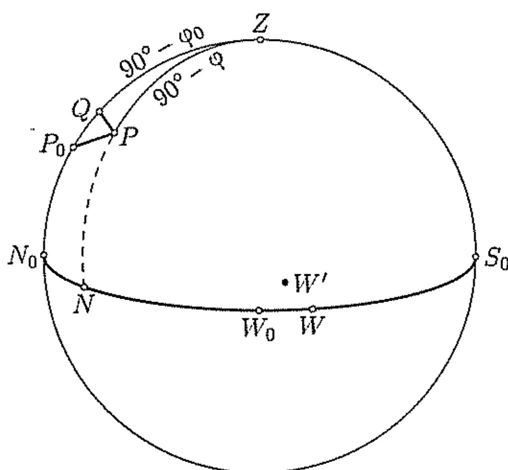
Pomeranje pola P u odnosu na P_0 je obično izraženo preko pravouglih koordinata (x, y). Ovo pomeranje je duž meridijana s nultom geografskom dužinom i s geografskom dužinom od 270° (istočno), tj.

$$x = \gamma \cos \Gamma,$$
$$y = -\gamma \sin \Gamma. \tag{5.26}$$

Vrednosti x i y publikuju se u Međunarodnoj službi polarnog kretanja (*International Polar Motion Service*) i Međunarodnoj službi za vreme (*Bureau International de l'Heure*).

Kretanje polova uzrokuje promene u geografskoj širini i geografskoj dužini svakog posmatračkog mesta. Pretpostavimo da su (λ_0, φ_0) geografske koordinate posmatrača u odnosu na geometrijski pol, dok su (λ, φ) koordinate koje se odnose na trenutni pol rotacije. Širina je direktno definisana, ali se pojavljuje mali problem pri definisanju meridijana nulte dužine kroz P. Kao što je pokazano na sl. 5.5, on je izabran kao meridijan koji je paralelan početnom geometrijskom meridijanu. U stvari, dva početna meridijana seći će se na ekvatoru i početni meridijan rotacije neće, u opštem slučaju, prolaziti kroz repernu tačku Griniča. Ova definicija jasno implicira da je meridijan istočne longitude Γ zajednički za dva sistema.

Slika 5.6 pokazuje nebesku sferu za posmatrača O. Tačka zenita biće posmatrana kao stalna, što je strogo tačno, ako se misli na geocentrični zenit. Instrumentske konstante su, ipak, određene u odnosu na astronomski zenit i ovo je predmet malih promena. Pravac astronomskog zenita određen je pravcem lokalne gravitacije, a luni-solarna plima ima vrlo mali promenljivi udeo. Osim toga, ove sile pobuđuju geofizičke promene koje dodatno menjaju pravac prave gravitacije. Efekt je čisto geometrijski, ali obezbeđuje da instrumentske konstante budu dosledno određivane u odnosu na stalni pravac zenita, što neće menjati redukciju posmatrane zvezde. Stoga će promena u tački astronomskog zenita biti zanemarena u sledećem argumentu i samo će promene u astronomskoj dužini i širini usled kretanja polova biti razmatrane.



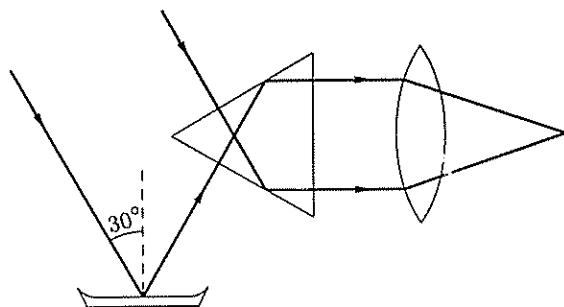
Слика 5.6

Tačke P_0 i P na sl. 5.6 označavaju nebeske polove koji odgovaraju geometrijskom polu i polu rotacije; pa je $P_0Z = 90° - \varphi_0$, dok je $PZ = 90° - \varphi$. Stoga, neke osnovne tačke horizonta imaju oznake, N_0, W_0 i S_0 ako su određene sa P_0, a N i W ako su određene polom P. Povucimo mali krug sa polom u Z, kroz tačku P do preseka P_0Z u tački Q. Tada je $P_0Q = \mathrm{d}\varphi = \varphi - \varphi_0$. Dalje, P_0PQ se može posmatrati kao trougao u ravni s pravim uglom u Q, dajući

$$\mathrm{d}\varphi = P_0P \cos QP_0P = P_0P \cos ZP_0P.$$

Svestranost meridijanskog kruga je prednost koja samom instrumentu donosi probleme, jer, na kraju krajeva, ograničava pouzdanost posmatranja ovim instrumentom. Za korišćenje pasažnog instrumenta na širokom rasponu orijentisanja, i geometrijskom idealizacijom koja je uneta u obračunavanje instrumentskih konstanti, ne može se očekivati tačna primena na velike uglove. Problemi potiču od savijanja (fleksije) instrumenta usled njegove sopstvene težine, što može da unese sistematske promene u instrumentske konstante. Međutim, takvi sistematski efekti nisu otkriveni. Na primer, kako možemo znati da je usvojena vrednost konstante nagiba tačna za umerene zenitske daljine, kad je ova konstanta određena iz merenja teleskopom usmerenim na nadir? Dok je pravljen snažan pokušaj produžavanja kontrole sistematskih efekata da bi se poboljšala tačnost pasažnog instrumenta, dotle je opšte prihvaćeno da su tačniji i dosledniji rezultati postignuti drugim instrumentima. Dva najznačajnija instrumenta su fotografska zenitna tuba (PZT) i bezlični Danžonov astrolab. PZT u potpunosti napušta mnogostranost meridijanskog kruga i posmatranja su svedena na zenit. Na drugoj strani, Danžonov astrolab može da rotira po azimutu, ali sva posmatranja se vrše na istim zenitskim daljinama, i to na 30°, tako da promene do kojih dolazi usled fleksije ovde neće biti značajne.

Osnovni princip astrolaba je prikazan na sl. 5.8. Jednakostrana staklena prizma postavlja se ispred horizontalnog teleskopa tako da joj je jedna strana vertikalna. Dva lika zvezde formiraju se od svetlosti koja prolazi kroz prizmu i to tako što direktni zrak unutrašnjim odbijanjem od donje strane prizme proizvodi jedan, a zrak odbijen od horizontalne živine površine a potom unutrašnjim odbijanjem od gornje strane prizme, proizvodi drugi lik. Ova dva lika se poklapaju kada je zenitska daljina zvezde tačno 30°. Na dijagramu je predstavljena jednostavnost instrumenta koji sadrži optički defekt, jer na razdvajanje likova utiče fokusirajuće podešavanje okulara teleskopa. Međutim, radi uklanjanja ovog efekta instrument je prerađen od Danžona (DANJON, 1960) i dopunska karakteristika ga čini suštinski modernim bezličnim instrumentom. Vremenski trenutak koji odgovara položaju zvezde na zenitskoj daljini od 30° zapisuje se automatski.



Osnovne osobine astrolaba.

СЛИКА 5.8

Zvezda se može posmatrati astrolabom ako njen dnevni paralel preseca almukantar visine 30°. Ovo, naravno, smanjuje broj posmatračkih zvezda na interval deklinacija $\varphi + 30° > \delta > \varphi - 30°$. Svaka od ovih zvezda u toku dana imaće dva prolaza kroz almukantar visine 60°, jedan istočno i jedan zapadno od posmatračeva meridijana. Srednja vrednost dva zapisana vremena u trenutku prolaza daje rektascenziju zvezde; dok polovina razlike ovih vremena daje časovni ugao t koji odgovara nekom zenitskom rastojanju od 30°.

Tačka X na sl. 5.9 predstavlja položaj zvezde na nebeskoj sferi u trenutku kada se posmatra Danžonovim astrolabom. Na osnovu kosinusnog obrasca sledi da je

$$\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t. \tag{5.36}$$

Ova se jednačina može koristiti za određivanje deklinacije zvezde ili geografske širine, pretpostavljajući da je druga poznata. Ako je poznata geografska širina, procedura je sledeća. Uvodi se pomoćni ugao F, definisan tako da je

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{ctg}\varphi\cos t \tag{5.37}$$

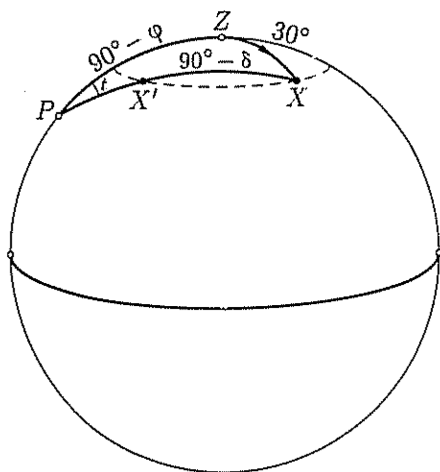
i on se može izračunati. Onda se jednačina (5.36) može izraziti kao

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi\,\mathrm{sc}\,F\sin(\delta + F),$$

pa se deklinacija dobija kao

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos F\csc\varphi\right) - F. \tag{5.38}$$

Ova jednačina ima dva rešenja, usled dvoznačnosti inverznog sinusa. Tačke X i X' na sl. 5.9 odgovaraju rešenjima; naravno, nije problem prepoznati pravo rešenje. Međutim, u blizini vrednosti δ, koja je dvostruki koren jednačine (5.38)—ovo odgovara maksimalnom časovnom uglu za koji z može biti 30°—gornji metod određivanja deklinacije postaje neprihvatljiv. Ovo je teško ilustrovati tabelom 5.1, koja je rešenje jednačine (5.38) za širinu 50°. Jasno je da deklinacija ne može, u praksi, biti određena za ceo interval—u ovom slučaju $20° < \delta < 80°$. Posebno, deklinacije između, približno, 50° i 65° praktično je nemoguće meriti.

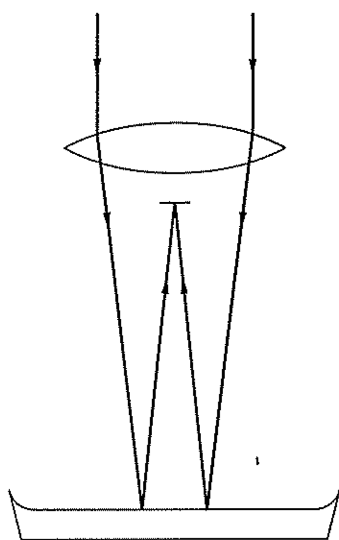


Слика 5.9

Uprkos ovom ograničenju, astrolabom se mogu odrediti i deklinacije izvan glavnog intervala, i, kao što je već pomenuto, to daje bolje rezultate od meridijanskog kruga.

Fotografska zenitna tuba je drugi moderni instrument koji želimo kratko opisati. Njene glavne karakteristike su skicirane na sl. 5.10. Sastoji se od horizontalnog sočiva objektiva sa nosačem ploče baš ispod njega. Svetlosni zrak zvezde, posle odbijanja od živine površine postavljene ispod aparature, obrazuje lik na fotografskoj ploči.

Glavna karakteristika u projektovanju ovog instrumenta je da žižna tačka sočiva objektiva leži na fotografskoj emulziji (MARKOWITZ, 1960). Rastojanje od površine žive je tada podešeno tako da se na ploči dobiju fokusirani likovi u unapred zadatim položajima, što efikasno eliminiše greške nagiba i kolimacije pri postavljanju teleskopa.



Osnovne osobine fotografske zenit tube.

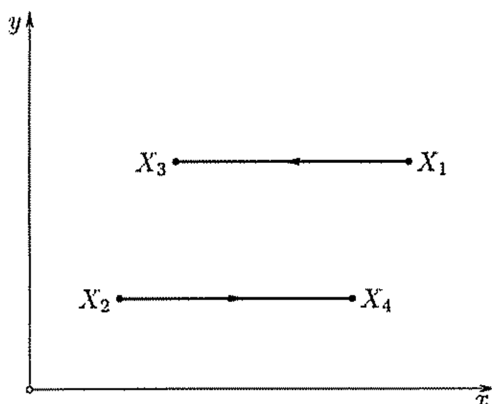
Слика 5.10

Tabela 5.1. Promene dveju deklinacija sa časovnim uglom za Danžonov astrolab na širini 50°

t	F	δ_1	δ_2
0°	40°,00	80°,00	20°,00
10	39 ,57	79 ,80	21 ,06
20	38 ,26	79 ,15	24 ,34
30	36 ,00	77 ,85	30 ,14
40	32 ,73	75 ,28	39 ,26
45	30 ,68	72 ,85	45 ,79
50	28 ,34	67 ,38	55 ,93
51	27 ,84	63 ,58	60 ,74

Nosač ploče se podešenom dnevnom brzinom kreće preko vidnog polja, što obezbeđuje jasne likove i omogućava da slabe zvezde budu fotografisane. Normalna ekspozicija je oko 10 do 20 sekundi. Trenutak sredine ekspozicije se automatski zapisuje sa vrlo visokom tačnošću.

U stvari, kompletno posmatranje povlači sa sobom četiri ekspozicije. Između svake ekspozicije sočivo i nosač ploče se okreću, kao celina, za 180°. Četiri lika zvezde približno će obrazovati paralelogram, kao što je prikazano na sl. 5.11. Neka $t_1, \ldots, t_4$ budu zapisana vremena četiri ekspozicije $X_1, \ldots, X_4$—u korektnom vremenskom redosledu. Ako nije bilo preokreta između ekspozicija, četiri lika će, zanemarujući male efekte usled krivudavosti, biti na pravoj liniji. Međutim, linije X_1X_3 i X_2X_4 predstavljaju dnevno kretanje za ploču sa njene dve orijentacije. Ove linije biće paralelne ako je obrtanje tačno za 180°. Osim toga, razmera ploče može biti određena, pošto X_1X_3, na primer, predstavljaju dnevno kretanje za vremenski interval $(t_3 - t_1)$.



Slika zvezde iz kompletnog posmatranja PZT-om.

Слика 5.11

Kada se obračuna rotacija mesta, lik tačke zenita na ploči ostaje stalan. Naravno, on, u svakom slučaju, nije markiran, ali možemo biti ubeđeni da je on na ekvidistantnom rastojanju od linija X_1X_3 i X_2X_4. Postavimo na ploči koordinatni sistem (x, y) sa proizvoljnim početkom, ali sa x-osom paralelnom dvema linijama. Neka (x_i, y_i) budu koordinate od X_i, $i = 1, \ldots, 4$, koje, naravno, mogu da se izmere. Ove se koordinate mogu lako izraziti uglovnim jedinicama, pošto je razmera ploče poznata. Naznačimo da je konstrukcijom $y_1 = y_3$ i $y_2 = y_4$. Neka su (x_0, y_0) koordinate tačke zenita. Tada je x_0 nepoznato, ali je

$$y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_4) = \frac{1}{2}(y_2 + y_3).$$

Još značajnije je to što je rastojanje između dve linije dvostruka zenitska daljina zvezde u meridijanu. Otuda je

$$\varphi - \delta = \frac{1}{2}(y_1 - y_4) = \frac{1}{2}(y_3 - y_2). \tag{5.39}$$

Međutim, deklinacija zvezde je određena ako je poznata geografska širina.

Časovni ugao zvezde u trenutku t_1 je $(x_0 - x_1)$, dok je u trenutku t_4 $(x_4 - x_0)$, pošto je tada ploča okrenuta. Uzimajući srednju vrednost ovih dvaju vremena, sledi da će u trenutku $\frac{1}{2}(t_1 + t_4)$ časovni ugao biti $\frac{1}{2}(x_4 - x_1)$. Mogli bi koristiti drugu i treću ekspoziciju umesto prve i četvrte. Koristeći sva četiri lika, sledi, da u trenutku

$$t_0 = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4), \tag{5.40}$$

časovni ugao zvezde biće

$$t = \frac{1}{4}(x_4 - x_3 + x_2 - x_1). \tag{5.41}$$

Tada je rektascenzija zvezde određena kao

$$\alpha = t_0 - t. \tag{5.42}$$

Podsetimo se da su u ovom postupku efekti krivine bili zanemareni. Oni su kasnije razmatrani u glavi 13.

Jedna od velikih prednosti PZT je što se posmatranja vrše sasvim blizu zenita, gde je nesumnjivo refrakcija svedena na minimum. Mana mu je što obuhvata samo mali interval deklinacija, manji od 1°.

Iako bolji po tačnosti od meridijanskog kruga, ni PZT ni Danžonov astrolab ne mogu da odrede rektascenziju i deklinaciju na fundamentalan način. Međutim, oni mogu precizno da povežu udaljene položaje koji su razdvojeni na nebeskoj sferi, i mogu otkriti greške u fundamentalnim katalozima zasnovanim na meridijanskim posmatranjima. Osim toga, oni dobro pogoduju za određivanje neregularnih promena u geografskoj širini i dužini (vremenu), koje nastaju, ne samo zbog polarnog kretanja, već i promena u brzini Zemljine rotacije; koje će biti predmet razmatranja u glavi 10.

Zadaci

5.1. Pokazati da je greška u određivanju trenutka kulminacije zvezde meridijanskim krugom data Majerovom formulom, odnosno da je:

$$\tau = \left[a \sin(\varphi - \delta) + b \cos(\varphi - \delta) + c\right] \sec \delta.$$

5.2. Izvesti Beselovu i Majerovu jednačinu za pasažni instrument u obliku pogodnom za posmatranje zvezde u donjoj kulminaciji, tj. jednačine (5.15) i (5.16).

5.3. Pasažnim instrumentom na geografskoj širini 79°35′ posmatrana je zvezda deklinacije 51°16′38″. Posle otklanjanja instrumentskih grešaka nagiba i kolimacije, nađeno je da svetsko vreme u trenucima donje i gornje kulminacije iznosi $18^h03^m18^s,4$ i $6^h00^m45^s,1$. Izračunati grešku azimuta instrumenta.

5.4. Odrediti konstante azimuta, nagiba i kolimacije meridijanskog kruga, kao i dve konstante (m, n) korišćene u Beselovoj formuli. Pokazati da greška u određivanju trenutka kulminacije može biti napisana u alternativnom obliku kao

$$\tau = b \sec\varphi + n(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi) + c \sec\delta$$
$$\tau = a \csc\varphi + n(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{ctg}\varphi) + c \sec\delta.$$

Prva od ovih jednačina poznata je kao Hanzenova (HANSEN) formula.

5.5. Pokazati da je prava deklinacija zvezde δ povezana sa deklinacijom δ_m merenom meridijanskim krugom jednačinom

$$\delta = \delta_m + d + \frac{225}{2}\left[c^2 - (\tau - m)^2\right] \operatorname{ctg}\delta \sin 1'',$$

gde simboli imaju svoja uobičajena značenja i izraženi su usvojenim praktičnim jedinicama.

5.6. Pasažni instrument je postavljen vertikalno nadole ka horizontalnoj reflektujućoj površi. Pokazati da je ugao između centralnog krsta-konaca i njegovog reflektovanog lika $2(c - b)$. Pokazati da se ovaj ugao smatra pozitivnim kada je lik zapadno od krsta-konaca

5.7. Pokazati da je iznos atmosferske refrakcije u deklinacijskim merenjima meridijanskim krugom popravka prvog reda, a da je u merenjima rektascenzije samo popravka drugog reda. Pokazati da ako se za refrakciju uzme formula $R = K \operatorname{tg} z$, tada se Beselova formula može napisati u obliku

$$\alpha = \alpha' + (m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta')\left(1 + \frac{K \sec^2\delta'}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta'}\right)$$

gde su (α', δ') merena rektascenzija i deklinacija.

5.8. Objasniti principe astrolaba i pokazati da se može koristiti za merenja položaja zvezda unutar intervala deklinacija $\varphi - 30° < \delta < \varphi + 30°$. Pokazati da je preciznost deklinacijskih merenja najveća na krajevima intervala i da teži nuli za $\delta = \arcsin(2\sin\varphi/\sqrt{3})$, dok je preciznost za rektascenziju najveća za $\delta = \arcsin(\sqrt{3}\sin\varphi/2)$.

5.9. Zvezda poznate deklinacije δ posmatrana je astrolabom u trenutku kada je njen časovni ugao bio t. Pokazati da se geografska širina instrumenta može odrediti kao

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos G \csc\varphi\right) - G,$$

gde je G ugao definisan sa

$$G = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\delta \cos t).$$

5.10. Meridijanski krug, čije su instrumentske konstante poznate, postavljen je u mestu sa približno poznatom geografskom širinom i dužinom. Pronaći metod za određivanje sledećih veličina: a, b, c, ΔT, m, n, φ i λ, korišćenjem posmatranja zvezda poznatog položaja.

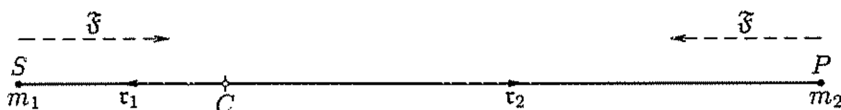
ГЛАВА ШЕСТА

Problem dva tela

§ 6.1. Osnovne jednačine.

Problem dva tela je osnovni problem položajne astronomije. Očigledan primer je planetsko kretanje oko Sunca, a važni su i kretanje satelita i dvojnih zvezda. Da bi potvrdili ideje, usmerićemo razmatranje na poseban sistem koji se sastoji od Sunca S i planete P, kao što se vidi na sl. 6.1. Analiza koja sledi je prilično opšta i može biti primenjena na bilo koji sistem dva tela.

Kada se analiza svede na dva tela—može se naći analitičko rešenje. Na žalost, za sisteme koji sadrže više od dva tela, analitičko rešenje ne postoji. Razmatranje planetskog kretanja je na taj način idealizovano, jer gravitaciono privlačenje drugih tela u Sunčevom sistemu, pre svega velikih planeta, nije uzeto u obzir. Kako je Sunce daleko najmasivnije telo Sunčevog sistema, gravitacija Sunca je dominantna sila. Vrlo korisnu prvu aproksimaciju daje pristup preko problema dva tela. Sledeća aproksimacija je da su tela S i P materijalne tačke.



Слика 6.1

Neka su m_1 i m_2 mase tačaka S i P, redom, i neka je C njihov centar mase. Ova tačka može biti izabrana za koordinatni početak i tada će vektori položaja ovih masa $\mathfrak{r}_1$ i $\mathfrak{r}_2$ zadovoljavati jednačinu:

$$m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 = 0. \tag{6.1}$$

Zgodno je posmatrati položaj planete u odnosu na Sunce, a ne u odnosu na centar mase. Stoga ćemo obratiti pažnju na vektor $\mathfrak{r} = \overrightarrow{SP}$, tj.

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1. \tag{6.2}$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je

$$\mathfrak{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathfrak{r}. \tag{6.3}$$

Kompletna analiza biće usmerena ka određivanju relativne putanje, odnosno putanje P oko S, gde će se postupno izvedeni parametri odnositi na ovu putanju. Za planetu koja se kreće oko Sunca, kada je $m_1 \gg m_2$, ta putanja će dobro aproksimirati stvarnu putanju u prostoru. To ne znači da je ovakav pristup ograničen na posebne slučajeve; naprotiv, on je korektan za bilo koji odnos masa m_1 i m_2. Stvarne putanje u prostoru mogu biti izvedene iz relativne putanje uz pomoć jednačina (6.3). Putanje dva tela oko stalnog centra masa su slične relativnoj putanji i u istoj su fazi. Te tri putanje su različitih veličina i odnose se kao

$$SC : PC : SP = m_2 : m_1 : m_1 + m_2. \tag{6.4}$$

Jednačine kretanja za dva tela su

$$m_1\ddot{\mathfrak{r}}_1 = -\mathfrak{F}, \qquad m_2\ddot{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{F}, \tag{6.5}$$

gde je $\mathfrak{F}$ gravitaciona sila koja deluje na telo m_2. Iz Njutnovog zakona gravitacije sledi da je

$$\mathfrak{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathfrak{r}. \tag{6.6}$$

Ubrzanje svakog tela može biti izvedeno iz (6.5), a relativno ubrzanje se tada može predstaviti u obliku

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{r}}_2 - \ddot{\mathfrak{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Radi jednostavnijeg pisanja uvešćemo veličinu μ definisanu sa

$$\mu = G(m_1 + m_2). \tag{6.7}$$

Tada je relativno kretanje dva tela određeno jednostavnom jednačinom

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathfrak{r}. \tag{6.8}$$

Svi važni zaključci o kretanju dva tela proizilaze iz ove diferencijalne jednačine drugog reda. Ona ima dva prva integrala. Množeći vektorski jednačinu (6.8) sa $\mathfrak{r}$ dobijamo

$$\mathfrak{r} \times \ddot{\mathfrak{r}} = 0,$$

što posle integracije daje

$$\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{h}. \tag{6.9}$$

Ovde $\mathfrak{h}$ predstavlja konstantni vektor—koji je proporcionalan ukupnom ugaonom momentu sistema.

Na drugoj strani, razmotrimo skalarni proizvod jednačine (6.8) i vektora $\dot{\mathfrak{r}}$, naime

$$2\dot{\mathfrak{r}} \cdot \ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{2\mu}{r^3}\mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{r}}.$$

Kako je $\mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = r\dot{r}$, ovaj izraz posle integracije daje

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = \frac{2\mu}{r} + C, \tag{6.10}$$

gde je C konstanta integracije. Ova jednačina je ekvivalentna zakonu održanja energije.

Ove dve jednačine održanja mogu biti izražene i u skalarnoj formi u odnosu na odgovarajući koordinatni sistem. Uzećemo cilindrične koordinate (r, θ, z) sa z-osom usmerenom kao i vektor $\mathfrak{h}$. Kako je $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{r} = 0$, zaključujemo da je putanja u x–y ravni, a pravougle koordinate vektora $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{h}$ su

$$\mathfrak{h} = h(0,0,1), \qquad \mathfrak{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0). \tag{6.11}$$

Jednačina (6.9) se tada svodi na jednu skalarnu jednačinu

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{6.12}$$

a jednačina (6.10) dobija oblik

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{2\mu}{r} + C.$$

Korišćenjem upravo izvedenih izraza, poslednja jednačina se može napisati u obliku

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + C. \tag{6.13}$$

§ 6.2. Keplerova jednačina za ograničenu putanju.

Konstanta C u (6.13) je proporcionalna ukupnoj energiji sistema. Pozitivne vrednosti konstante C odgovaraju neograničenim putanjama, u kojima je ukupna energija dovoljna da telima dopusti da napuste zonu međusobnog gravitacionog uticaja. Relativna putanja je tada hiperbola.

Pretpostavimo, ipak, da je C negativno. Uzimajući da je

$$C = -\frac{\mu}{a}, \tag{6.14}$$

nećemo izgubiti na opštosti. Parametar a je karakteristična dimenzija sistema dva tela. Njegovo geometrijsko značenje (kao velike poluose eliptične putanje) biće utvrđeno kasnije. Sada se vidi iz (6.12) i (6.13) da je relativna brzina V dva tela data sa

$$V^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{6.15}$$

Desna strana ove jednačine ne može biti negativna. Odatle nalazimo da je $r < 2a$, što nam govori da je putanja ograničena. Jasno je da je ovo tip putanje koji je značajan za proučavanje planetskog kretanja.

Formula (6.15) je vrlo važna. Ona daje mogućnost da se odredi intenzitet planetske brzine kada je poznat položaj planete za dati trenutak. I više od toga, pravac planetske brzine može biti određen iz (6.12), što daje transverzalnu komponentu brzine V_T:

$$V_T = r\dot{\theta} = \frac{h}{r}. \tag{6.16}$$

Mnogo teži problem je kako odrediti položaj planete za dati trenutak vremena. Matematičko rešavanje ovog problema, postavićemo kao prioritetni zadatak pre nego što odredimo, na primer, oblik putanje. Ovaj i drugi Keplerovi zakoni biće izvedeni kao usputni proizvodi glavne analize. Stoga je pristup koji sledi, na izvestan način, nekonvencionalan, a čitaoci mogu da konsultuju i standardne pristupe, kao na primer Roj (ROY, 1982).

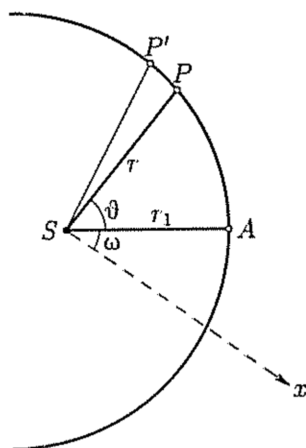
Značajna tačka na planetskoj putanji je tačka najbliža Suncu koja se naziva perihel. Neka τ bude trenutak koji odgovara položaju planete u perihelu, odnosno položaju A prikazanom na sl. 6.2. Neka P bude neki položaj planete u odgovarajućem trenutku t. Njen radijus vektor je tada $r = SP$. Ugao $\vartheta = \sphericalangle PSA$ naziva se *prava anomalija*. Ona se razlikuje od polarnog ugla θ u tome što se meri od pravca ka perihelu, a ne od proizvoljno izabrane x-ose. Ako napišemo

$$\vartheta = \theta - \omega, \tag{6.17}$$

tada se konstantni ugao $\omega = xSA$ naziva *argument perihela*.

Da bi odredili položaj planete na njenoj putanji moramo da nađemo relacije koje povezuju koordinate (r, ϑ) sa vremenom t. Ovo se dobija integraljenjem jednačine (6.15), koja može biti napisana u obliku

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu}{ar^2} F(r). \tag{6.18}$$



Слика 6.2

Ovde je $F(r)$ jednostavno skraćenica za kvadratni trinom dat sa

$$F(r) = r^2 - 2ar + \frac{h^2 a}{\mu}. \tag{6.19}$$

Jednačina (6.18) zahteva da je $F(r) \leq 0$. Iz toga zaključujemo da je radijus vektor r ograničen između dve vrednosti

$$r_1 \leq r \leq r_2, \tag{6.20}$$

gde su r_1 i r_2 dva korena jednačine $F(r) = 0$. U stvari, oni odgovaraju perihelskom i afelskom odstojanju.

Iz jednačine (6.19) sledi da je $r_1 + r_2 = 2a$. Šta više, pogodno je uvesti parameter e—za koji ćemo kasnije pokazati da predstavlja ekscentričnost putanje—kao

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \tag{6.21}$$

Tada se lako dobijaju sledeće formule

$$r_1 = a(1 - e), \qquad r_2 = a(1 + e). \tag{6.22}$$

Očigledno iz (6.19) je

$$r_1 r_2 = \frac{h^2 a}{\mu}.$$

Iz ove relacije dobijamo vezu između h na jednoj i a i e na drugoj strani

$$h^2 = \mu a(1 - e^2). \tag{6.23}$$

U granicama za r, pogodno parametarsko predstavljanje radijusa je

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{6.24}$$

Parametar E je poznat kao *ekscentrična anomalija*. Ona je jednaka nuli u perihelu i raste do 2π pri jednom obilasku putanje. Sada, zamenom promenljivih, zajedno sa (6.23), kvadratni trinom $F(r)$ se transformiše u

$$F(r) = -a^2e^2\sin^2 E$$

Ova smena omogućuje integraciju (6.18) koja je

$$(1 - e\cos E)\,\mathrm{d}E = \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{1/2}\mathrm{d}t.$$

Integracija ove jednačine je direktna, pa ćemo prvo definisati *srednje kretanje* n sa

$$n^2a^3 = \mu. \tag{6.25}$$

Kako je $E = 0$ u perihelu, sledi da je

$$M \equiv n(t-\tau) = E - e\sin E. \tag{6.26}$$

Ovaj vrlo važan rezultat je poznat kao *Keplerova jednačina*. Veličina $n(t-\tau)$ najčešće se označava sa M i naziva *srednja anomalija*. Kao i druge dve anomalije, to je ugao koji je jednak nuli u trenutku τ i koji raste za 2π u toku jednog putanjskog perioda. Za razliku od ϑ i E, srednja anomalija M raste jednoliko sa vremenom; koeficijent tog rasta je srednje kretanje n, što samo po sebi opravdava njegov naziv.

Ekscentrična anomalija je vrlo koristan matematički parametar. I radijus vektor i vreme su sada izraženi preko nje, a to je moguće i za polarni ugao θ, ili njemu odgovarajuću pravu anomaliju. Uslov $r^2\dot{\vartheta} = h$, sa jednačinama (6.23) i (6.26), može biti napisan u obliku

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}E} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1-e\cos E)}.$$

Sada zamenom nezavisno promenljive E sa $\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$, može se pokazati da važi sledeća relacija

$$\int \frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1-e\cos E)}\,\mathrm{d}E = 2\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\right]. \tag{6.27}$$

S obzirom na činjenicu da su i ϑ i E jednaki nuli u perihelu, odavde dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E \tag{6.28}$$

Položaj planete (r,ϑ) je sada potpuno izražen u funkciji ekscentrične anomalije preko jednačina (6.24) i (6.28). Ove jednačine zajedno sa Keplerovom jednačinom potpuno određuju parametarsko rešenje problema.

§ **6.3. Keplerovi zakoni.** Tri Keplerova zakona mogu biti shvaćena kao geometrijski iskazi koji su, zapravo posledica analitičkih rezultata izvedenih u prethodnom paragrafu. Oni zahtevaju samo neznatnu modifikaciju da bi bili u potpunoj saglasnosti sa tačnim rešenjem problema dva tela. Razmotrimo ova tri zakona.

(i) Pogledajmo proces integraljenja jednačine (6.28) koji je doveo do parametarskog rešenja za ϑ. To možemo napisati na sledeći način

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}E} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1-e\cos E)} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E.$$

Promenimo sada uloge ϑ i E u (6.28), čime se znak uz e menja i dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{(1+e\cos\vartheta)}.$$

Iz prethodne dve relacije može se dobiti

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}E}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\vartheta} = 1 = \frac{(1-e^2)}{(1-e\cos E)(1+e\cos\vartheta)}.$$

Odavde, s obzirom na (6.24), dobijamo

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\vartheta)}. \tag{6.29}$$

U ovoj jednačini prepoznajemo standardnu jednačinu elipse u polarnim koordinatama, koja potvrđuje prvi Keplerov zakon. Sada je moguće poistovetiti konstantu e sa ekscentričnošću, a a sa velikom poluosom.

(ii) Vratimo se za trenutak na sl. 6.2 i razmotrimo pomeraj planete iz P u P' u toku kratkog vremenskog intervala dt. Površina koju prebriše radijus vektor u toku tog vremenskog intervala približno je jednaka površini trougla SPP'. Osnova tog trougla je $SP = r$, a visina će biti $V_T\,dt$, gde je V_T transverzalna komponenta brzine. Kao posledicu toga imamo da je prebrisana površina brojno jednaka $\frac{1}{2}rV_T$, ili, uzimajući u obzir (6.16), da je jednaka $\frac{1}{2}h$. Ovim je potvrđen i drugi Keplerov zakon.

(iii) Treći zakon je sadržan u definiciji srednjeg kretanja n, jednačina (6.25). Kako je n konstantni iznos rasta srednje anomalije, takođe je srednji iznos rasta i ostale dve anomalije. Kako svaka od anomalija raste do 2π u toku putanjskog perioda T, možemo pisati da je

$$n = \frac{2\pi}{T}. \tag{6.30}$$

Korišćenjem definicije za μ (6.25), sledi da možemo pisati da je

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(m_1 + m_2). \tag{6.31}$$

Ovaj opšti rezultat povezuje dve mase sa periodom njihovog međusobnog obilaženja i veličinom relativne putanje. Treći Keplerov zakon je izveden primenom jednačine (6.31) na putanje planeta oko Sunca. U tom slučaju, m_2 će biti masa planete, a m_1 masa Sunca. Pišući (6.31) u obliku

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_1}{4\pi^2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right),$$

vidimo da će desna strana biti približno ista za svaku planetu, jer je $m_2 \ll m_1$. Treći Keplerov zakon, koji tvrdi da je a^3 proporcionalno T^2, je time izveden. Za razliku od prva dva zakona, ovaj zakon je ipak samo približno korektan, jer zanemaruje masu planete kada se ova poredi sa masom Sunca. Za najveću planetu, Jupiter, ova greška iznosi 10^{-3}.

§ 6.4. Rešenje Keplerove jednačine. Putanja planete oko Sunca je određena sa šest putanjskih elemenata. Ovi elementi su konstante kretanja, koje će biti formalno uvedene u sledećem paragrafu, iako su se četiri od njih (a, e, τ, ω) već pojavili u analizi. Ostala dva za sada nisu neophodna, jer oni odre-

đuju položaj putanjske ravni u prostoru, koja je u našem slučaju, x–y ravan. Šest putanjskih elemenata u potpunosti određuju putanju. Ako su oni poznati, položaj planete može biti određen za bilo koji trenutak vremena, kao što ćemo demonstrirati u sledećem paragrafu. Šta više, znanje putanjskih elemenata (i masa) određuje vrednosti konstanti n i h preko jednačina (6.23) i (6.25). Stoga, pretpostavimo da su nam poznate sve neophodne konstante kretanja i da želimo da izračunamo položaj planete (r, ϑ) u trenutku t.

Izračunaćemo srednju anomaliju iz jednačine

$$M = n(t - \tau).$$

Sledeći korak je odrediti ekscentričnu anomaliju E iz Keplerove jednačine. Ova jednačina nam ne daje eksplicitnu formulu za račun E, nego algebarsku jednačinu

$$f(E) = E - e \sin E - M = 0. \tag{6.32}$$

Oblik ove jednačine nam sugeriše da bi rešenje moglo biti određeno uz pomoć metode sukcesivnih aproksimacija ($E = E_0, E_1, \ldots$), korišćenjem rekurentne relacije

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n. \tag{6.33}$$

Ova relacija se vrlo lako koristi, a prva aproksimacija je prirodno $E_0 = M$. Ovaj metod se ne preporučuje jer je konvergencija obično spora. Korišćenje (6.33) numerički je ekvivalentno analitičkoj proceduri izražavanja E preko stepenog reda po e. Ovaj red konvergira jer je $e < 1$, ali ukoliko e nije malo, u račun mora biti uključen veliki broj članova. Mnogo bolji način je rešavati (6.32) pomoću Njutn-Rafsonove (NEWTON-RAPHSON) metode, koja praktično nema ograničenja zbog veličine ekscentričnosti.

Neka je E_0 pogodno izabrana prva aproksimacija za E. U stvari, pretpostavićemo da je $E = E_0 + \Delta E$. Tada je $f(E + \Delta E) = 0$. Posle razvoja ove funkcije u Tejlorov (TAYLOR) red, zadržavajući se na prva dva člana, dobijamo:

$$f(E_0) + \Delta E f'(E_0) \simeq f(E_0 + \Delta E) = 0.$$

Odavde, razvoj formule za popravku E_0 biće

$$\Delta E \approx \Delta E_0 = -\frac{f(E_0)}{f'(E_0)}. \tag{6.34}$$

Ovo je Njutn-Rafsonova formula. Vrednost $E_1 = E_0 + \Delta E_0$ biće popravljena aproksimacija ekscentrične anomalije. Ovaj proces može biti ponovljen, s tim što se vrednost E_0 zamenjuje sa tek izračunatom vrednošću E_1, pa se računa novo E_1 i tako dalje dok se ne postigne neophodna tačnost. U najvećem broju slučajeva neophodno je samo nekoliko iteracija, zato što je konvergencija brza. Lako se uočava da greška, zbog „odsecanja" članova višeg reda u Tejlorovom redu, jeste $O(\Delta E^2)$. Zbog toga, kada konvergencija jednom počne, svaka iteracija udvostručuje broj značajnih cifara.

Primena Njutn-Rafsonove formule (6.34) na jednačinu (6.32) daje sledeću iterativnu formulu

$$E_{n+1} = E_n + \frac{(M - E_n + e \sin E_n)}{(1 - e \cos E_n)}, \tag{6.35}$$

komplikovaniju nego (6.33), ali često vrednu dodatnog truda. Sve do sada radili smo isključivo sa radijanima, a i (6.35) je izražena u ovim jedinicama. Međutim, ako su anomalije izražene u stepenima, Keplerova jednačina zahteva neznatnu izmenu, što menja i našu iterativnu formulu. Ona postaje

$$E_{n+1} = E_n + \frac{[M - E_n + (180^\circ e/\pi)\sin E_n]}{(1 - e\cos E_n)} \tag{6.36}$$

Korišćenje (6.35) ili (6.36) zahteva poznavanje samo početne vrednosti E_0 koje predstavlja dovoljno blisku aproksimaciju. Za male vrednosti ekscentričnosti, izbor $E_0 = M$ je dovoljno dobar, a izbor $E_0 = M + e\sin M$ čak bolji. Kada ekscentričnost nije mala, ovako izabrane početne vrednosti nisu dovoljno približne i potrebno je izvesno poboljšanje. Jednostavan grafički metod za izbor tačne vrednosti E_0 dat je u knjizi Dufet-Smit (Duffet-Smith, 1981), str. 122–4. Kao što se primećuje, ove procedure se jednostavno programiraju, a iterativni procesi konvergiraju za sve navedene početne vrednosti E_0 pomenute u prethodnom tekstu. Slučajevi neprimenljivosti se mogu pojaviti (v. zadatak 6.6) i to se mora rešiti *ad hoc*.

Kada smo se odlučili za neki od gore predloženih numeričkih postupaka, i tako dobili E, iz jednačina (6.24) i (6.28) lako računamo (r, ϑ)

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos E) \\ \vartheta &= 2\,\mathrm{arctg}\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}E\right] \end{aligned} \tag{6.37}$$

Time je određen položaj planete za trenutak t. Ovaj paragraf završavamo jednim netipičnim primerom.

Primer. *Halejeva* (Halley) *kometa je na putanji oko Sunca sa periodom* $T = 76{,}0081$ *godina i ekscentričnošću* $e = 0{,}9673$. *Izračunati njen radijus vektor i pravu anomaliju godinu dana posle perihela.*

Prvo računamo srednju anomaliju za dati trenutak

$$M = \frac{360^\circ}{76{,}0081} = 4^\circ{,}736\,337.$$

Počnimo naš iterativni postupak za E sa ovom vrednošću koristeći se formulom (6.36). Rezultati su

$$\begin{array}{lll} E_0 = 4^\circ{,}736\,337, & E_1 = 131^\circ{,}843\,196, & E_2 = 79^\circ{,}682\,604, \\ E_3 = 54^\circ{,}983\,412, & E_4 = 44^\circ{,}067\,435, & E_5 = 41^\circ{,}494\,423, \\ E_6 = 41^\circ{,}355\,533, & E_7 = 41^\circ{,}355\,514, & E_8 = 41^\circ{,}355\,514. \end{array}$$

Jasno je da je naš izbor početne vrednosti E_0 bio neadekvatan, ali kao što smo se uverili iterativna procedura i tada konvergira. Bolji izbor E_0 zaustaviće se na prve četiri iteracije.

U sledećem koraku korišćenjem jednačine (6.37) nalazimo da je

$$r = 0{,}273\,916\,9\,a, \qquad \vartheta = 142^\circ{,}280\,116$$

Konačno, potrebna nam je vrednost velike poluose, koju možemo dobiti iz trećeg Keplerovog zakona. Izraženo u astronomskim jedinicama i godinama, imamo da je $a^3 = T^2$, odakle dobijamo

$$a = 17{,}943\,476\ \mathrm{AJ} \quad \text{i} \quad r = 4{,}915\,022\ \mathrm{AJ}.$$

Tačnost podataka ne opravdava broj decimalnih mesta koja su uključena. Važeće cifre su prikazane da bi čitalac mogao da ih proveri direktnim i detaljnijim računom.

§ 6.5. Jednačina centra.

Za pravu anomaliju izvešćemo stepeni red po ekscentričnosti i srednjoj anomaliji. Ova formula, poznata kao jednačina centra, biće korišćena u kasnijim izlaganjima. To nam može dati neke približne rezultate za male ekscentričnosti, ali treba znati da je standardni metod za izražavanje ϑ preko M upravo objašnjen u §6.4.

Ugaoni moment (6.12) može biti izražen preko anomalija pomoću

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dM} = \frac{h}{n}.$$

Korišćnjem (6.23), (6.25) i (6.29), ovo nam daje

$$\frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dM} = 1.$$

Kako su ϑ i M u istom trenutku jednaki nuli, možemo srednju anomaliju da predstavimo integralom

$$M = \int_0^{\vartheta} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos x)^2}\, dx. \tag{6.38}$$

Za male vrednosti e, integrand može biti izražen preko stepenog reda, dajući tačne vrednosti do reda e^2, odnosno, dobijamo da je

$$M = \int_0^{\vartheta} \left(1 - 2e\cos x + \frac{3}{2}e^2\cos 2x \cdots\right) dx.$$

Integracijom dobijamo

$$M = \vartheta - 2e\sin\vartheta + \frac{3}{4}e^2\sin 2\vartheta + O(e^3). \tag{6.39}$$

Na žalost, ova formula je nepodesna za praktičnu upotrebu, jer je M nezavisna promenljiva za razliku od ϑ. Međutim, ovoj formuli može se naći inverzna na sledeći način. Do nultog reda po ekscentričnosti imamo $\vartheta = M$. Zamenjujući to u drugi član na desnoj strani dobijamo

$$\vartheta = M + 2e\sin M + O(e^2).$$

Ovo, vraćeno u relaciju (6.39), daje

$$\vartheta = M + 2e\sin(M + 2e\sin M) - \frac{3}{4}e^2\sin 2M + O(e^3).$$

Pri uobičajenim aproksimacijama malih uglova imamo

$$\vartheta - M = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + O(e^3). \tag{6.40}$$

Razlika između prave i srednje anomalije je poznata kao *jednačina centra*. To je ugao između pravog pravca ka planeti i pravca koji bi planeta imala da joj je ugaona brzina stalna. Jednačina centra je izvedena do na e^3 u jednačini (6.40). Gore opisan metod može biti proširen na članove višeg reda, ali algebra postaje znatno komplikovanija.

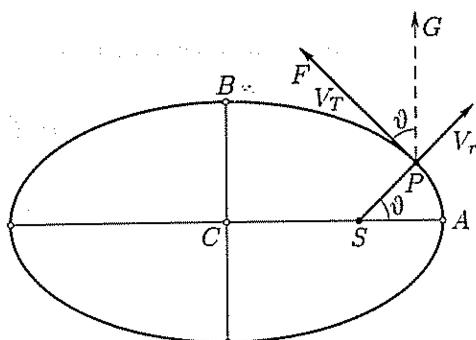
§ **6.6. Komponente planetske brzine.** Transverzalna komponenta V_T planetske brzine je zadata jednačinom (6.16). Ova jednačina može biti prepisana u sledećem obliku

$$V_T = V_0(1 + e\cos\vartheta), \tag{6.41}$$

gde je

$$V_0 = \frac{h}{a(1-e^2)}. \tag{6.42}$$

Transverzalna komponenta može, dakle, biti podeljena u dva dela—transverzalnu komponentu stalnog intenziteta V_0 i komponentu sa promenljivim intenzitetom $eV_0\cos\vartheta$. Kao što je ilustrovano na sl. 6.3, prava anomalija je ugao između velike poluose CA i radijus vektora. Povucimo liniju PG kroz položaj planete paralelan maloj osi CB. Tangentni pravac PF gradi ugao ϑ sa ovom linijom. Promenljivi deo transverzalne brzine može, zbog toga, biti tretiran kao stalna komponenta transverzalne brzine eV_0 u pravcu PG—paralelno maloj osi elipse.



СЛИКА 6.3

Važnost ove dekompozicije transverzalne brzine uočićemo kada budemo razmatrali radijalnu komponentu planetske brzine V_r. Iz (6.15), imamo

$$V_r^2 + V_T^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Korišćenjem (6.29), (6.23) i (6.42) ovo može biti izraženo na sledeći način

$$V_r^2 + V_T^2 = V_0^2(1 + 2e\cos\vartheta + e^2).$$

Konačno, transverzalna komponenta je uklonjena pomoću (6.41), pa dobijamo

$$V_r = eV_0\sin\vartheta. \tag{6.43}$$

Primetimo da je uzet pozitivan koren, jer je radijalna brzina pozitivna na „gornjoj" polovini putanje, između perihela i afela, što odgovara intervalu $0 < \vartheta < \pi$.

Sa sl. 6.3, interpretacija jednačine (6.43) je jasna; planetska radijalna brzina može biti shvaćena kao radijalna komponenta konstantne brzine eV_0 u pravcu PG. Dodajući to prethodnom tvrđenju u vezi sa transverzalnom komponentom, možemo da formulišemo sledeću teoremu:

❋ *Brzina planete na putanji može biti razložena na transverzalnu komponentu stalnog intenziteta V_0 $[\equiv h/(a(1-e^2))]$ i stalnu brzinu intenziteta eV_0 paralelnu maloj osi elipse.*

Ova teorema će biti korisna u sledećim paragrafima kada se bude razmatralo pitanje uticaja efekata putanjskog kretanja Zemlje na prividne položaje i prividne radijalne brzine zvezda ili drugih izvora.

§6.7. Eliptične i hiperbolične putanje.

Najvažnije formule eliptičkog kretanja date su u tabeli 6.1. Ove jednačine su izvedene, uglavnom, iz formula (6.2) i (6.3). Polazište za ovo izvođenje je bilo uvođenje parametra a u jednačinu (6.14)

$$C = -\frac{\mu}{a}, \tag{6.14}$$

gde je C bila konstanta integracije proporcionalna ukupnoj energiji sistema. Kasnije je a poistovećeno sa velikom poluosom putanje. Kako smo razmatrali ograničene (eliptične) putanje, C je bilo negativno, a a pozitivno. Međutim, ničim u toku izvođenja nismo zahtevali da a bude pozitivno, a formule u tabeli 6.1 važiće i za neograničene putanje ako je a negativno. Tada je $e > 1$, odnosno h^2 mora biti pozitivno. Prva jednakost govori da se radi o hiperboli sa ekscentričnošću e i velikom poluosom $-a$. Da bi sve formule bile usaglašene, očigledno je da parametar n i anomalije E i M treba da budu imaginarni brojevi. Jasno je da ovo nije dobro (ne odgovara).

Bolji postupak za analiziranje neograničenih putanja je da se „nezgodni" parametri predefinišu; $-a$ u a, in u n, iM u M, $-iE$ u E. Rezultujuće formule su onda izražene samo preko realnih veličina i date su u tabeli 6.2. Čitalac može izvesti ove formule, prilagođavajući odgovarajuće izraze u §§6.2 i 6.3.

Formule za položaj i brzinu mogu se koristiti na isti način kao i odgovarajuće formule za eliptično kretanje. Keplerova jednačina se rešava Njutn-Rafsonovom metodom i rezultujuća ekscentrična anomalija E daje mogućnost određivanja položaja (r, ϑ). Keplerovi zakoni su malo modifikovani, pa prvi zakon sada govori da je putanja hiperbola, drugi je neizmenjen, dok treći ne može biti postavljen na uobičajeni

Tabela 6.1. Formule za eliptičnu putanju

- *Tri Keplerova zakona*

(i) $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$

(ii) $r^2\dot{\vartheta} = h$

(iii) $n^2a^3 = \mu \equiv G(m_1+m_2)$

gde je

$$h^2 = \mu a(1-e^2)$$

- *Formule za položaj*

Keplerova jednačina:

$$n(t-\tau) = M = E - e\sin E$$

$$r = a(1-e\cos E)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$$

- *Formula za brzinu*

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Tabela 6.2. Formule za hiperboličnu putanju

- *Tri Keplerova zakona*

(i) $r = \dfrac{a(e^2-1)}{1+e\cos\vartheta}$

(ii) $r^2\dot{\vartheta} = h$

(iii) $n^2a^3 = \mu \equiv G(m_1+m_2)$

gde je

$$h^2 = \mu a(e^2-1)$$

- *Formule za položaj*

Keplerova jednačina:

$$n(t-\tau) = M = e\operatorname{sh} E - E$$

$$r = a(e\operatorname{ch} E - 1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{1/2}\operatorname{th}\frac{1}{2}E$$

- *Formula za brzinu*

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$$

način jer period na hiperboličnoj putanji nije definisan. Ipak, jednačina $n^2a^3 = \mu$ govori da postoji relacija slična onoj u eliptičnom slučaju, koja povezuje veličinu putanje, vremensku komponentu (ako ne period) i mase dva tela.

§ 6.8. Poređenje opšte relativnosti sa Njutnovom teorijom.

Dok u najvećem broju slučajeva Njutnova teorija daje odgovarajući opis planetskog kretanja, ipak postoje efekti koji mogu biti uključeni u teoriju samo posredstvom opšte teorije relativnosti. Ovaj paragraf je posvećen razmatranju problema dva tela u opštoj relativnosti i utvrđivanju odstupanja od Njutnove teorije. Odstupanja su relativno mala u kvantitativnom iznosu, uprkos krupnim razlikama u koncepcijskim osnovama dve teorije. Kao što ćemo se uveriti, skoro identične diferencijalne jednačine kretanja dobijamo iz dva prilično različita pristupa.

Kao što je već objašnjeno u §3.5, gravitaciono polje Sunca je predstavljeno Švarcšildovim prostor-vremenom, sa Rimanskom (RIEMANN) metrikom, koja se može izraziti u opštem obliku

$$ds = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{6.44}$$

Planeta se smatra slobodnom česticom (materijalnom tačkom) i njena svetska linija je, stoga, obična geodezijska linija čija diferencijalna jednačina ima oblik

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\lambda\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{6.45}$$

Parametar s je dužina luka krive; to je zapravo sopstveno vreme, odnosno vreme koje meri posmatrač koji se nalazi na planeti. Primetimo, takođe, da je u ovom pristupu masa planete zanemarena u poređenju sa masom Sunca.

Ispitajmo metriku u njenom najjednostavnijem obliku, naime počnimo od oblika (3.46)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{dr^2}{(1-2m/r)} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2\right] \tag{6.46}$$

gde je

$$m = \frac{GM_\odot}{c^2} \approx 1{,}5\,\text{km}. \tag{6.47}$$

Moramo naglasiti da su koordinate samo oznake (često veličine bez nekog posebnog fizičkog smisla, pp.), te tako r ne sme biti poistovećeno sa rastojanjem planete od Sunca, niti t sme biti poistovećeno sa merenim vremenom (u klasičnom smislu, pp.). Mereno vreme se pre može poistovetiti sa intervalom s, ali treba naglasiti da i koordinatno vreme, takođe, obezbeđuje važan standard. To jeste oznaka, ali posebno važna oznaka, jer t u (6.46) predstavlja taj izbor vremenske koordinate kojim je moguće metriku izraziti u potpuno statičkoj formi, tj. $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$.

Pojedinačno, uz pomoć jednačine (6.46), mogu se naći sve komponente metričkog tenzora. Sve komponente, izuzev dijagonalnih komponenti, su jednake nuli, a dijagonalne su

$$g_{11} = \frac{-1}{c^2(1-2m/r)}, \quad g_{22} = -\frac{r^2}{c^2}, \quad g_{33} = -\frac{r^2\sin^2\theta}{c^2}, \quad g_{44} = 1 - \frac{2m}{r}. \tag{6.48}$$

Ove komponente sada mogu biti unete u diferencijalne jednačine geodezijskih linija (6.45).

Razmotrimo prvo izraz za θ, tj. stavimo $\lambda = 2$ u (6.45). Od ukupnog broja, ostaju samo dva člana, dajući

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{22}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0.$$

Iz (6.48) sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right) - r^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0.$$

Uobičajeno je da se izabere posebno rešenje ove diferencijalne jednačine, naime

$$\theta = \frac{1}{2}\pi. \tag{6.49}$$

Ovo znači da se planeta kreće u ekvatorskoj ravni sfernog polarnog koordinatnog sistema. Izbor posebnog rešenja ograničava samo izbor koordinatnih osa.

Stavljajući $\lambda = 3$ i 4 u jednačinu (6.45), odmah dobijamo njihove prve integrale. Kako su sve komponente metričkog tenzora nezavisne od ϕ i t, ove dve jednačine daju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{33}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right) = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{44}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).$$

Posle integracije dobijamo

$$r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = h, \tag{6.50}$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = k, \tag{6.51}$$

gde su h i k konstante integracije. Prva od ovih jednačina je po obliku istovetna jednačini (6.12); jednačine (6.50) i (6.51) su izrazi u opštoj relativnosti koji odgovaraju zakonima održanja ugaonog momenta i energije, redom.

Nije neophodno da se koristi i preostala najkomplikovanija diferencijalna jednačina geodezijskih linija. Ona bi dala radijalnu komponentu jednačina kretanja. Umesto toga zamenićemo rezultate (6.49), (6.50) i (6.51) u jednačinu kojom je data metrika i koja je, zapravo, prvi integral diferencijalnih jednačina geodezijskih linija. Posle nekih pojednostavljivanja dobijamo

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 = c^2(k^2-1) + \frac{2mc^2}{r} - \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right). \tag{6.52}$$

Sada, motivisani oznakama uvedenim u Njutnovskom slučaju, uvedimo parametre μ i a sledećim definicijama

$$\mu = GM_\odot = mc^2, \tag{6.53}$$

dok ćemo a definisati na sledeći način

$$c^2(k^2-1) = -\frac{\mu}{a}. \tag{6.54}$$

Jednačina (6.52) može sada biti prepisana u obliku

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) + \frac{2mh^2}{r^3}. \tag{6.55}$$

Ako ovu diferencijalnu jednačinu uporedimo sa njenim njutnovskim ekvivalentom, tj. sa diferencijalnom jednačinom (6.15), primetićemo da se svi članovi osim poslednjeg poklapaju, a kako je $m \ll r$, taj član je najmanji. Izvesno je, takođe, da treba obratiti pažnju na interpretaciju r i na činjenicu da je s sopstveno vreme, a ne Njutnovo apsolutno vreme t. Međutim, i pod tim uslovima razlike u predviđanjima te dve teorije biće neznatne kada je $m \ll r$, te Njutnova teorija jasno predstavlja prvu aproksimaciju, vrlo blisku predviđanjima opšte relativnosti. Razlike između dve teorije su detaljno ispitane u sledećem paragrafu.

§ **6.9. Keplerovo rešenje u opštoj relativnosti.** Da bi pojednostavili jednačinu (6.55) uvešćemo parametar e uz pomoć definicije koja je data i u Njutnovoj teoriji

$$h^2 = \mu a(1 - e^2). \tag{6.56}$$

Parametri a i e su u okviru Njutnove teorije bili velika poluosa i ekscentričnost, ali sada ukoliko želimo stroge definicije, ove parametre ne možemo poistovetiti sa velikom poluosom i ekscentričnošću. Diferencijalna jednačina (6.55) sada se može izraziti u obliku

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 = -\frac{\mu f(r)}{ar^3}, \tag{6.57}$$

gde je $f(r)$ kubna funkcija data sa

$$f(r) = r^3 - 2ar^2 + a^2(1 - e^2)r - 2ma^2(1 - e^2). \tag{6.58}$$

Za $a > 0$ i $0 < e < 1$ ova jednačina ima tri pozitivna korena, koje ćemo označiti sa r_1, r_2 i r_3. Pretpostavimo da je $r_1 < r_2 < r_3$. Tada se lako uočava da je $r_1 \approx 2m$, $r_2 \approx a(1 - e)$ i $r_3 \approx a(1 + e)$. Jednačina (6.57) pokazuje da $f(r)$ ne može biti pozitivna, tako da je r ograničeno na jedan od dva sledeća intervala $r_2 \leq r \leq r_3$ ili $0 \leq r \leq r_1$. Prvi od ova dva intervala je za nas interesantniji, jer očigledno predstavlja ograničenu putanju, dok bi drugi predstavljao pad na crnu rupu!

U slučaju (planetskog) kretanja neophodno je raditi korektno samo do reda veličine m/a. Za $a \sim 1$ AJ, imamo da je $m/a \sim 10^{-8}$, tako da se članovi drugog i viših redova mogu nesmetano zanemariti. Napišimo korene r_2 i r_3 u sledećem obliku

$$r_2 = \alpha(1 - \eta), \qquad r_3 = \alpha(1 + \eta). \tag{6.59}$$

Tada možemo pisati, sa tačnošću do reda veličine m/a i uz pomoć jednačine (6.58),

$$\alpha = a - m, \qquad \eta = e\left[1 + \frac{m}{ae^2}(1 + e^2)\right], \qquad r_1 = 2m. \tag{6.60}$$

Uzimajući u obzir ograničenja koja važe za r biće pogodno uvesti ekscentričnu anomaliju sledećom definicijom

$$r = \alpha(1 - \eta\cos E). \tag{6.61}$$

Izražavajući funkciju $f(r)$ preko ekscentrične anomalije dobijamo

$$f(r) = -\alpha^2\eta^2 \sin^2 E(r - r_1) = (r - r_1)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}E}\right)^2.$$

Kada se ovo zameni u jednačinu (6.57), ta diferencijalna jednačina dobija sledeći oblik

$$\left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/2} \mathrm{d}s = r\left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^{-1/2} \mathrm{d}E. \tag{6.62}$$

Definišimo srednje kretanje n na isti način kao i u klasičnom slučaju

$$n^2a^3 = \mu. \tag{6.63}$$

Tada korišćenjem (6.60) i (6.61) binomni izraz u (6.62) postaje

$$n\,\mathrm{d}s = \left[1 - \left(1 - \frac{m}{a}\right)\eta\cos E\right]\mathrm{d}E. \tag{6.64}$$

Integracijom ove jednačine dobijamo Keplerovu jednačinu. Ako sa s_0 označimo planetsko sopstveno vreme u trenutku prolaska kroz perihel, onda se posle integracije dobija

$$n(s - s_0) = E - \varepsilon \sin E, \tag{6.65}$$

gde ε predstavlja modifikovanu ekscentričnost definisanu sa

$$\varepsilon = \eta\left(1 - \frac{m}{\alpha}\right). \tag{6.66}$$

Jednačina (6.65) može biti korišćena na isti način kao i standardna Keplerova jednačina (6.26). Za dato sopstveno vreme s, numeričkim rešavanjem se dobija E, pa se zatim iz jednačine (6.61) izračuna „radijus vektor". Jedina razlika je da su različite „ekscentričnosti" korišćene u različitim jednačinama. Treba imati na umu da mi zapravo još nismo pokazali da je putanja o kojoj govorimo eliptična. U stvari, ovo je osobina različitog koordinatnog sistema, koja je opisana u sledećem paragrafu. Do tada se nećemo doticati pitanja kako je ugaona koordinata ϕ povezana sa ekscentričnom anomalijom E.

U Keplerovoj jednačini koju smo upravo izveli, srednja anomalija je proporcionalna sopstvenom vremenu. Transformisaćemo tu jednačinu tako da se u njoj pojavi koordinatno vreme. Korišćenjem (6.51), jednačina (6.64) može biti prepisana u sledećoj formi

$$\frac{n}{k}\,\mathrm{d}t = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}(1 - \varepsilon\cos E)\,\mathrm{d}E.$$

Ova jednačina primenom binomne formule, i uz pomoć (6.61), postaje, sa dovoljnom tačnošću,

$$\frac{n}{k}\,\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{2m}{\alpha} - \varepsilon\cos E\right)\mathrm{d}E.$$

Integracijom ove jednačine dobija se alternativni oblik Keplerove jednačine. Ali potrebno je modifikovati srednje kretanje i još jednom ekscentričnost. Najpogodnije je definisati ih na sledeći način:

$$n' = \frac{n}{k}\left(1+\frac{2m}{\alpha}\right)^{-1} = n\left(1-\frac{3m}{2\alpha}\right) \tag{6.67}$$

i

$$\varepsilon' = \varepsilon\left(1+\frac{2m}{\alpha}\right)^{-1} = \eta\left(1-\frac{3m}{\alpha}\right). \tag{6.68}$$

Ako sa t_0 označimo koordinatno vreme koje odgovara trenutku prolaska kroz perihel, nova Keplerova jednačina se može napisati u standardnom obliku

$$n'(t-t_0) = E - \varepsilon' \sin E. \tag{6.69}$$

Primetimo da iako su srednje kretanje i ekscentričnost modifikovani, ekscentrična anomalija je ostala ista. Radijus vektor se može odrediti pomoću jednačine (6.61) za zadati trenutak vremena t, pod pretpostavkom, naravno, da je ekscentrična anomalija dobijena numeričkim rešavanjem Keplerove jednačine.

Jednačine (6.65) i (6.69) uzete zajedno, dopuštaju da se sopstveno vreme i koordinatno vreme povežu. Ta relacija se dobija delimičnom eliminacijom ekscentrične anomalije

$$t - t_0 = \frac{n}{n'}(s-s_0) + (\varepsilon-\varepsilon')\sin\frac{E}{n'}.$$

Definišimo period na putanji kao

$$P = \frac{2\pi}{n}. \tag{6.70}$$

Ova definicija, odgovara klasičnoj definiciji i, u stvari, predstavlja sopstveni period —onako kako se meri sa planete. Koordinatni period je neznatno duži (u slučaju planete i Sunca). Veza između intervala koordinatnog i sopstvenog vremena se sada može napisati u obliku

$$t - t_0 = \left(1+\frac{3m}{2\alpha}\right)(s-s_0) + \frac{m\eta \sin E}{\alpha\pi}P. \tag{6.71}$$

§ **6.10. Relativističko pomeranje perihela.** Švarcšildova forma metrike (6.46), iako najjednostavnija po obliku, ne predstavlja najprirodnije određivanje položaja. Kao što je već objašnjeno u §3.6, za te svrhe najpogodnija je izotropna forma metrike (3.52). U tim koordinatama samo se menja r koordinata (u odnosu na Švarcšildove koordinate, pp.), u novu radijalnu koordinatu $\bar{r}$, koja je sa r povezana jednačinom

$$r = \bar{r}\left(1+\frac{m}{2\bar{r}}\right)^2. \tag{6.72}$$

Ostale koordinate ostaju nepromenjene.

Razlika između dve radijalne koordinate (stare i nove, pp.) je reda veličine m. Do tačnosti tog reda veličine možemo pisati

$$r = \bar{r} + m.$$

Zbog toga, nova radijalna koordinata može biti izražena preko ekscentrične anomalije kao

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(1-\bar{\eta}\cos E), \tag{6.73}$$

gde na osnovu (6 61) i (6.60) imamo

$$\tilde{\alpha} = \alpha - m = a - 2m, \tag{6.74}$$

i

$$\tilde{\eta} = \eta\left(1 - \frac{m}{\alpha}\right)^{-1} = \eta\left(1 + \frac{m}{\alpha}\right). \tag{6.75}$$

Jednačina (6.73) se može koristiti za određivanje $\bar{r}$ kada je E izračunato iz jedne od dve forme Keplerove jednačine, postavljene u prethodnom paragrafu.

Kao što se moglo očekivati, velika poluosa i ekscentričnost planetske putanje zavise od koordinatnog sistema koji se koristi. Ovi pojmovi, iako do sada korišćeni, nisu bili strogo definisani, zato što oblik putanje tek treba da bude određen. Ovo uključuje određivanje analitičke veze između ugaone koordinate ϕ i radijalne koordinate $\bar{r}$ (ili r). To može biti izvedeno preko ekscentrične anomalije.

Razmotrimo diferencijalnu jednačinu za ϕ (6 50). Posle eliminacije r i s uz pomoć prvih integrala (6.61) i (6.65) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}E} = \frac{h}{n\alpha^2}\frac{(1-\varepsilon\cos E)}{(1-\eta\cos E)^2}.$$

Parametri h i n se mogu eliminisati uz pomoć jednačina (6 56) i (6.63)

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}E} = \frac{a^2}{\alpha^2}(1-e^2)^{1/2}\frac{(1-\varepsilon\cos E)}{(1-\eta\cos E)^2}. \tag{6.76}$$

Ova jednačina dopušta jedan egzaktan integral, ali taj integral nije opravdan, jer je jednačina (6.76) korektna samo do reda veličine m/a.

Komplikacije u traženju tog integrala (6.76), nastaju zbog postojanja tri različite vrednosti ekscentričnosti koje se u njoj pojavljuju. U Njutnovom slučaju ove tri vrednosti su bile jednake, a jednačina odgovarajuća jednačini (6.76) svodi se na integral (6.27). Zbog toga, najbolji postupak je prvo svesti (6.76) na standardnu formu, održavajući tačnost do reda veličine m/a. Uvedimo ekscentričnost η^*, koja će tek biti definisana, a koja se razlikuje od ostalih ekscentričnosti samo do reda veličine m/a. Tada

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}E} = (1-e^2)^{1/2}\frac{a^2\left[1-\eta^*\cos E + (\eta^*-\varepsilon)\cos E\right]}{\alpha^2\left[1-\eta^*\cos E + (\eta^*-\eta)\cos E\right]^2}.$$

Razvijajući desnu stranu uz pomoć binomne teoreme, a posle redukcije do traženog reda veličine, ovo daje

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}E} = \frac{a^2(1-e^2)^{1/2}}{\alpha^2(1-\eta^*\cos E)}\left[1 + \frac{(2\eta-\varepsilon-\eta^*)\cos E}{(1-\eta^*\cos E)} + O(m/a)^2\right].$$

Parametar η^* se tada bira tako da drugi član u uglastim zagradama postaje jednak nuli. Dalje sledi iz formula (6 66) i (6.75) da je

$$\eta^* = \tilde{\eta}. \tag{6.77}$$

Stoga je normalno izraziti (6.76) preko parametara pridruženih tilda-koordinatnom sistemu. Posle nekih pojednostavljenja, uključujući (6.60) i (6.75), jednačina (6.76) se svodi, sa tačnošću do reda veličine $m/\tilde{\alpha}$, na

$$\frac{d\phi}{dE} = \left[1 + \frac{3m}{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}\right] \frac{(1-\tilde{\eta}^2)^{1/2}}{(1-\tilde{\eta}\cos E)}.$$

Ako na ovu jednačinu primenimo standardni integral (6.27) dobićemo

$$\phi - \phi_0 = 2\left[1 + \frac{3m}{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}\right] \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{1+\tilde{\eta}}{1-\tilde{\eta}}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}E\right], \tag{6.78}$$

gde je ϕ_0 vrednost promenljive ϕ u trenutku prolaska kroz perihel $E = 0$.

Ovim je kompletiran proces određivanja planetskog položaja. Za izabrani trenutak vremena, bilo koordinatnog bilo sopstvenog, odgovarajuća Keplerova jednačina—(6.65), ili (6.69)—daje mogućnost izračunavanja ekscentrične anomalije. Zamenom ekscentrične anomalije E u (6.73) i (6.78) računamo planetski položaj $(\tilde{r}, \phi)$ u izotropnom koordinatnom sistemu.

Opisivanje planetske putanje je jednostavnije u izotropnom koordinatnom sistemu, jer se u formulama za $\tilde{r}$ i ϕ—(6.73) i (6.78), redom, pojavljuje samo jedna vrednost ekscentričnosti. Definišimo pravu anomaliju ϑ sa

$$\vartheta = \left[1 + \frac{3m}{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}\right]^{-1} (\phi - \phi_0). \tag{6.79}$$

Tada jednačina (6.78) daje

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{1+\tilde{\eta}}{1-\tilde{\eta}}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}E.$$

Upoređenje ovih jednačina sa odgovarajućim jednačinama iz Njutnove teorije, pokazuje da je planetska putanja data sa krivom

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}{1+\tilde{\eta}\cos\vartheta}. \tag{6.80}$$

Ovo može biti shvaćeno kao elipsa sa velikom poluosom $\tilde{\alpha}$ i ekscentričnošću $\tilde{\eta}$, ali kao što (6.79) pokazuje ta elipsa nije fiksirana, nego elipsa koja rotira sa konstantnom ugaonom brzinom.

Neka je ω argument perihela te rotirajuće elipse, jednostavno vrednost ϕ u perihelu. Kako u perihelu imamo da je $E = 0$, jednačina (6.78) govori da je $\omega = \phi_0$. Posle jednog perioda E će porasti za 2π, a odgovarajuća vrednost ϕ data sa (6.78) biće

$$\phi = \phi_0 + 2\pi\left[1 + \frac{3m}{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}\right].$$

Sledi da, u toku jednog perioda—od perihela do perihela—postoji porast argumenta perihela $\Delta\omega$ dat izrazom

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m}{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\eta}^2)}. \tag{6.81}$$

Ovim predviđanjem dat je prvi klasični test opšte relativnosti. Formulu (6.81) je prvi izveo sam Ajnštajn, čime je, smatra se, objašnjena razlika između posmatrane i računate putanje planete Merkur, razlika koja je poznata još od vremena Leverjea (LE VERRIER), ali koja nije mogla biti objašnjena poremećajima velikih

planeta. Pomeranje perihela Merkurove putanje iznosi 43″ za sto godina. Isto pomeranje je znatno manje za ostale planete, jer je $\Delta\omega$ obrnuto proporcionalno velikoj poluosi planete. Dalje, $\Delta\omega$ u (6.81) je pomeranje perihela za *jednu revoluciju*, tako da duži putanjski periodi ostalih planeta negativno utiču na mogućnost eventualne detekcije ovog relativističkog efekta. Stoga, nije bilo moguće ubedljivo izolovati ovaj efekt za ostale planete u Sunčevom sistemu. Međutim, značajna evidencija o ovom efektu je dvojni pulsar.

Putanja planete je bila opisana u izotropnom koordinatnom sistemu. Opis iste putanje u Švarcšildovom koordinatnom sistemu je mnogo komplikovaniji. I u tim koordinatama sekularni efekt—pomeranje perihela, dato je istim izrazom (6.81), mada rotacija putanje—elipse, nije strogo jednolika. Zbog toga je bio poželjan izotropni koordinatni sistem.

Rešenje problema dva tela u opštoj relativnosti modifikuje sva tri Keplerova zakona. Modifikaciju prvog Keplerovog zakona smo već videli—planetska putanja je jednoliko rotirajuća elipsa u izotropnom koordinatnom sistemu. Drugi zakon je takođe modifikovan—koordinatni ugaoni moment nije očuvan u izotropnom koordinatnom sistemu. Ekvivalent zakonu održanja je jednakost (6.50). Ne održanje je potpuno dopustivo, jer se koriste različite ekscentričnosti u Keplerovoj jednačini. Radi potpunosti, pomenućemo i modifikaciju u trećem Keplerovom zakonu. Još uvek imamo da je $n^2a^3 = \mu$, ali n je srednje kretanje u sopstvenom vremenu, a a je velika poluosa u bilo kom koordinatnom sistemu. Ako se koriste izotropne koordinate i koordinatno vreme, rezultat će dobiti sledeći oblik

$$n'^2\tilde{a}^3 = \mu\left(1 - \frac{9m}{\tilde{a}}\right).$$

Treba se podsetiti da je u poslednja dva paragrafa, analiza tačna samo do reda veličine $m/\tilde{a}$. Ovo je uglavnom dovoljno za sve primene u Sunčevom sistemu. Na više mesta smo pretpostavljali da ekscentričnost ima tipičnu vrednost u intervalu $0 < e < 1$. Analiza neće važiti u slučajevima kada je ekscentričnost u okviru $O(m/\tilde{a})$ oko krajeva ovog intervala. U stvari, tačna rešenja mogu biti izvedena za slučaj kružnih putanja i za slučaj radijalnog padanja (v. zadatke 6.8 i 6.9).

Zadaci

6.1. Elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ima parametarsko rešenje

$$x = a\cos E, \qquad y = b\sin E,$$

što obezbeđuje geometrijsku definiciju za ekscentričnu anomaliju. Pokazati da primenom drugog Keplerovog zakona i izvođenjem integracije površine preko promenljive E dolazimo do Keplerove jednačine.

6.2. Dokazati da se putanjska brzina može izraziti sa

$$V^2 = \frac{\mu}{a}\left(\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}\right).$$

Pokazati dalje da ova brzina zaklapa ugao ψ sa radijus vektorom, gde je

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e\sin E}.$$

6.3. Planeta Mars se kreće oko Sunca po putanji sa velikom poluosom od 1,5236 AJ i ekscentričnošću 0,0934. Prvog januara 1984. njeno heliocentrično rastojanje je bilo 1,6609 i opadalo je. Izračunati datum sledećeg prolaza kroz pericentar.

6.4. Satelit je lansiran sa stabilne putanje poluprečnika od 6625 km sa brzinom 11,55 km/s u horizontalnom pravcu. Izračunati geocentrično rastojanje tog satelita posle 24 časa. (Geocentrična gravitaciona konstanta: $GM_\oplus = 3{,}986 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$.)

6.5. Mala planeta se kreće po eliptičnoj putanji sa velikom poluosom od 3,129 AJ i ekscentričnošću 0,1341. Izračunati njenu heliocentričnu longitudu godinu dana posle prolaska kroz perihel.

6.6. Razmotrimo numeričko rešenje algebarske jednačine

$$f(E) = E - e\sin E - M = 0.$$

Njutn-Rafsonov metod je iskorišćen sa početnom vrednošću $E_0 = M$. Pokazati da ovo daje popravku ΔE koja je veća za $M = \arccos e$. Pokazati da ta maksimalna vrednost iznosi $e(1-e^2)^{-1/2}$ i pokazati da je ovaj izbor E_0 nezadovoljavajući za velike ekscentričnosti pri malim vrednostima M.

6.7. Pokazati da je, u okolnostima navedenim u prethodnom pitanju, puno pogodnija prva aproksimacija za E:

$$E_0 = (6M)^{1/3}.$$

6.8. Pokazati da su koordinatni i sopstveni period tela koje se kreće po kružnoj putanji poluprečnika r u standardnoj Švarcšildovoj metrici dati sa

$$T_k = 2\pi\left(\frac{r^3}{mc^2}\right)^{1/2} \quad \text{i} \quad T_s = 2\pi\left(\frac{r^3}{mc^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{3m}{r}\right)^{1/2}$$

6.9. Telo polazi iz stanja mirovanja sa radijalnom koordinatom r_0 datoj u standardnoj Švarcšildovoj metrici. Dokazati da će to telo pasti na singularitet u intervalu sopstvenog vremena datog izrazom

$$T_s = \frac{\pi}{c}\left(\frac{r_0^3}{8m}\right)^{1/2}.$$

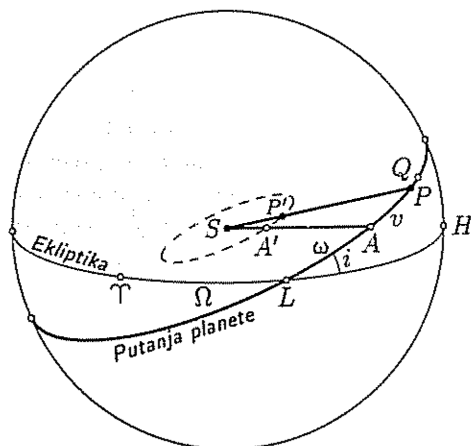
6.10. Pretpostavljajući da se Merkur kreće po putanji sa velikom poluosom 0,3871 AJ i ekscentričnošću 0,2056, izračunati linearno pomeranje položaja perihela koje predviđa opšta relativnost, u toku jednog putanjskog perioda.

Глава Седма

Putanje planeta i satelita

§ **7.1. Putanja u prostoru.** Rezultati dobijeni u glavi 6 biće sada primenjeni na putanje tela u Sunčevom sistemu. One mogu da se podele u dve osnovne klase: heliocentrične putanje, koje se odnose na planete, komete, asteroide i međuplanetske stanice, i putanje satelita—prirodnih ili veštačkih. Razmatranje je, uglavnom, u okviru Njutnovih pojmova, mada će neka navođenja biti data sa relativističkim modifikacijama koje su iznete u §§6.–6.10.

Heliocentrične putanje su jedinstveno određene njihovim *putanjskim elementima* koji su najbolje definisani u odnosu na nebesku sferu, kao što je prikazano na sl. 7.1. Ovo je heliocentrična nebeska sfera—S je Sunce—a putanja planete je prikazana kao tačkasta kriva unutar nebeske sfere. Neka je P' položaj planete u nekom trenutku t i neka je A' njen položaj u trenutku prolaza kroz perihel. Povucimo, redom, SP' i SA' do preseka sa nebeskom sferom u tačkama P i A. Tada ravan putanje seče nebesku sferu po velikom krugu LAP. Ovaj veliki krug preseca ekliptiku ΥLH u dvema tačkama koje se nazivaju *čvorovi*. Samo jedna od njih (L) je prikazana na slici. To je *uzlazni čvor* koji odgovara tački u kojoj planeta prelazi sa juga na sever u odnosu na ekliptiku. *Silazni čvor* je, onda, dijametralno suprotna tačka. (U prvoj aproksimaciji! ili za oskulatornu putanju? pp.)



Putanjski elementi i, Ω i ω planete.
Слика 7.1

Ekliptika daje pogodnu referentnu ravan za heliocentrične putanje. Putanjska ravan planete je određena u odnosu na ekliptiku sa dva putanjska elementa (Ω, i) definisana sa

$$\Omega = \Upsilon L, \qquad i = ALH \qquad (7.1)$$

Parametar Ω je *longituda uzlaznog čvora* a i je *nagib putanje* (u odnosu na ekliptiku). Ova dva parametra ne definišu samo putanjsku ravan, već i način

kretanja po putanji. Dok Ω uzima bilo koju vrednost između 0° i 360°, i je ograničeno na dva prva kvadranta. U skladu sa korišćenjem u §2.5, $i \leq 90°$ odgovara direktnim putanjama, dok $i \geq 90°$ odgovara retrogradnim putanjama.

Svi ostali putanjski elementi bili su uvedeni u glavi 6. Orijentacija putanje u ravni data je *argumentom perihela* ω, gde je

$$\omega = LA. \tag{7.2}$$

Dimenzije i oblik putanje dati su velikom poluosom a i ekscentričnošću e, dok je položaj tela na putanji određen trenutkom prolaza kroz perihel τ. Šest parametara (a, e, τ, i, Ω, ω) predstavljaju ono što obično zovemo putanjskim elementima za heliocentričnu putanju, iako su izvesne varijante moguće, a ponekad čak neophodne.

Razmotrimo, primera radi, putanju Zemlje. Putanja Zemlje je specijalni slučaj kada je po definiciji $i = 0$. Čvor je neodređen i ne mogu se definisati ni Ω ni ω. Prema tome, orijentacija Zemljine putanje na ekliptici ne može da se dâ preko gore definisanih putanjskih elemenata. U praksi, teškoće nastaju za putanje sa malim, nenultim, nagibom u odnosu na ekliptiku, što važi za većinu velikih planeta.

Teškoća se prevazilazi zamenom ω drugim parametrom. Jedan određuje *longitudu perihela*, u oznaci ϖ, kao

$$\varpi = \Omega + \omega. \tag{7.3}$$

To je delom netačno ime jer ϖ nije stvarno ekliptička longituda planete u perihelu, kako sam naziv sugeriše. Dalje, to je prelomljeni ugao (luk) od Υ do P meren delom po ekliptici i delom po putanjskoj ravni, tj. $\varpi = \Upsilon L + LA$.

Luk AP na sl. 7.1 je prava anomalija v. Pretpostavimo da smo definisali da se tačka Q kreće ravnomerno po velikom krugu putanje ugaonom brzinom n i da se poklapa sa pravcem ka planeti u perihelu. Onda je $AQ = n(t - \tau) = M$. Izlomljeni luk od Υ do Q ($\Upsilon L + LQ$) naziva se *srednja longituda* planete u trenutku t. Označavajući to sa L, imamo

$$L = M + \varpi. \tag{7.4}$$

Kao alternativa uvođenju trenutka prolaza kroz perihel, normalna je praksa da se uzme srednja longituda L_0 za neku epohu, recimo, τ_0. Tada je srednja anomalija za neki trenutak t data sa

$$M = n(t - \tau_0) + L_0 - \varpi. \tag{7.5}$$

Postoje i druge mogućnosti da se dâ srednja anomalija za epohu.

Potrebno je šest putanjskih elemenata za određivanje putanje dva tela omogućavajući poznavanje masa tih tela. Za heliocentrične putanje masa Sunca dominira, ali i mase velikih planeta ne mogu da se zanemare. Proizvod n^2a^3 nije stvarno konstanta za sve planete. Dozvoljavajući to, n se tretira kao dodatni putanjski element. U svakom slučaju, ovo je velika pogodnost u računu srednje anomalije, tako da se praksa proširuje i na mala tela Sunčevog sistema. Za velike planete su u *Astronomical Almanacu* dati sledeći elementi—a, n, e, i, Ω, ϖ, L_0. Utabličenost je malo drugačija za asteroide; umesto dve poslednje longitude dati su argument perihela i srednja anomalija za epohu.

Gore su definisani putanjski elementi za heliocentrične putanje. Kako ekliptika nije pogodna referentna ravan, za putanje satelita je potrebna izvesna modifikacija. Prirodna zamena je ekvatorska ravan, koja je definisana rotacijom planete. U mnogim delovima, razlika u odredbama i terminologiji je očigledna. Razmotrimo,

na primer, satelit na geocentričnoj putanji. Elementi a, n i e definisani su isto kao i ranije, dok je τ *trenutak prolaza kroz perigej*. Dalje, i je *nagib putanje* u odnosu na *ekvator*, a uzlazni čvor je presek ravni putanje sa ekvatorom. Onda je ω *argument perigeja*, a Ω postaje *rektascenzija uzlaznog čvora*.

§ 7.2. Račun efemerida.

Pretpostavimo da su putanjski elementi planete ili nekog drugog tela poznati, i namera je da se predvidi položaj tog tela na nebu za neki posebni (pojedini) datum. Prvi korak mora da bude račun heliocentričnog položaja planete. Razmotrimo nebesku sferu sa sl. 7.2, na kojoj K predstavlja ekliptički pol, Υ je ekvinokcij i U je tačka na ekliptici sa longitudom 90°. Tačke L, A, P su definisane kao na sl. 7.1. Uzmimo mrežu pravouglih osa (ξ, η, ζ) u pravcima $S\Upsilon$, SU, SK. Onda je, u odnosu na ove ose, vektor položaja planete $\mathfrak{r}$ dat sa

$$\mathfrak{r} = (\xi, \eta, \zeta) = r(\cos \Upsilon P, \cos UP, \cos KP), \quad (7.6)$$

gde je r radijus vektor planete u razmatranom trenutku.

Sada je, po definicijama poslednjeg paragrafa, luk $LP = v + \omega$. Dalje je, $\Upsilon L = \Omega$, $LU = 90° - \Omega$ i $LK = 90°$. Označimo tri sferna ugla: $\Upsilon LP = 180° - i$, $ULP = i$ i $KLP = 90° - i$. Tako tri kosinusa pravca koji se pojavljuju u (7.6) mogu da se izvedu primenom kosinusnog obrasca na sferne trouglove $L\Upsilon P$, LUP i LKP. Rezultati su

Слика 7.2

$$\begin{aligned} \xi &= r\left[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i\right] \\ \eta &= r\left[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i\right] \\ \zeta &= r\sin(v+\omega)\sin i. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Da bi mogle da se koriste jednačine (7.7) neophodno je, pored putanjskih elemenata, poznavanje vrednosti r i v. Metodi iz §6.4 to omogućavaju. Kada postupno izvedemo M, iz jednačine (7.5), rešavajući Keplerovu jednačinu nalazimo E, onda r i v slede iz jednačina (6.37).

Sledeći korak je konverzija iz ekliptičkih u ekvatorske koordinate. Iz (2.17), vektor položaja za P, koji se odnosi na ekvatorske ose, je $\mathfrak{r} = (x, y, z)$, gde je

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon \\ z &= \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon, \end{aligned} \quad (7.8)$$

i ε je nagib ekliptike.

Ove veličine daju traženi heliocentrični pložaj planete. Poslednji korak je izvođenje geocentričnog vektora položaja planete, $\mathfrak{r}'$. Neka je $\mathfrak{R} = (X, Y, Z)$ heliocentrični vektor polozaja Zemlje, izražen u pravouglim ekvatorskim koordinatama. Komponente ovog vektora dostupne su iz §C *Astronomical Almanaca*, gde su kao negativne vrednosti utabličene geocentrične pravougle koordinate Sunca. Koristeći ovu informaciju, možemo da izvedemo $\mathfrak{r}'$ kao

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{R}. \tag{7.9}$$

Neka je sada ρ geocentrična daljina planete i (α, δ) njene geocentrična rektascenzija i deklinacija. Onda, iz (7.9), sledi da je

$$\begin{aligned} x - X &= \rho\cos\delta\cos\alpha \\ y - Y &= \rho\cos\delta\sin\alpha \\ z - Z &= \rho\sin\delta. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Prema tome, finalni rezultati su

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y - Y}{x - X}\right), \qquad \delta = \arcsin\left(\frac{z - Z}{\rho}\right), \tag{7.11}$$

gde je

$$\rho^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2.$$

Ovako izvedene koordinate (α, δ) su *geometrijske* koordinate. One ne odgovaraju potpuno geocentričnim koordinatama koje su date u glavi 4 i koje su prividne koordinate planete. Poslednje odgovara fiktivnom posmatraču u centru Zemlje, koji se brzinom Zemlje kreće po njenoj putanji. Ovde nije uzeta u obzir aberacija. Pre bilo kakvog upoređenja sa posmatranjima, moramo da uzmemo u obzir godišnju aberaciju, zbog Zemljinog kretanja, i popravku za svetlosno vreme—raspoznajući činjenicu da se za trenutak posmatranja planete ona kretala iz položaja koji je zauzimala u trenutku kada je emitovano posmatrano zračenje. Ova dva efekta, godišnja aberacija i popravka za svetlosno vreme, *zajedno* se nazivaju *planetska aberacija* i biće razmotrena u glavi 8. Sumirajući, *geometrijski položaj* iz jednačine (7.11) je prividni položaj bez planetske aberacije.

§ 7.3. Mase planeta.

U prethodnom računu rastojanja su bila izražena u astronomskim jedinicama, tako da su velike poluose i koordinate Zemlje prirodno date u ovim jedinicama. Omogućavajući račun srednje anomalije, srednje kretanje n je konvencionalno izraženo u stepenima po danu. U ovim jedinicama jednačina (6.25) postaje

$$n^2 a^3 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 G(M + m). \tag{7.12}$$

Međutim, mase planeta i, kao posledica toga, gravitaciona konstanta, još nisu specifikovane.

Sistem astronomskih konstanti IAU bio je revidiran 1976. g. i dao je novi sistem koji je bio korišćen za pripremu godišnjaka od 1984. g. i dalje. U toj reviziji, astronomske jedinice za masu, dužinu i vreme definisane su kao što sledi:

1. Astronomska jedinica za masu je masa Sunca.
2. Astronomska jedinica za vreme je dan, definisan kao 86 400 SI sekundi.
3. Astronomska jedinica za dužinu definisana je tako da je konstanta gravitacije G jednaka k^2 u ovim jedinicama, gde je k Gausova konstanta [v. (4.57)], data sa

$$k = 0{,}017\,202\,098\,950. \qquad (7.13)$$

Stavljanje odgovarajuće vrednosti za G u (7.12) daće numerički rezultat za zbir masa na putanji sa

$$M + m = 1{,}029\,418\,n^2a^3. \qquad (7.14)$$

Eksplicitno, jedinice u (7.14) su masa Sunca i AJ, sa n izraženo u stepenima po danu.

Primenimo ovu jednačinu na planetsku putanju, koristeći podatke iz *Astronomical Almanaca*. Sledeće vrednosti su izdvojene za planetu Jupiter za epohu 1984 januar 21.:

$$n = 0^\circ{,}083\,089\,45, \qquad a = 5{,}204\,878.$$

Stavljanje ovog u (7.14) daje

$$M + m = 1{,}000\,955,$$

pri čemu je evidentan uticaj Jupiterove mase.

Mase planeta su često izražene u recipročnom obliku kao odnos mase Sunca i mase planete. Kako je $M = 1$, za masu Jupitera ovo daje

$$m^{-1} = 1047.$$

U principu, masa bilo koje planete utvrđuje se primenom jednačine (7.14) na njenu heliocentričnu orbitu. Rezultatu nedostaje preciznosti usled dominacije mase Sunca u svakom slučaju. Za malu planetu, kao što je Mars, na primer, jedino se može izvesti da je njegova masa stvarno zanemarljiva, svakako je manja od jednog milionitog dela mase Sunca.

Međutim, jednačina (7.14) može da se koristi za bilo koje kretanje dva tela. Klasični metod određivanja mase planete je primena ove jednačine na kretanje jednog njenog satelita. Jednačina onda omogućava sumiranje masa planete i satelita, gde je poslednja obično zanemarljiva. Putanja satelita je normalno manje tačna od heliocentrične putanje i to je sada granica tačnosti metoda. Srednje kretanje će biti poznato sa visokom tačnošću, dok su periodi rotacije satelita delovi dana i posmatranja satelita obuhvataju veliki broj perioda. Obrnuto, velika poluosa je veoma netačno određena, jer mora da se izvede iz malog ugaonog rastojanja planete i njenog satelita. Izučavanje putanja prirodnih satelita obično omogućava da se odrede mase planeta sa tačnošću oko 10^4. Jedini izuzetak je Pluton, za koji je moguća ocena manja za nešto više od jednog reda veličine. U sledećem primeru određena je masa Marsa.

Primer. *Satelit Dejmos kreće se oko Marsa po putanji sa periodom $T = 1^d{,}262\,440\,7$ i velikom poluosom $a = 2{,}346 \cdot 10^4$ km. Izračunati masu Marsa.*

Srednje (dnevno) kretanje, u pravim jedinicama, računa se iz $n = 360^\circ/T$. Velika poluosa mora da se pretvori u AJ korišćenjem

$$1\,\text{AJ} = 1{,}496 \cdot 10^8\,\text{km}.$$

Onda jednačina (7.14) daje

$$M + m = 3{,}228 \quad 10^{-7} \text{ masa Sunca}$$

Ovde je M masa Marsa, a m masa Dejmosa. Ocena mase Dejmosa, izvedena iz njegovih razmera, ukazuje da je $m/M < 10^{-8}$. Međutim, ona može da se zanemari, tako da za recipročnu vrednost mase Marsa u masama Sunca imamo

$$M^{-1} = 3\,098\,000.$$

Međuplanetske stanice omogućavaju značajno poboljšanje klasičnog metoda određivanja planetskih masa. Letilice se postavljaju u orbite oko Venere i Marsa, gde postaju veštački sateliti tih planeta. Praćenje (merenje daljina) ovih letilica daje mnogo tačnije putanjske podatke. To omogućava da se masa Marsa odredi do na tri dodatne tačne cifre u vrednosti gore datoj. U slučaju Venere, koja nema prirodne satelite, poboljšanje je mnogo drastičnije, jer su se ranije ocene njene mase odnosile prvenstveno na poremećaje koje Venera stvara u kretanju drugih planeta.

Sve velike planete, uključujući Saturn, bile su posećene od bar jedne međuplanetarne stanice. U većini slučajeva, letilice su na prolaznim putanjama i ostaju u okolini planete nekoliko dana. Nije postavljen veštački satelit neke planete. Isto tako, kada je u okolini planete, stanica se kreće pod uticajem gravitacionog polja planete i merenje daljine stanice omogućava detaljne i tačne putanjske podatke za ❊ telo na *hiperboličkoj* putanji oko planete. Jednačina (7.14) može nepromenjena biti upotrebljena za hiperboličke putanje. Parametar a je velika poluosa hiperbole, a n je iznos rasta srednje anomalije koja se odnosi na položaj stanice kroz Keplerovu jednačinu, (v. tabelu 6.2 u §6.7). Tako su mase planeta određene iz praćenja orbita stanice, čak prilično bliskih prilaza. Šta više, preciznost ovih određivanja masa je znatno bolja od onih dobijenih izučavanjem prirodnih satelita.

Iz analize putanja međuplanetskih stanica, mase svih planeta, od Merkura do Saturna, date su sada sa oko šest važećih cifara u jedinicama mase Sunca. U januaru 1986. g. očekuje se da će biti postignuto znatno poboljšanje naših znanja o ma❊si Urana, kada će *Voyager 2* imati susret sa tom planetom. Onda će samo u slučaju Neptuna i Plutona biti potrebno oslanjati se na klasični metod određivanja mase planeta.

§ 7.4. Planetski poremećaji.

Putanja planete oko Sunca nije prava elipsa zbog poremećajnog dejstva ostalih planeta. Znači, putanjski elementi ne mogu da se smatraju tačnim konstantama orbitalnog kretanja. Međutim, trenutna eliptična putanja može da se definiše kao putanja koju planeta opisuje u ❊ nekom trenutku vremena i se navodi kao *oskulatorna elipsa*. Određena je potpuno masom planete, njenim položajem i brzinom u tom trenutku. Slikovito, oskulatorna elipsa može da se nazove putanjom po kojoj se kreće planeta dok su poremećajni efekti ostalih planeta trenutno „isključeni".

❊ Putanjski elementi oskulatorne elipse nazivaju se *oskulatorni elementi*. Oni će, zaista, varirati sa vremenom, ali, kako su mase svih poremećajnih planeta male u odnosu na masu Sunca, varijacije oskulatornih elemenata biće male, barem u toku ograničenih intervala vremena. Odatle, oskulatorni elementi mogu da se koriste za

izračunavanje položaja planete u kratkom vremenskom intervalu. Ovi elementi su na 40-to dnevnim intervalima dati u *Astronomical Almanacu* za sve velike planete, uključujući Zemlju.

Složeni metodi nebeske mehanike, sasvim van dometa ove knjige, razvijeni su za određivanje varijacija oskulatornih elemenata planeta. Teorije poremećaja prvih i viših redova bile su konstruisane dajući elemente u obliku niza članova oblika

$$\eta = \eta_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \text{periodični članovi} + (t \cdot \text{periodični članovi}). \qquad (7.15)$$

Ovde je η neki od putanjskih elemenata i η_0 je njegova početna vrednost. Ima tri vrste članova—sekularni, periodični i mešoviti, pri čemu sekularnih članova do drugog reda nema za veliku poluosu, mada su oni prisutni u svim ostalim elementima, normalno za $\lambda_2 \ll \lambda_1$. Sekularni članovi su mnogo evidentniji u ugaonim elementima, kao što su longituda uzlaznog čvora ili argument perihela. Normalna praksa u nebeskoj mehanici je da se modifikacije zbog opšte relativnosti tretiraju kao poremećaji Njutnovog problema dva tela. Kako je pokazano u §6.10 opšta relativnost daje rast sekularnih članova u argumentu perihela. Čak i za Merkur, dimenzija ovog relativističkog člana je, u stvari, manja od deset procenata totalnog sekularnog prednjačenja perihela, za šta su većinom odgovorni poremećaji od ostalih planeta.

Srednji elementi planeta definisani su izostavljanjem periodičnih članova iz oskulatornih elemenata. Oni pružaju referentnu putanju koja je mnogo stabilnija osnova za račun poremećaja. Srednji elementi se ne koriste u *Astronomical Almanacu*, ali formule za njih mogu da se nađu u *Explanatory Supplementu*.

U velikoj meri, slični metodi su primenjeni na satelitske putanje. Poremećaji uzrokovani drugim satelitima sistema biće slični gore razmatranim planetskim poremećajima. Međutim, postoji dodatni i veoma važan poremećaj izazvan Suncem, čije razmatranje mora biti nešto drugačije. Mala veličina uvedena u teoriju poremećaja nije više odnos planetske mase i mase Sunca, već će to biti odnos udaljenosti satelita od njegovog centralnog tela i od Sunca. Kao što pokazuju navodi sledećeg paragrafa, za putanju Meseca veoma su bitni poremećaji koje izaziva Sunce.

Drugi izvor poremećaja putanje satelita je spljoštenost (matične planete). Aproksimacija materijalnim tačkama u problemu dva tela, razmotrena u glavi 6, kompletno važi samo u slučaju sfernih tela. Mala veličina koja bi se koristila u teoriji poremećaja predstavlja odnos poluprečnika planete prema dimenziji putanje. Efekti spljoštenosti su delimično važni za veštačke satelite na niskim putanjama oko Zemlje. Šta više, za takve putanje ne može da se zanemari otpor atmosfere i nastanak sekularnog padanja satelita, koje izaziva stalno smanjenje velike poluose.

§ 7.5. Putanja Meseca.

Zbog poremećaja izazvanih Suncem, ekliptika je, a ne ekvator, prirodna referentna ravan za putanju Meseca oko Zemlje. Onda su putanjski elementi Meseca definisani na isti način kao za planete, prikazani na sl. 7.1. Jedine razlike su da je centar nebeske sfere (sl. 7.3) sada Zemlja E, a ne Sunce, i pericentar putanje, tačka A, je *perigej*, a ne perihel.

Usvojena je srednja putanja Meseca i njeni elementi—srednji elementi—definisani su u odnosu na ekliptiku i srednji ekvinokcij datuma tako da imaju samo sekularne promene. U stvari, tri srednja elementa uopšte se ne menjaju; to su

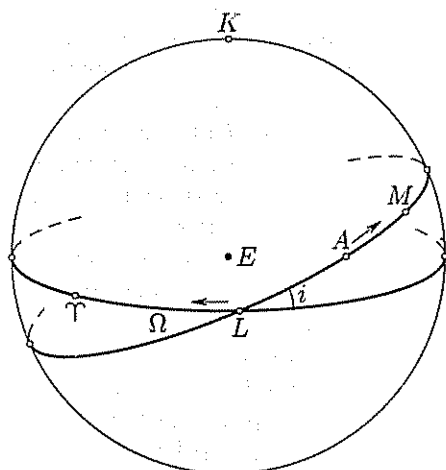
$$a = 384\,399{,}07\,\text{km},$$
$$e = 0{,}054\,900\,489, \qquad (7.16)$$
$$i = 5^\circ{,}145\,396\,4.$$

Ove vrednosti su izvedene iz konstanti teorije Meseca. Na primer, a je konzistentno sa konstantom paralakse Meseca P_0 navedenom ranije u (4.53) (Murray, 1983).

Preostali srednji elementi, koristeći oznake iz *Astronomical Almanaca*, dati su sa

$$\Omega = 55^\circ{,}204\,723 - 0^\circ{,}052\,953\,78\,\text{d},$$
$$\Gamma' = 192^\circ{,}917\,585 + 0^\circ{,}111\,403\,61\,\text{d}, \qquad (7.17)$$
$$L' = 18^\circ{,}251\,908 + 13^\circ{,}176\,396\,49\,\text{d}.$$

Ovo su, pozivajući se na sl. 7.3, redom, longituda uzlaznog čvora ΥL, srednja longituda perigeja ($\Upsilon L + LA$) i srednja longituda Meseca ($\Upsilon L + LM$). Međutim, napomenimo da M nije pravi položaj Meseca već njegov srednji položaj, definisan uslovom da je AM srednja anomalija. Izrazi su mogli biti izračunati za 1985. g., gde je d broj dana koji su protekli od 0^h 0. januara 1985. g. Očekuje se da srednja longituda raste sa srednjim kretanjem Meseca oko 13° dnevno, ali (7.17) pokazuje da takođe postoje znatne sekularne promene u longitudi čvora i perigeja. U stvari, čvor se retrogradno kreće po ekliptici, opisujući pun krug za 18,61 godina. S druge strane, perigej se kreće direktno po srednjoj orbiti sa periodom 8,85 godina. Tačka A neće opisivati zatvorenu krivu na nebeskoj sferi u ovom intervalu, ali se nikad ne udaljava od ekliptike za više od ugla i (~ 5°).



Слика 7.3

Faze Meseca, vidljive sa Zemlje, zavise od ugaone udaljenosti Sunca i Meseca na geocentričnoj nebeskoj sferi. Pogodno je definisati *srednju elongaciju* Meseca od Sunca kao

$$D = L' - L, \qquad (7.18)$$

što je razlika srednjih longituda dva tela. Kada govorimo o srednjoj longitudi Sunca, pretpostavljamo, u stvari, da je Sunce prividno na orbiti oko Zemlje. Ovo inverzno gledanje je opravdano. Kada se kombinuju teorije kretanja Sunca i Meseca, dobija se da je za 1985. g.,

$$D = 98^\circ{,}640\,537 + 12^\circ{,}190\,749\,13\,\text{d}. \qquad (7.19)$$

Lunarni periodi mogu da se definišu na različite načine. Najprirodniji je *sinodički mesec*, srednji interval između dva uzastopna mlada meseca. Ovaj interval odgovara porastu srednje elongacije D od 360° i može da se izračuna iz jednačine (7.19). Porast od 360° u srednjoj longitudi L' definiše *tropski mesec*, koji nije stvarno jednak jednom obilasku Meseca oko Zemlje u odnosu na nepokretne zvezde,

a koji se naziva *siderički mesec*. Razlog neslaganja je sâm srednji ekvinokcij koji ima malo sideričko kretanje usled opšte precesije [v. jednačinu (3.5)].

Postoje druge dve sasvim očigledne definicije lunarnih perioda koje sugeriše jednačina (7.17). Srednji period između dva uzastopna prolaza kroz perigej naziva se *anomalistički mesec*, jer je to interval potreban da srednja anomalija Meseca naraste za 360°. Konačno, *drakonistički mesec* je definisan kao srednji interval između dva uzastopna prolaza kroz čvor i važan je za predviđanje pojave pomračenja. Dužine anomalističkog i drakonističkog meseca mogu da se izračunaju kombinovanjem iznosa promena datih jednačinama (7.17). U stvari, dužine lunarnih perioda koje odgovaraju za svih pet definicija, za 1985. g., su

$$\begin{aligned} \text{Sinodički mesec} &= 29^{\mathrm{d}},530\,589 \\ \text{Tropski mesec} &= 27^{\mathrm{d}},321\,582 \\ \text{Siderički mesec} &= 27^{\mathrm{d}},321\,662 \\ \text{Anomalistički mesec} &= 27^{\mathrm{d}},554\,550 \\ \text{Drakonistički mesec} &= 27^{\mathrm{d}},212\,221. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Dosadašnja diskusija se tiče srednje putanje Meseca. Geocentrični položaj računat iz srednjih elemenata razlikovaće se od prividnog položaja Meseca usled periodičnih poremećaja, od kojih su većina uzrokovani uticajem Sunca. Problem računa prividnih koordinata Meseca je izuzetno složen. Čitalac koji želi da razume osnove mehanike računa upućuje se na Zedlera i Klemensa (SADLER i CLEMENCE, 1954). Osnovnu teoriju izveo je Braun (E. W. BROWN) početkom dvadesetog veka. Teorija se sastoji od razvoja u redove za ekliptičku longitudu i latitudu i horizontalnu paralaksu Meseca. Svaki od razvoja u red sastoji se od stotine članova koji su oblika

$$\begin{aligned} \lambda &= L' + \sum a_{ijkl} \sin(iM' + jM + kF + lD) \\ \beta &= \sum b_{ijkl} \sin(iM' + jM + kF + lD) \\ \sin P &= \sin P_0 + \sum c_{ijkl} \cos(iM' + jM + kF + lD), \end{aligned} \tag{7.21}$$

gde su i, j, k, l celobrojne. Dalje, M' i M su, redom, srednje anomalije Meseca i Sunca, F je srednji argument čvora Meseca, tj. $F = L' - \Omega$, dok je srednja elongacija već bila definisana. Teorijski mehanizmi izbacuju numeričke vrednosti za koeficijente a_{ijkl}, itd. Oni zavise od nekoliko malih veličina, naime ekscentričnosti dve srednje orbite (Mesečeve i Sunčeve), nagib i i odnos velikih poluosa dve srednje putanje. Međutim, rešenja preko redova navode se kao razvoj po stepenima četiri mala parametra i može se očekivati da redovi konvergiraju. Ovi parametri su relevantni za račun direktnog uticaja Sunca na putanju Meseca što je poznato kao glavni problem. Braunova teorija razmatra druge efekte, uglavnom poremećajni uticaj planeta i oblika Zemlje i Meseca. Svaki od ovih efekata može da se razmatra kao poremećaj karakterisan malim bezdimenzionim parametrom.

Prvih nekoliko članova u razvoju u red ekliptičke longitude i latitude Meseca dati su približno sa

$$\begin{aligned} \lambda = L' &+ 6°,29 \sin M' - 1°,27 \sin(M' - 2D) + 0°,66 \sin 2D \\ &+ 0°,21 \sin 2M' - 0°,19 \sin M - 0°,11 \sin 2F, \end{aligned} \tag{7.22}$$

$$\beta = 5^\circ{,}13\sin F + 0^\circ{,}28\sin(M'+F) - 0^\circ{,}28\sin(F-M') - 0^\circ{,}17\sin(F-2D) \quad (7.23)$$

Argumenti u (7.22) i (7.23) mogu, izuzev M, da se izvedu iz (7.17) i (7.19). Oni su, sa zadovoljavajućom tačnošću,

$$\begin{aligned} L' &= 18^\circ{,}25 + 13^\circ{,}17640\,\mathrm{d} \\ M' &= 185^\circ{,}33 + 13^\circ{,}06499\,\mathrm{d} \\ M &= 356^\circ{,}93 + 0^\circ{,}98560\,\mathrm{d} \\ F &= 323^\circ{,}05 + 13^\circ{,}22935\,\mathrm{d} \\ D &= 98^\circ{,}64 + 12^\circ{,}19075\,\mathrm{d}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Kao i ranije, d je broj dana od 0^h, 0. januara 1985. g.

Analizirajmo članove u (7.22). Članovi sa argumentima M' i $2M'$ su iz jednačine centra, a članovi sa argumentom $2F$ uslovljeni su nagibom putanje Meseca prema ekliptici. Nijedan od ovih članova ne obuhvata poremećaje od Sunca, za razliku od tri ostala. Najveći poremećajni član sa argumentom $(M'-2D)$ poznat je kao *evekcija*. Njegov period je $31^d{,}8$. On stvara periodične varijacije u oskulatornoj ekscentričnosti i longitudi perigeja. Član sa argumentom $2D$ poznat je kao *varijacija* i posledica je činjenice da Sunčevo gravitaciono privlačenje Meseca varira tokom sinodičkog meseca i biva najjače u fazi mladog meseca. Konačno, član sa argumentom M poznat je kao *godišnja jednačina*. Njegov period je jedna godina i posledica je ekscentričnosti Zemljine putanje oko Sunca.

Mada su u jednačine (7.22) i (7.23) bili uključeni svi članovi sa amplitudom preko $0^\circ{,}1$, ove jednačine mogu dati samo grublje efemeride. Kada su najveći zanemareni članovi u fazi, ukupna greška zaokruživanja može da bude $10'$ u latitudi i dvaput toliko u longitudi. Veoma precizne efemeride zahtevaju uključivanje nekoliko stotina članova u svaki razvoj.

Astronomical Almanac daje prividne položaje Meseca u dve tablice. Ekliptička latituda i longituda su utabličene za svaki dan sa tačnošću od $0^\circ{,}01$. Mnogo tačnije vrednosti su date za rektascenziju, deklinaciju i horizontsku paralaksu—sve u stepenima. Oni su ponovo dati na dnevnim intervalima, ali u svaki ulaz je uključeno pet interpolacionih koeficijenata koji omogućavaju da se veoma brzo računaju interpolovane vrednosti. Teorija Meseca, u modernom obliku, daje geometrijske koordinate u odnosu na srednji ekvinokcij. Mesec deli Zemljinu revoluciju tako da godišnja aberacija nije bitna, ali se računaju popravka za svetlosno vreme i nutaciju dajući prividni položaj. Utabličena horizontska paralaksa ostaje geometrijska.

Na prvi pogled, relativistički efekti nisu važni za putanju Meseca. Švarcšildov poluprečnik za Zemlju je dat sa

$$2m = \frac{2GM_\oplus}{c^2} \simeq 1\,\mathrm{cm}. \quad (7.25)$$

Koristeći jednačinu (6.81) možemo da ocenimo relativističko prednjačenje perigeja sa $\sim 5\cdot 10^{-5}$ lučnih sekundi po revoluciji. Ovo se u potpunosti utopilo u prednjačenje perigeja usled poremećaja od Sunca. Sada je teorija kretanja Meseca razvijena prvenstveno za određivanje koordinata. Određivanje rastojanja, paralaktičkog razvoja, smatra se manje fundamentalnim, jer koordinate mogu sa se mere mnogo tačnije i direktnije od rastojanja. Zbilja, neslaganja u longitudi Meseca omoguća-

vaju astronomsko registrovanje nepravilnosti Zemljine rotacije. Danas radari omogućavaju direktno merenje daljine koja je, čak, znatno tačnija nego ona izvedena iz paralaktičkih posmatranja. Još više, laserska merenja, korišćenjem reflektora, koje su na površinu Meseca postavili astronauti sa Apola, omogućili su jedan izuzetno tačan način određivanja daljine Meseca—faktički sa tačnošću od 1 cm. Ovo je reda Švarcšildovog radijusa Zemlje i, prema tome, to je istog reda kao relativistička popravka rastojanja [v. (6.74)]. Dakle, laserska lokacija Meseca omogućava novi test teorije opšte relativnosti i drugih post-Njutnovskih gravitacionih teorija. Testovi su veoma pogodni za Ajnštajnovu teoriju.

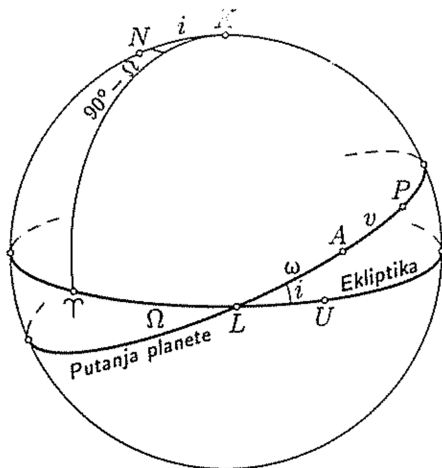
§ 7.6. Račun oskulatornih elemenata.

Ma koliko putanja bila poremećena, uvek može da se predstavi trenutnom oskulatornom elipsom. Ona je jedinstveno određena relativnim vektorima položaja i brzine u tom trenutku, ako su mase dva tela poznate. Radi određenosti, razmotrimo telo u heliocentričnom kretanju. Neka je P tačka heliocentrične nebeske sfere definisana svojim trenutnim položajem u posebnom trenutku t i neka je A pravac ka telu u perihelu (sl. 7.4). Dalje, neka je L uzlazni čvor i N položaj na nebeskoj sferi definisan normalom na putanjsku ravan. Konačno, neka su vektori položaja i brzine tela, u trenutku t

$$\mathfrak{r} = (\xi, \eta, \zeta), \qquad \mathfrak{V} = (V_\xi, V_\eta, V_\zeta). \tag{7.26}$$

Zbog pogodnosti, usvojili smo da su ovi vektori dati u ekliptičkim pravouglim koordinatama, tako da su koordinatne ose u pravcima Υ, U i K. Oznake su iste kao u §7.2, pa su tri komponente vektora položaja date jednačinom (7.7). Problem koji će biti razmotren je kako prebaciti šest izraza u jednačini (7.26) u šest putanjskih elemenata.

Intenziteti dva vektora (7.26) mogu da se izračunaju i unesu u formulu za brzinu (6.15). Invertovanje daje veliku poluosu kao



Слика 7.4

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rV^2}. \tag{7.27}$$

Setite se da smo usvojili da su mase poznate, pa je μ poznata veličina.

Sledeće je račun komponenti intenziteta vektora $\mathfrak{h}$, definisanog sa

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{V}. \tag{7.28}$$

Ovo je vektor ugaonog momenta po masi svedenoj na jedinicu, koji je usmeren normalno na putanjsku ravan, tj. ka tački N na nebeskoj sferi. Lako je videti sa sl. 7.4 da tačka N ima ekliptičku longitudu $(\Omega - 90°)$ i ekliptičku latitudu $(90° - i)$. Kosinusi pravca za $\mathfrak{h}$ se lako izračunavaju, dajući

$$\begin{aligned} h_\xi &= h \sin\Omega \sin i \\ h_\eta &= -h \cos\Omega \sin i \\ h_\zeta &= h \cos i. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Putanjski elementi i i Ω izvedeni su kao

$$\Omega = -\operatorname{arctg}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\right), \qquad i = \arccos\left(\frac{h_\zeta}{h}\right). \tag{7.30}$$

U primeni prve od ovih jednačina, osnovna vrednost inverznog tangensa uzeta je ako je $h_\eta < 0$; u protivnom dodati 180°. Intenzitet vektora $\mathfrak{h}$ daće ekscentričnost; iz (6.23) je

$$e = \left(1 - \frac{h^2}{\mu a}\right)^{1/2}. \tag{7.31}$$

Kako su sada i velika poluosa i ekscentričnost izračunati, mogu da se odrede tri anomalije. Verovatno je najbolje startovati sa ekscentričnom anomalijom, koristeći (6.24) da se izvede

$$E = \pm \arccos\left(\frac{a-r}{ae}\right). \tag{7.32}$$

Znak plus odgovara odlasku tela, iz perihela u afel, kada je njegova radijalna brzina pozitivna. Znak radijalne brzine je znak skalarnog proizvoda $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{V}$; tako je E jedinstveno određeno. Dve druge anomalije slede iz (6.26) i (6.28) pa je

$$v = 2 \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}E\right], \tag{7.33}$$

$$M = E - e \sin E.$$

Nema dvojnosti ni u jednoj od ovih jednačina.

Neka $\mathfrak{n}$ označava jedinični vektor u pravcu uzlaznog čvora. Može da se vidi sa sl. 7.4 da je

$$\mathfrak{n} = (\cos\Omega, \sin\Omega, 0), \tag{7.34}$$

i da je $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r} = r \cos LP = r \cos(v + \omega)$. Možemo rešiti po $(v+\omega)$

$$v + \omega = \pm \arccos\left(\frac{\xi \cos\Omega + \eta \sin\Omega}{r}\right). \tag{7.35}$$

Dvojnost se lako rešava, tako što se znak plus uzima kada je $\zeta > 0$. Kako je prava anomalija već bila izračunata, jednačina (7.35) omogućiće da se odredi i argument perihela. Ako se daje prednost longitudi perihela, jednostavno se koristi jednačina (7.3).

Vremenski odnosi na putanji već su bili uspostavljeni računanjem srednje anomalije za trenutak t. Ovo može da se konvertuje u srednju longitudu za ovaj trenutak korišćenjem (7.4). Ako neko stvarno želi da dobije eksplicitno trenutak τ prolaza kroz perihel, koristi se definicija srednje anomalije koja daje

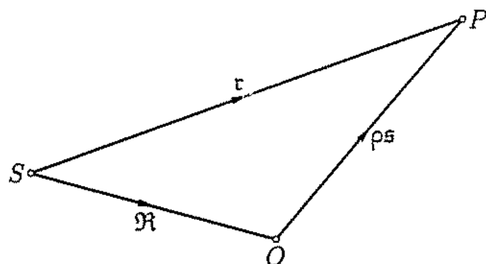
$$\tau = t - \frac{M}{n}. \tag{7.36}$$

Srednje kretanje je propisano uslovom da je $n^2 a^3 = \mu$.

§ 7.7. Preliminarno određivanje putanja.

Posmatrački podaci na kojima se bazira određivanje putanje uzimaju različitu formu. Ovde ćemo razmotriti klasični problem određivanja putanje iz tri posmatranja dobijena unutar kratkog vremenskog intervala. To je način na koji se dobija preliminarna putanja novootkrivenog asteroida ili komete. Učinjena je pretpostavka da se masa tela može u potpunosti zanemariti u odnosu na masu Sunca. Svako posmatranje položaja tela daje dve nezavisne koordinate, obično rektascenziju i deklinaciju. Namera je da se, iz tri takva posmatranja, izvede vektor položaja i brzine za pojedine trenutke vremena, pri čemu se obično bira srednji trenutak posmatranja. Potom se mogu iskoristiti metodi §7.6 da se izvedu putanjski elementi.

Pozivajući se na sl. 7.5, neka S označava Sunce, O je centar Zemlje i P je novootkriveni asteroid (ili kometa). Neka su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ heliocentrični vektori položaja asteroida i posmatrača, redom, i označimo $\overrightarrow{OP}$ sa $\rho\mathfrak{s}$, gde je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor. Merenje položaja asteroida daje jedinični vektor. Posmatranje će biti korigovano za refrakciju, dnevnu aberaciju i planetsku aberaciju. Dve prve popravke ne predstavljaju problem. Ako je posmatranje obavljeno fotografski, one su unete u redukciju merenja fotoploča, kao što je pokazano u glavi 13. Popravka za planetsku aberaciju ne može da se učini *ab initio*, jer ona zavisi od, još uvek, nepoznatog rastojanja asteroida. Najbolji postupak je da se zanemari ovaj uticaj u prvom koraku računanja putanje. Uticaj planetske aberacije onda može da se izvede na osnovi te putanje a sama putanja može ponovo da se odredi. Dovoljna je jedna takva iteracija. Popravka za geocentričnu paralaksu biće izbegnuta ako se uzme $\mathfrak{R}$ kao vektor položaja posmatrača, a ne centra Zemlje. *Astronomical Almanac* daje ovaj poslednji direktno, ali to može da se popravi metodima §4.5. Alternativno, $\mathfrak{R}$ može da se uzme kao utablični vektor položaja centra Zemlje i geocentrična paralaksa se uvodi na isti način kao planetska aberacija.



СЛИКА 7.5

Pretpostavimo sada da su mereni položaji asteroida za tri trenutka $t_1 < t_2 < t_3$. Neka su $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$ tri rezultujuća jedinična vektora. Označavajući $(t_2 - t_1)$ sa τ_1 i $(t_3 - t_2)$ sa τ_3, razvićemo $\mathfrak{s}_1$ i $\mathfrak{s}_3$ u Tejlorov red oko trenutka t_2, izvodeći

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_2 - \tau_1\dot{\mathfrak{s}}_2 + \tfrac{1}{2}\tau_1^2\ddot{\mathfrak{s}}_2 \\ \mathfrak{s}_3 &= \mathfrak{s}_2 + \tau_3\dot{\mathfrak{s}}_2 + \tfrac{1}{2}\tau_3^2\ddot{\mathfrak{s}}_2, \end{aligned} \tag{7.37}$$

dok su članovi trećeg reda zanemareni. Da se zadovolji ovo zanemarivanje, vreme između posmatranja mora biti dosta malo, u stvari, nekoliko dana. Jednačine (7.37) se sada smatraju sistemom jednačina po $\dot{\mathfrak{s}}_2$ i $\ddot{\mathfrak{s}}_2$, koji može da se reši dajući

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{s}}_2 &= \frac{\tau_3(\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1)}{\tau_1(\tau_1 + \tau_3)} + \frac{\tau_1(\mathfrak{s}_3 - \mathfrak{s}_2)}{\tau_3(\tau_1 + \tau_3)} \\ \ddot{\mathfrak{s}}_2 &= \frac{2(\mathfrak{s}_3 - \mathfrak{s}_2)}{\tau_3(\tau_1 + \tau_3)} - \frac{2(\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_1)}{\tau_1(\tau_1 + \tau_3)}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Koristeći na ovaj način tri posmatranja dobićemo za trenutak $t = t_2$ vektor $\mathfrak{s}$ i njegova dva prva izvoda. Dalje ćemo izostaviti sufiks 2

Sa dijagrama se vidi da je

$$\mathfrak{r} = \rho\mathfrak{s} + \mathfrak{R}. \tag{7.39}$$

Napomenimo da je na desnoj strani ove jednačine jedina nepoznata ρ. Diferencirajući je dvaput po vremenu, izvodimo redom

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\rho}\mathfrak{s} + \rho\dot{\mathfrak{s}} + \dot{\mathfrak{R}}, \tag{7.40}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\rho}\mathfrak{s} + 2\dot{\rho}\dot{\mathfrak{s}} + \rho\ddot{\mathfrak{s}} + \ddot{\mathfrak{R}}. \tag{7.41}$$

Sada druga jednačina daje ubrzanje asteroida, koje je određeno opštim gravitacionim jednačinama kretanja. Zbog definitnosti, propišimo za jedinicu dužine astronomsku jedinicu, a za masu i vreme jedinice kao što su definisane u §7.3. Onda je jednačina kretanja za asteroid

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -k^2\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^3}.$$

Šta više, jednačina kretanja Zemljine putanje u odnosu na Sunce, korišćenjem (6.8), daće

$$\ddot{\mathfrak{R}} = -k^2(1+m)\frac{\mathfrak{R}}{R^3},$$

gde je m masa Zemlje. Smenjujući ova dva rezultata u jednačinu (7.41), izvodimo, uz pomoć (7.39), rezultat

$$\left(\ddot{\rho} + k^2\frac{\rho}{r^3}\right)\mathfrak{s} + 2\dot{\rho}\dot{\mathfrak{s}} + \rho\ddot{\mathfrak{s}} = k^2\mathfrak{R}\left[\frac{(1+m)}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right]. \tag{7.42}$$

Želimo da izvedemo izraz za ρ i eliminišemo njegova dva izvoda iz (7.42). Množeći vektorski jednačinu (7.42) sa $\mathfrak{s}$, a zatim skalarno sa $\dot{\mathfrak{s}}$, posle manjih redukcija, imamo

$$\rho = k^2\left(\frac{(1+m)}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)\frac{[\mathfrak{s}, \dot{\mathfrak{s}}, \mathfrak{R}]}{[\mathfrak{s}, \dot{\mathfrak{s}}, \ddot{\mathfrak{s}}]}. \tag{7.43}$$

Sve na desnoj strani jednačine (7.43) je poznato, izuzev r. Data je ocena te veličine, tako da ρ može da se izračuna. Onda je r dobijeno kvadriranjem (7.39), naime

$$r^2 = \rho^2 + R^2 + 2\rho\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}. \tag{7.44}$$

Iteracije između (7.43) i (7.44) ponavljaće se dok proces ne konvergira rešenju za ρ. Korišćenje ovog u jednačini (7.39) daje vektor položaja planete u trenutku t_2.

Da bi se izveo vektor brzine, neophodno je rešiti (7.42) po $\dot{\rho}$. Procedura je slična. Uzmimo $((7.42)\times\mathfrak{s})\cdot\ddot{\mathfrak{s}}$ da dobijemo, posle pojednostavljenja,

$$\dot{\rho} = \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{(1+m)}{R^3}\right)\frac{[\mathfrak{s}, \ddot{\mathfrak{s}}, \mathfrak{R}]}{[\mathfrak{s}, \dot{\mathfrak{s}}, \ddot{\mathfrak{s}}]}. \tag{7.45}$$

Vrednost ρ izvedena direktno iz ove jednačine stavljena je u (7.40) dajući vektor brzine, ponovo u trenutku t_2. Kako su sada i $\mathfrak{r}$ i $\dot{\mathfrak{r}}$ poznati u istom trenutku, metodi prethodnog paragrafa mogu da se primene da se dobiju putanjski elementi.

Potrebna su najmanje tri posmatranja da se izvede preliminarna putanja, jer su dobijeni elementi osetljivi na posmatračke greške. Minimizirajući njihove efekte, posmatranja treba da budu što je moguće više razdvojena. S druge strane, razdva-

janje je ograničeno greškom zaokruživanja u Tejlorovom redu (7.37) da ne bi upropastilo rezultat. Zaista, putanja može, u osnovi, da se odredi iz tri široko razdvojena posmatranja, ali se mora razviti drugačiji metod.

Metod određivanja putanja biće jasno modifikovan za različite tipove posmatračkih podataka. Položajna posmatranja veštačkih satelita i međuplanetskih stanica, često će biti dopunjena radarskim merenjima rastojanja ρ, a promena rastojanja $\dot{\rho}$ dostupna je iz Doplerovog pomeranja u radarskom ehu. Kombinovanje radarskih i ugaonih posmatranja je sasvim dovoljno za određivanje vektora položaja tela i samo jedan dodatni podatak je potreban da dâ dovoljne podatke za kompletno određivanje putanje. Informacije o položaju za satelit i stanicu su često manje precizne od rastojanja i brzina za tri posebna trenutka vremena. Međutim, metod je mnogo obuhvatniji od gore datog. Dalji detalji o metodama određivanja putanja dati su kod Roja (Roy, 1982), glava 13.

Kako su dinamički principi primenjeni na posmatračke podatke, neophodno je utvrditi da se koordinate odnose na sistem inercijalnih osa. Standardni metod redukcije merenja fotoploča uzima ovo u obzir svodeći koordinate na nepokretni ekvator i ekvinokcij, obično srednji ekvator i ekvinokcij 1950,0 ili 2000,0. Ako su se položaji odnosili na ekvator i ekvinokcij datuma, to znači da koordinatni sistem rotira usled precesije i metod je toliko osetljiv na posmatračke greške da je to dovoljno da se dobije besmislena putanja.

Analize ovog paragrafa namenjene su samo dobijanju preliminarne putanje. Izvedena putanja se tačno poklapa sa posmatranim koordinatama za razliku od statističke. Kada su tri posmatranja novootkrivenog asteroida ili komete dostupna, dobijena je preliminarna putanja. Kasnije, sa prikupljanjem dodatnih posmatranja, prethodna putanja se prilagođava da fituje sva posmatranja, ali fitovanje je sada statističko. Kad su jednom putanjski elementi čvrsto postavljeni, oni se koriste za račun budućih efemerida. Inače, asteroid će biti ponovo otkriven, praćenjem svake konjunkcije sa Suncem, ako ne može da se pronađe za razmatrani period.

Zadaci

[Gde je potrebno, usvojiti da je 1 AJ = $1{,}4960 \cdot 10^8$ km. Nagib ekliptike je $23°26'21'',4$.]

7.1. Neptunov satelit Triton ima period obilaska od $5^d21^h02^m39^s$ i veliku poluosu od $3{,}5525 \cdot 10^5$ km. Izračunati recipročnu masu planete, usvajajući da masa Tritona može da se zanemari.

7.2. Svemirski brod je na putanji oko Venere sa ekscentričnošću 1,1898. U proksimitetu (najvećem približavanju) njegova planetocentrična daljina je 8415 km i posle 49^m ovo rastojanje raste do 19 998 km. Izračunati masu Venere iz ovih podataka.

7.3. *Astronomical Almanac* pruža sledeće putanjske elemente za asteroid Ceres:

$$i = 10°{,}606, \qquad \Omega = 80°{,}718, \qquad \omega = 72°{,}890,$$
$$a = 2{,}7666\,\text{AJ}, \qquad n = 0°{,}21419\,\text{d}^{-1}, \qquad e = 0{,}0784.$$

Ovo su oskulatorni elementi za 1984. oktobar 27,0 kada je srednja anomalija bila $260°{,}117$. Izračunati heliocentričnu ekliptičku longitudu i latitudu Ceresa za 1984. decembar 13,0.

7.4. Heliocentrični vektor položaja Zemlje je

$$\mathfrak{R} = (0{,}147\,528;\ 0{,}892\,916;\ 0{,}387\,161)$$

za 1984. decembar 13,0. Izračunati geocentričnu rektascenziju i deklinaciju Ceresa za ovaj datum.

7.5. Pokazati da su heliocentrična latituda i longituda tela na putanji oko Sunca date sa

$$\lambda = \Omega + \operatorname{arctg}\left[\cos i \operatorname{tg}(v + \omega)\right],$$

$$\beta = \arcsin\left[\sin i \sin(v + \omega)\right],$$

gde je v prava anomalija i simboli za putanjske elemente imaju svoja uobičajena značenja.

Pokazati, dalje, da za male vrednosti nagiba i ekscentriciteta ove jednačine postaju približno

$$\lambda = M + \varpi + 2e \sin M - \frac{1}{4} i^2 \sin 2(M + \omega),$$

$$\beta \csc i + e \sin \omega = \sin(M + \omega) + e \sin(2M + \omega).$$

7.6. Primeniti jednačine postavljene u prethodnom zadatku na putanju Meseca. Identifikovati odgovarajuće članove u jednačinama (7.22) i (7.23), i potvrditi da su koeficijenti kompatibilni sa elementima navedenim u jednačini (7.16).

7.7. Dokazati da vektor brzine $\mathfrak{V}$ tela na heliocentričnoj putanji može da se izrazi preko pravouglih ekliptičkih koordinata kao

$$V_\xi = -\frac{na}{(1 - e^2)^{1/2}} \left\{ \left[\sin(v + \omega) + e \sin \omega\right] \cos \Omega + \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right] \sin \Omega \cos i \right\}$$

$$V_\eta = -\frac{na}{(1 - e^2)^{1/2}} \left\{ \left[\sin(v + \omega) + e \sin \omega\right] \sin \Omega + \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right] \cos \Omega \cos i \right\}$$

$$V_\zeta = \frac{na}{(1 - e^2)^{1/2}} \left\{ \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right] \sin i \right\}.$$

7.8. Mala planeta Ceres ima heliocentrične vektore položaja i brzine

$$\mathfrak{r} = (1{,}581\,990;\ 2{,}278\,502;\ -0{,}223\,537)\ \mathrm{AJ}$$

$$\mathfrak{V} = (-8681{,}85;\ 5218{,}88;\ 1762{,}05)\, 10^{-6}\ \mathrm{AJ/d}.$$

Ovo su ekliptičke koordinate za 1984. decembar 13,0. Izračunati putanjske elemente a, Ω, i, e, ω, τ.

(Da se izvuku vrednosti navedne u zadatku 7.3, neophodno je da se koristi malo modifikovana vrednost μ jednaka $n^2 a^3$ zasnovana na vrednosti datoj ovde. Vrednosti date u Odgovorima baziraju se na $\mu = k^2$. Zašto su i i Ω bez promene?)

7.9. Dokazati da metod §7.7 ne važi za telo čiji je nagib putanje jednak nuli.

Глава Осма

Heliocentrične i baricentrične koordinate

§ **8.1. Uvod.** U glavi 4 bila je razmatrana transformacija sa posmatranog položaja nebeskog tela na njegov geocentrični položaj. Same po sebi, aberaciona i paralaktička popravka su, mada suštinski značajne, srazmerno malo interesantne. Prilike sa transformacijama razmotrenim u ovoj glavi su primetno različite, posebno za prelaz sa geocentričnog na heliocentrični ili baricentrični položaj. Paralaktička popravka, često navođena kao zvezdana paralaksa, ključna je za određivanje zvezdanih daljina i cele skale astronomskih daljina izvan Sunčevog sistema. Relativistički efekti, zanemareni u glavi 4, biće sada razmotreni. Oni daju važan test opšte relativnosti i, uopšte, oni ne mogu da se izostave u vrlo preciznim redukcijama položajnih posmatranja.

Većina optičkih posmatranja zvezda i planeta se ne mogu obaviti na elongacijama manjim od 30°. Tada se efekti opšte relativnosti mere u lučnim milisekundama. Raznovrsna posmatranja nemaju ovaj nivo preciznosti i, za njih, klasična obrada je potpuno adekvatna i, u stvari, mnogo jednostavnija.

Klasična obrada je izvedena u prvim paragrafima ove glave. Posebno se razmatraju uticaji godišnje (zvezdane) paralakse, godišnje aberacije i planetske aberacije. Razvićemo potpuni relativistički pristup u kasnijim paragrafima glave. Ovde se paralaksa i aberacija, bilo godišnja ili planetska, ne može prirodno razdvojiti. Obrada koja prati razmatranje je u §3.6.

§ **8.2. Kretanje Zemlje.** Paralaktička popravka zahteva poznavanje heliocentričnog vektora položaja Zemlje; popravka za aberaciju zavisi od vektora brzine Zemlje. Sve se izračunava iz oskulatornih elemenata Zemlje pomoću postupka inverznog §7.6.

Vektor položaja $\mathfrak{r}$ izveden je korišćenjem prvog dela analize §7.2. Stavljajući $i = 0$ u jednačinu (7.7) i koristeći jednačinu (7.3), u ekliptičkim koordinatama, daje

$$\mathfrak{r} = \left[r\cos(v+\varpi), r\sin(v+\varpi), 0\right]. \tag{8.1}$$

Radijus vektor r i prava anomalija v već su bili izračunati preko ekscentrične anomalije, zajedno sa rešenjem Keplerove jednačine.

Vektor brzine je mnogo lakše izveden primenom teorema §6.6. U skladu sa tim, vektor brzine može da se napiše kao

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1, \tag{8.2}$$

gde je $\mathfrak{V}_0$ transverzalna brzina konstantnog intenziteta, a $\mathfrak{V}_1$ je konstantna brzina paralelna maloj osi.

Veličine ova dva vektora su

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{h}{a(1-e^2)} = \left[\frac{\mu}{a(1-e^2)}\right]^{1/2}, \\ V_1 &= eV_0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Jedinični vektori paralelni sa $\mathfrak{V}_0$ i $\mathfrak{V}_1$ mogu da se odrede iz jednačine (8.1). Transverzalni pravac se dobija zamenom v sa $v + 90°$, a pravac paralelan maloj osi dobija se stavljanjem $v = 90°$. Onda jednačine (8.2) i (8.3) daju

$$\mathfrak{V} = V_0\left[-\sin(v+\varpi) - e\sin\varpi, \cos(v+\varpi) + e\cos\varpi, 0\right]. \tag{8.4}$$

Oskulatorni elementi su utablićeni u *Astronomical Almanacu* za sve velike planete. Međutim, elementi za Zemlju odnose se strogo na centar masa sistema Zemlja/Mesec, pa stoga ta tačka, a ne centar Zemlje, opisuje elipsu oko Sunca. Zato se sistem Zemlja/Mesec smatra dvojnom planetom.

Vektori dati u (8.1) i (8.4) odgovaraju baricentru Zemlja/Mesec. Da bismo izveli vektor položaja i vektor brzine prave geocentrične tačke, moramo da dodamo vektor položaja i vektor brzine u odnosu na baricentar Zemlja/Mesec. To može da se izvede iz jednačina (6.3) i njihovih izvoda. Prema tome, ako su M i m, redom, mase Zemlje i Meseca, i ako su $\mathfrak{r}'$ i $\mathfrak{V}'$ geocentrični vektori položaja i brzine Meseca, tražene popravke su

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{r} &= -\frac{m}{(m+M)}\mathfrak{r}' \\ \delta\mathfrak{V} &= -\frac{m}{(m+M)}\mathfrak{V}'. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ovo je srazmerno mala popravka. Baricentar Zemlja/Mesec se uvek nalazi unutar Zemljine površi. Međutim, pomeranje $\delta\mathfrak{r}$ izaziva efekte nešto manjeg značaja od geocentrične paralakse. Priraštaj brzine $\delta\mathfrak{V}$ je oko 12,5 m/s, koji daje priraštaj aberacionog efekta od oko 8,5 lučnih milisekundi. Jasno je da ne mogu potpuno da se zanemare ni efekt promene položaja ni brzine.

Takođe je bila napravljena razlika između heliocentričnog i baricentričnog početka. Normalno se razmatra relativna putanja kada se razmatraju kretanja planeta i prirodno je da se jedino koristi heliocentrični koordinatni početak. Međutim, on nije bez ubrzanja i zato nije pogodan početak za inercijalni sistem referencije. Praktičniji početak za korišćenje u položajnim posmatranjima zvezda i ostalih tela izvan Sunčevog sistema je centar masa celog sistema, koji jednostavno nazivamo
❊ *baricentar*. Za ranije navedene vektore $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{V}$ i dalje se traže popravke.

Neka je M_i masa i-te planete i njenih satelita u trenutku porasta rastojanja od Sunca. Prema našim ranijim oznakama $M_3 = m + M$. Neka je $\mathfrak{r}_i$ heliocentrični vektor položaja i-te planete. Onda je vektor položaja baricentra u odnosu na Sunce $\mathfrak{r}_0$, gde će

$$\left(1+\sum M_i\right)\mathfrak{r}_0 = \sum M_i\mathfrak{r}_i \tag{8.6}$$

mase biti izražene u masama Sunca, pri čemu svako $\mathfrak{r}_i$ mora biti izvedeno iz heliocentričnih oskulatornih elemenata planetskih putanja.

Sada i Zemlja može da se posmatra u odnosu na baricentar umesto u odnosu na Sunce. Kombinovanje jednačine (8.6) i njenog prvog izvoda sa (8.2) i (8.5) daće njen baricentrični vektor položaja i vektor brzine kao

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \mathfrak{r} - \frac{m}{M_3}\mathfrak{r}' - \sum\left[\frac{M_i\mathfrak{r}_i}{(1+\sum M_i)}\right],\\ \dot{\mathfrak{R}} &= \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1 - \frac{m}{M_3}\dot{\mathfrak{r}}' - \sum\left[\frac{M_i\dot{\mathfrak{r}}_i}{(1+\sum M_i)}\right].\end{aligned} \tag{8.7}$$

Komponente za $\mathfrak{R} \equiv (X, Y, Z)$ i $\dot{\mathfrak{R}} \equiv (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ utabličene su na dnevnim intervalima u *Astronomical Almanacu*. Date su kao pravougle ekvatorske koordinate u odnosu na srednji ekvator i ekvinokcij standardne epohe J2000,0. Jedinice su astronomska jedinica za $\mathfrak{R}$ i 10^{-9} AJ po danu za $\dot{\mathfrak{R}}$.

Ponovo je za prelaz sa heliocentričnih na baricentrične koordinate potrebna mala popravka. Čak i ako su sve planete u nekom trenutku poređane u liniju s jedne strane Sunca, udaljenost Sunca od baricentra biće i dalje manja od 0,01 AJ. Ovo će stvoriti efekt blizak grešci u paralaksi najbližih zvezda. Udaljenje Sunca, značajno je za telo u Sunčevom sistemu i preporučuje se uzimanje heliocentričnog početka. Realni značaj promene početka ostaje u $\dot{\mathfrak{R}}$. Velike planete, prvenstveno Jupiter, uzrokuju brzinu Sunca u odnosu na baricentar koja je obično nešto veća od 0,01 km/s. Ovo, obrnuto, stvara aberacioni efekt od oko 0″,01. Šta više, baricentar je najbitnija referentna tačka za precizno vremeniranje brzih periodičnih pojava, kao što su signali sa pulsara.

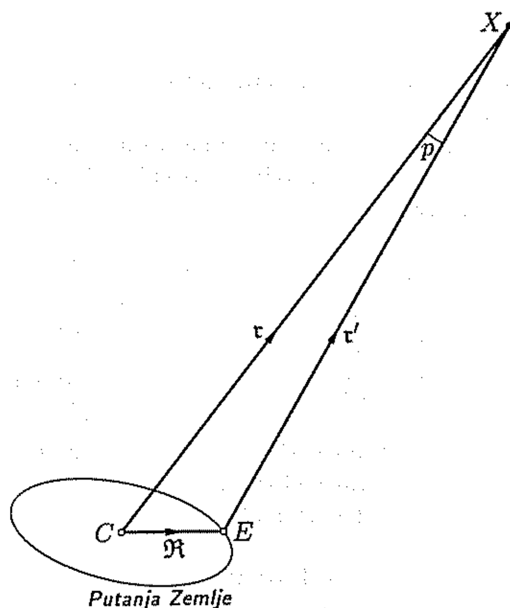
Baricentar će biti korišćen kao referentna tačka u predstojećem klasičnom razmatranju paralakse i aberacije. Vratićemo se heliocentričnom početku u kasnijim relativističkim razmatranjima, tako da sferno simetrični prostor-vreme može biti analiziran. U slučaju malih promena, prelaz sa heliocentričnog na baricentrični početak može opravdano biti razmotren klasično; modifikacije koje proističu iz popravki razmotrenih u ovom paragrafu moraju da se dodaju na relativističke rezultate.

§ 8.3. Godišnja paralaksa.

Neka je X položaj nebeskog tela, C je baricentar Sunčevog sistema, a E je centar Zemlje, kao što je prikazano na sl. 8.1. Označimo sa $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ baricentrične vektore položaja nebeskog tela i Zemlje, redom, i neka je $\mathfrak{r}'$ geocentrični vektor položaja nebeskog tela. Jasno je da je

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{R}. \tag{8.8}$$

Ako je X telo u Sunčevom sistemu, bitno je da se ova jednačina koristi u egzaktnom obliku. Međutim, za zvezde mogu da se koriste neke aproksimacije. Ugao između vektora $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{r}'$ je godišnja paralaksa p, koja će varirati u toku godine kako Zemlja opisuje svoju putanju oko Sunca. Neka E označava elongaciju zvezde u odnosu na Sunce, tj. $E = C\hat{E}X$. Onda je, pomoću sinusnog obrasca,



Zvezdana paralaksa.

СЛИКА 8.1

$$\sin p = \frac{R}{r} \sin E. \tag{8.9}$$

Paralaksa zvezde je formalno definisana kao π, gde je

$$\sin \pi = \frac{1}{r}, \tag{8.10}$$

i r će biti izraženo u astronomskim jedinicama. To odgovara godišnjoj paralaksi za standardne uslove $R=1$ i $E = 90°$. Kasnije je pokazano da, zbog godišnje paralakse, zvezda opisuje skoro elipsu sa velikom poluosom π.

Sve zvezde imaju veoma male paralakse; nema slučaja da zvezdana paralaksa prelazi $1''$. Prema tome, rastojanje zvezda dato je sa velikom tačnošću izrazom

$$r = \pi^{-1}. \tag{8.11}$$

Praktična jedinica zvezdanih daljina je *parsek* i odgovara paralaksi od jedne lučne sekunde. Ako je π izraženo u radijanima, onda (8.11) daje rastojanje zvezde u AJ, ali ako je π izraženo u lučnim sekundama, rastojanje je dato u parsecima. Imamo sledeću tabelu za prelaze

$$\begin{aligned} 1 \text{ parsek} &= 206\,265 \text{ AJ} \\ &= 3{,}2616 \text{ svetlosnih godina} \\ &= 3{,}0857 \cdot 10^{13} \text{ km} \end{aligned} \tag{8.12}$$

Zbog malih iznosa zvezdanih paralaksi, jasno je da se u jednačini (8.8) radi samo do reda R/r. Neka su $\mathfrak{s}$ i $\mathfrak{s}'$ jedinični vektori u pravcima $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{r}'$. Onda može da se koristi paralaktička formula prvog reda, jednačine (3.10), dajući

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' - \mathfrak{s} = r^{-1}\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{R}).$$

Koristeći (8.11) ovo se redukuje na

$$d\mathfrak{s} = \pi\left[(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s})\mathfrak{s} - \mathfrak{R}\right]. \tag{8.13}$$

Komponente $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{s}$, u pravouglim ekvatorskim koordinatama su, redom,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= (X, Y, Z) \\ \mathfrak{s} &= (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Mada radimo samo sa veličinama paralakse do prvog reda, u svemu ostalom tačnost će biti očuvana. Kako je definisano u poslednjem paragrafu, $\mathfrak{R}$ je strogo baricentrični vektor položaja Zemlje, a komponente $d\mathfrak{s}$ mogu biti izvedene diferenciranjem druge jednačine (8.14). Onda ugaona pomeranja $(d\alpha, d\delta)$ mogu biti dobijena iz vektora (8.13), koji ima jednačine komponenti

$$-\sin\alpha\cos\delta\,d\alpha - \cos\alpha\sin\delta\,d\delta = \pi\big[(\mathfrak{R}\cdot s)\cos\delta\cos\alpha - X\big],$$
$$\cos\alpha\cos\delta\,d\alpha - \sin\alpha\sin\delta\,d\delta = \pi\big[(\mathfrak{R}\cdot s)\cos\delta\sin\alpha - Y\big],$$
$$\sin\delta\,d\delta = \pi\big[(\mathfrak{R}\cdot s)\sin\delta - Z\big].$$

Kombinovanje prve dve od ovih jednačina da se eliminiše $d\delta$ i korišćenje treće, direktno daje konačni rezultat:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\pi}{15}\,\mathrm{sc}\,\delta(X\sin\alpha - Y\cos\alpha) \\ d\delta &= \pi(X\cos\alpha\sin\delta + Y\sin\alpha\sin\delta - Z\cos\delta). \end{aligned} \tag{8.15}$$

Faktor $\frac{1}{15}$ stavljen je da $d\alpha$ bude u vremenskim jedinicama, dok je π izraženo u lučnim sekundama. To će biti izostavljeno ako je π izraženo u radijanima

§ 8.4. Godišnja aberacija.

Razmatranje godišnje aberacije je veoma slično razmatranju za paralaksu. To je ponovo klasični pristup prvog reda. Brzina Zemlje je reda 30 km/s, koja je 10^{-4} deo brzine svetlosti. Ovo znači da će aberaciono pomeranje biti reda 10^{-4} radijana ili oko 20″. Efekti drugog reda ($\sim 10^{-8}$ radijana) nisu potpuno zanemarljivi u posebno preciznim radovima. Međutim, nema osnova da klasični tretman bude egzaktniji, jer su relativistički efekti, takođe, ovog reda

Vektor $\mathfrak{r}'$ na sl. 8.1 odgovara pravcu u kojem će se pojaviti zvezda za posmatrača smeštenog u E, ili konačno u odnosu na baricentar C. Neka pravac ka zvezdi, kada je uzeta u obzir aberacija, bude s^*. Onda, koristeći aberacionu formulu prvog reda (3.13), sa brzinom Zemlje $\dot{\mathfrak{R}}$ umesto Vn, imamo promenu položaja

$$ds = s^* - s' = c^{-1}s' \times (s' \times \dot{\mathfrak{R}}).$$

Dovoljno je tačno da se zameni jedinični vektor s' sa s. Tada poslednja jednačina može biti napisana kao

$$ds = c^{-1}(\dot{\mathfrak{R}} - (\dot{\mathfrak{R}}\cdot s)s). \tag{8.16}$$

Uporedimo sada jednačinu (8.16) sa (8.13). Razlike su samo što je $\mathfrak{R}$ zamenjeno njegovim izvodom i π sa c^{-1}. Sledeći argumente poslednjeg paragrafa, možemo izvesti promene $(d\alpha, d\delta)$ u ekvatorskim koordinatama zvezde, usled godišnje aberacije, kao

$$\begin{aligned} d\alpha &= c^{-1}\,\mathrm{sc}\,\delta(\dot{Y}\cos\alpha - \dot{X}\sin\alpha) \\ d\delta &= c^{-1}(\dot{Z}\cos\delta - \dot{X}\cos\alpha\sin\delta - \dot{Y}\sin\alpha\sin\delta). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Brzina svetlosti c mora da bude u istim jedinicama kao i komponente $\dot{\mathfrak{R}}$. Ako se koristi astronomski sistem jedinica, kao u *Astronomical Almanacu*, brzine su izražene u AJ po danu. U tim jedinicama

$$c = 173{,}14\,\mathrm{AJ/d}. \tag{8.18}$$

U gornjim razmatranjima bilo je prećutno usvojeno da sama zvezda nema brzinu u odnosu na baricentar Sunčevog sistema, što, zaista, nije tačno. Umesto toga, brzina zvezde može da se predstavi preko posmatranog sopstvenog kretanja. Popravljanje posmatračkog položaja zvezde za paralaksu i aberaciju, metodima koji su

upravo izloženi, neće dati geometrijski baricentrični položaj za trenutak posmatranja, t_0. To daje položaj zvezde koji je zauzimala pre τ godina, gde je τ vreme putovanja svetlosti od zvezde do posmatrača. Strogo govoreći, da bi se dobio geometrijski položaj za trenutak t_0, treba dodati godišnje sopstveno kretanje. Ova popravka ✻ je poznata kao *vekovna aberacija*. Međutim, to je popravka koja se u praksi nikad ne uzima u obzir, zbog nepoznavanja daljine zvezde i vrednosti τ. Umesto toga, učešće vekovne aberacije je uračunato svođenjem na baricentrične koordinate zvezde.

Opis popravke za svetlosno vreme kao aberacije biće opravdano u §8.6. U stvari, kada su obe brzine konstantne, nema u osnovi razlike između efekta brzine posmatrača (aberacija) i efekta brzine izvora (popravke za svetlosno vreme)—značajna je samo relativna brzina. Mada je popravka za svetlosno vreme zanemarena za zvezde, kada je izvor u Sunčevom sistemu, ova popravka može i mora da se napravi. ✻ *Planetska aberacija* se koristi da opiše ukupni efekt koji proističe i iz brzine Zemlje i iz brzine izvora. To je stroga popravka za prelaz sa prividnog na geometrijski položaj. Suprotno tome, godišnja aberacija, koja je bila predmet ovog paragrafa, uzima u obzir samo kretanje Zemlje u odnosu na baricentar.

§ **8.5. Približne formule za paralaksu i aberaciju.** Promena položaja zvezde na nebeskoj sferi, uzrokovana godišnjom paralaksom, nikad ne prelazi lučnu sekundu. Prema tome, pri korišćenju jednačina (8.15), neophodno je zadržati najviše tri važeće cifre u komponentama (X, Y, Z). Imajući ovo u vidu, za vektor položaja Zemlje $\mathfrak{R}$ mogu se koristiti jednostavniji izrazi. Razmak između geocentra i baricentra Zemlja/Mesec nikad nije potreban i, za većinu zvezda, razmak između Sunca i baricentra Sunčevog sistema može biti dobro raspodeljen. Ekscentričnost Zemljine putanje je oko $\frac{1}{60}$ i znajući da je zvezdana paralaksa manja od $0'',01$, dovoljno je smatrati da se Zemlja kreće po kružnoj putanji oko Sunca.

Izrazi su jednostavniji ako se umesto ekvatorskih koriste ekliptičke koordinate. Ako je $\lambda_\odot$ prava ekliptička longituda Sunca, $\lambda_\odot = -(v + \varpi)$, jednačina (8.1) daje približni vektor položaja Zemlje kao

$$\mathfrak{R} = (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot, 0). \tag{8.19}$$

Ove komponente mogu da se uvrste u jednačinu (8.15), ali, kako sada radimo sa ekliptičkim koordinatama, (α, δ) moraju da se zamene sa (λ, β), pri čemu se dobija

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\pi \operatorname{sc}\beta \sin(\lambda - \lambda_\odot) \\ d\beta &= -\pi \sin\beta \cos(\lambda - \lambda_\odot). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Neka su sada x i y komponente promene položaja zvezde u pravcima paralelnom i upravnom na ekliptiku, redom, tj. $x = d\lambda \cos\beta$, $y = d\beta$. U toku jedne godine ugao $(\lambda - \lambda_\odot)$ uzimaće sve vrednosti između 0 i 360°. Eliminišući ovaj ugao, izvodimo prividnu godišnju putanju koju na nebeskoj sferi opisuje zvezda kao

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2\beta} = 1. \tag{8.21}$$

To znači da je godišnja putanja zvezde, usled paralakse, elipsa velike poluose π, male poluose $\pi \sin\beta$ i ekscentričnosti $\cos\beta$. Velika poluosa ove paralaktičke elipse je paralelna ekliptici.

Na sličan način mogu da se izvedu približne formule za aberaciju, uzimajući u obzir samo heliocentričnu putanju Zemlje i zanemarujući fino razdvajanje baricentara. Eliptičnost putanje može veoma lako da se uzme u obzir stavljanjem

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1, \tag{8.22}$$

gde su $\mathfrak{V}_0$ i $\mathfrak{V}_1$ bili definisani u jednačini (8.3). Koristeći jednačinu (8.4), ove brzine su u ekliptičkim koordinatama date sa

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &= V(\sin\lambda_\odot, -\cos\lambda_\odot, 0) \\ \mathfrak{V}_1 &= eV_0(-\sin\varpi, \cos\varpi, 0). \end{aligned} \tag{8.23}$$

Učešće $\mathfrak{V}_0$ i $\mathfrak{V}_1$ može biti razmotreno posebno. Unošenje komponenti $\mathfrak{V}_0$ u (8.17) i prelaz na ekliptičke koordinate daje

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\varkappa \sec\beta \cos(\lambda - \lambda_\odot) \\ d\beta &= \varkappa \sin\beta \sin(\lambda - \lambda_\odot), \end{aligned} \tag{8.24}$$

gde je $\varkappa$ bezdimenzioni odnos V_0/c. Ovo je poznato kao *konstanta aberacije* i, iz (8.3), data je sa

$$\varkappa = \frac{k}{c}\left[\frac{1+m}{a(1-e^2)}\right]^{1/2}. \tag{8.25}$$

Ovde je k Gausova konstanta, m je masa Zemlje, a a i e su putanjski elementi Zemlje. Konstanta aberacije nije apsolutna konstanta, jer ekscentričnost ima veoma male sekularne promene. Koristeći IAU sistem konstanti (1976), vrednost $\varkappa$ za J2000,0 je

$$\varkappa = 20'',495\,52. \tag{8.26}$$

Ispitivanje jednačine (8.24) ukazuje da godišnja aberacija uzrokuje da zvezda opisuje elipsu sa centrom u njenom heliocentričnom položaju, sa velikom osom paralelnom ekliptici. Aberaciona elipsa ima veliku poluosu $\varkappa$ i ekscentričnost $\cos\beta$.

Promena položaja zvezde uzrokovana brzinom $\mathfrak{V}_1$ može slično da se izvede iz jednačine (8.17). Rezultati su

$$\begin{aligned} d\lambda &= \varkappa e \sec\beta \cos(\varpi - \lambda) \\ d\beta &= \varkappa e \sin\beta \sin(\varpi - \lambda) \end{aligned} \tag{8.27}$$

i poznati su kao E-članovi. Nezavisni su od longitude Sunca, što znači da nemaju godišnju varijaciju. Njihova veličina, tj. $\varkappa e$, je $0'',343$ i njihov efekt je promena položaja cele aberacione elipse za konstantni iznos dat sa (8.27). Međutim, oni nisu strogo konstantni, ali sadrže sporu sekularnu varijaciju kako je objašnjeno niže.

E-članovi aberacije imaju interesantnu, mada malo konfuznu istoriju. Sve do 1960. aberaciona pomeranja bila su računata prema upravo izloženim pravilima i nije pravljena razlika između heliocentričnog i baricentričnog početka. Onda je bilo prirodno da se ne pravi popravka sadržana u (8.27) za prividni položaj zvezda. Radije su E-članovi bili uključeni u tzv. heliocentrični položaj. I zvezdani katalozi i godišnjaci slede ovu praksu. Srednji položaji dati u zvezdanim katalozima sadrže E-članove. Godišnjaci daju koeficijente za prelaz sa prividnog na srednji položaj, što zanemaruje E-članove i zasnovano je samo na (8.24).

Rastuća preciznost zahtevala je modifikaciju sadržaja godišnjaka posle 1960. Aberacioni koeficijenti—razmotreni su u glavi 12—koji su zasnovani na brzini Zemlje treba da budu izračunati korišćenjem kompletnog postupka izloženog u §8.2. Međutim, isti katalozi se još koriste, tako da je bio uveden sledeći kompromis. Prvo su bili strogo računati koeficijenti iz kretanja Zemlje u odnosu na baricentar Sunčevog sistema, a onda su, više veštački, izdvojeni E-članovi.

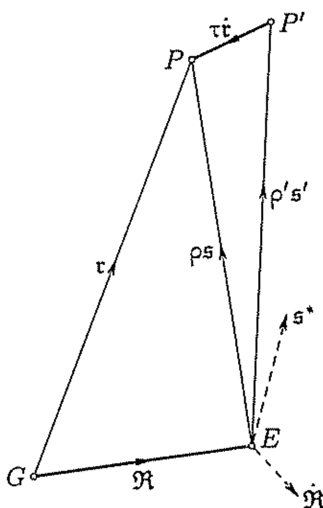
Međutim, ovaj postupak se nije pokazao potpuno zadovoljavajući zbog spore varijacije u E-članovima. Prvo, i e i ϖ imaju sekularne varijacije, uglavnom zbog planetskih poremećaja. To utiče i na $d\lambda$ i na $d\beta$ u (8.27). Druge i mnogo značajnije varijacije dolaze od precesije, koja stvara stalni rast longituda svih zvezda, dok latitude ostaju nepromenjene. Ovo, istina je, ostavlja $d\lambda$ i $d\beta$ bez promena, dok λ i ϖ rastu za isti iznos. Međutim, precesiono pomeranje nebeskog pola i ekvinokcija stvaraće promene u popravkama rektascenzije i deklinacije $(d\alpha, d\delta)$. Oni su relevantniji od njihovih ekliptičkih ekvivalenata.

IAU je 1976. g. rešila da preseče ovaj Gordijev čvor i preporučila da u buduće srednji položaji neće sadržavati E-članove. Dalje, rešeno je da će godišnja aberacija biti strogo računata iz brzine Zemlje u odnosu na baricentar Sunčevog sistema bez ikakve modifikacije. *Astronomical Almanac* od 1984. daje aberacione koeficijente računate na ovaj način.

U glavi 12 detaljno će biti razmotrena redukcija prividnog položaja zvezde na srednji položaj. Sledeći novu praksu, E-članovi su isključeni iz takvog razmatranja.

❄ § 8.6. Planetska aberacija.

Pojam *planetske aberacije* obično se koristi da opiše ukupne aberacione efekte na položaj planete ili bilo kog tela Sunčevog sistema. Ona uključuje godišnju aberaciju—uzrokovanu brzinom Zemlje—zajedno sa popravkom koja proističe iz planetskog kretanja tokom intervala, recimo τ, između emitovanja i prijema posmatranog zračenja (svetlosti). Efekt godišnje aberacije je dat jednačinom (8.16). Popravka za svetlosno vreme, kao što ćemo sada pokazati, vodi sličnom izrazu.



Слика 8.2

Pretpostavimo da je planeta posmatrana u trenutku t. Neka tačke G, E i P—na sl. 8.2—predstavljaju baricentar, Zemlju i planetu redom, sve u trenutku t. Neka su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ baricentrični vektori položaja planete i Zemlje, i označimo $\overrightarrow{EP}$ sa $\rho\mathfrak{s}$, gde je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor. Ovaj vektor daje geometrijski pravac planete u trenutku t. Jasno je

$$\mathfrak{r} = \rho\mathfrak{s} + \mathfrak{R}. \tag{8.28}$$

Posmatrano zračenje se ne emituje iz P, već iz tačke P' gde se planeta nalazila u trenutku $t - \tau$. Označimo vektor $\overrightarrow{EP'}$ sa $\rho'\mathfrak{s}'$. Onda jedinični vektor $\mathfrak{s}'$ daje pravac ka planeti korigovan za godišnju aberaciju ali ne i svetlosno vreme. U odnosu na to, oznake su u skladu sa jednačinom (8.16) i omoguća-

vaju da se $\mathfrak{s}^*$ razume kao prividni pravac planete. Sa dovoljnom tačnošću možemo da napišemo godišnje aberacione promene, iz (8.16), kao

$$\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s}' = -c^{-1}\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{R}}). \tag{8.29}$$

Planeta se kreće iz tačke P' u tačku P za vremenski interval τ. Ako je njeno ubrzanje u tom intervalu zanemareno, imamo da je $\overrightarrow{P'P} = \tau\dot{\mathfrak{r}}$. Tada je

$$\rho'\mathfrak{s}' = \rho\mathfrak{s} - \tau\dot{\mathfrak{r}}. \tag{8.30}$$

Ovo je egzaktni izraz popravke za svetlosno vreme. Eksplicitna formula se izvodi dvostrukim vektorskim množenjem sa $\mathfrak{s}$; tada je

$$(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}')\mathfrak{s} - \mathfrak{s}' = -\frac{\tau}{\rho'}\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{r}}).$$

Po definiciji je $\rho' = c\tau$ i $(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}') \simeq 1$; s tačnošću do prvog reda

$$\mathfrak{s}' - \mathfrak{s} = c^{-1}\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{r}}). \tag{8.31}$$

Ovaj izraz za popravku za svetlosno vreme potpuna je paralela onom za godišnju aberaciju (8.29). Zbir oba daje popravku za planetsku aberaciju kao

$$\mathfrak{s}^* - \mathfrak{s} = c^{-1}\mathfrak{s} \times \left[\mathfrak{s} \times (\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}})\right]. \tag{8.32}$$

Napominjemo da planetska aberaciona pomeranja zavise samo od relativnih brzina Zemlje i planete.

Iz jednačine (8.28) dobija se

$$\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}} = \dot{\rho}\mathfrak{s} + \rho\dot{\mathfrak{s}},$$

što može da se zameni u (8.32). Pamteći da je $\mathfrak{s}\cdot\dot{\mathfrak{s}} = 0$, dok je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor, i stavljajući $\rho \simeq \rho' = c\tau$, javlja se jednostavan rezultat

$$\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s} - \tau\dot{\mathfrak{s}} \tag{8.33}$$

Šta više, planetsku aberaciju je stoga posebno lako primeniti—jednostavnije nego bilo koji od njenih sastavnih delova. Na primer, prividni položaj planete se računa na sledeći način. Prvo se primeni metod opisan u §7.2 i dobija se geocentrična efemerida (α, δ) i geocentrična daljina ρ. Ove koordinate odgovaraju vektoru $\mathfrak{s}$. Vrednost τ je izvedena s dovoljnom tačnošću kao ρ/c. Onda su prividne rektascenzija i deklinacija (α^*, δ^*) date sa

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha - \tau\frac{d\alpha}{dt} \\ \delta^* &= \delta - \tau\frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \tag{8.34}$$

Obrnut problem određivanja geometrijskog baricentričnog položaja planete iz njenog prividnog položaja mnogo se češće zahteva. On je ograničen određivanjem putanje planete, kao što je razmatrano u §7.7. Glavna teškoća je u tome što svetlosno vreme nije poznato *a priori*, pa se mora dati njegova ocena pre nego se i jednom obračuna popravka za aberaciju. Malo modifikovana verzija (8.33) daće $\mathfrak{s}$ preko $\mathfrak{s}^*$ kao

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^* + \tau\dot{\mathfrak{s}}^*, \tag{8.35}$$

ali je, čak, jednostavnija procedura korišćenje nepromenjenih prividnih koordinata, samo antidatiranih za posmatrački interval τ. Onda se putanja računa iz najmanje tri posmatranja, što omogućava da se izvede nova vrednost τ. Proces se ponavlja sve dok ne konvergira rešenju za τ.

Slično kao u dva prethodna paragrafa, analiza o planetskoj aberaciji razmotrena je samo do tačnosti prvog reda po V/c. Brzina planete biće istog reda kao i brzina Zemlje i članovi drugog reda u brzini planete bili su isto tako zanemareni. Međutim, napravljena je druga aproksimacija kada je usvojeno da se svaka promena u brzini planete u toku intervala τ može zanemariti. Red razmatranih veličina ukazuje da ubrzanje planete (μ/r^2) može da proizvede efekte drugog reda samo u vremenskom intervalu τ. Veoma grubo, za $\tau \sim r/c$ planetska brzina je $\sim (\mu/r)^{1/2}$. Dakle, može se zanemariti. Važeća teorija drugog reda mora da bude relativistička.

§ 8.7. Savijanje svetlosti u opštoj relativnosti.

Osnovni obrasci koji definišu prividni pravac izvora u opštoj relativnosti bili su postavljeni u §3.6. U glavnim crtama, traženi postupak je opisan na strani 58. Prvi korak je određivanje nulte geodezijske koja je svetska linija posmatranog zračenja. Prema tome, u ovom paragrafu ispitaćemo nultu geodezijsku Švarcšildovog prostor-vremena, koji opisuje sferno simetrično gravitaciono polje Sunca.

Analiza će biti, barem u početku, skoro paralelna onoj datoj u §6.8, gde su bile razmatrane obične geodezijske. Ponovo je najjednostavnije izučavati prostor-vreme u standardnom obliku metrike (6.46) i u kasnijoj fazi transformisati ga u izotropni oblik od većeg fizičkog značaja.

Diferencijalne jednačine za nultu geodezijsku, jednačine (3.36), su

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{dp}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} = 0. \tag{8.36}$$

Ovo se razlikuje od odgovarajućih jednačina za obične geodezijske (6.45) samo u tome što je interval s zamenjen afinim parametrom p. Možemo ponoviti analizu §6.8 i dobiti intergrale jednačina za $\lambda = 2$, 3 i 4 u obliku

$$\theta = \frac{1}{2}\pi, \qquad r^2\frac{d\phi}{dp} = h, \qquad \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{dt}{dp} = k. \tag{8.37}$$

Prva od ovih jednačina jednostavno znači da je ravan svetlosnog zraka izabrana za ekvatorsku ravan koordinatnog sistema, dok druga i treća jednačina predstavljaju održanje ugaonog momenta i energije, redom. Afini parametar p, za razliku od intervala s, nije jedinstveno definisan. Dakle, nema gubitka u opštosti uzimanjem

$$h = cq, \qquad k = 1. \tag{8.38}$$

Na velikom rastojanju od Sunca, p teži koordinatnom vremenu. Uzimanjem Njutnove aproksimacije vidi se značenje parametra q, tj. stavljanjem $m = 0$, tako da je $p = t$ i druga jednačina (8.37) postaje $rV_T = cq$. Tada je staza fotona prava linija koja se proteže na minimalnoj daljini q od Sunca.

Umesto korišćenja radijalne komponente iz (8.36), smenimo rezultate (8.37) u metriku i imamo

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = 0 = k^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{1-2m/r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\right]$$

Pomoću (8.38) ovo se svodi na

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 = 1 - \frac{q^2}{r^2} + \frac{2mq^2}{r^3}. \tag{8.39}$$

Sada je zadatak da izvedemo putanju fotona. Zato je zgodno eliminisati p i koristiti ϕ kao nezavisnu promenljivu. Stavimo da je $u = r^{-1}$. Onda je iz (8.37) i (8.38)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = -qc\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}, \tag{8.40}$$

i jednačina (8.39) daje

$$q^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 1 - q^2u^2 + 2mq^2u^3. \tag{8.41}$$

Biće dovoljno da se ova jednačina korektno reši do reda m/q. Parametar m je oko 1,5 km, dok je q reda astronomske jedinice. Čak i za dotičući svetlosni zrak ili radio talas, q mora da prevaziđe poluprečnik Sunca ($\sim 7\cdot 10^5$ km). Pod svim okolnostima, odnos $m/q \leq 2\cdot 10^{-6}$ i efekti drugog reda su zanemarljivi.

Rešenje nultog reda se lako izvodi stavljanjem $m = 0$. Onda (8.41) daje

$$\phi = \int \frac{q\,\mathrm{d}u}{(1-q^2u^2)^{1/2}} = \arcsin qu. \tag{8.42}$$

Za konstantu integracije uzima se nula, tako da je zrak paralelan x-osi, (v. sl. 8.3) i (8.42), i može da se napiše kao

$$y = r\sin\phi = \sin\frac{\phi}{u} = q. \tag{8.43}$$

Identifikacija sa Dekartovim koordinata je malo proizvoljna, ali jeste legitimna u aproksimaciji nultog reda.

Za izvođenje rešenja prvog reda, napišimo

$$qu = \sin\phi + \frac{m}{q}f. \tag{8.44}$$

Smenjujući ovo u (8.41) i ostavljajući samo članove prvog reda, posle malog svođenja, imamo

$$\cos\phi\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi} + f\sin\phi = \sin^3\phi.$$

Množenje integracionim faktorom $\mathrm{sc}^2\,\phi$ daje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}(\mathrm{sc}\,\phi f) = \sin\phi\,\mathrm{tg}^2\,\phi = \mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{sc}\,\phi - \sin\phi,$$

i posle integraljenja dobijamo

$$f = 1 + \cos^2\phi + A\cos\phi.$$

Ako je za konstantu integracije A izabrana nula, zrak je simetričan u odnosu na y-osu. Rešenje prvog reda za u iz (8.44) biće

$$u = \frac{1}{q}\sin\phi + \frac{m}{q^2}(1+\cos^2\phi). \tag{8.45}$$

Interpretirajući jednačinu (8.45), napomenimo da u a time i r imaju prevojnu tačku na y-osi kada je $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Ovo odgovara najvećem približenju zraka Suncu S, tj. perihelu putanje zraka, vidi sl. 8.3. Svetlosni zrak je savijen, tako da je konkavan ka Suncu, što je pokazano sa graničnim vrednostima ϕ kao $r \to \infty$. Stavljanjem $u = 0$ u (8.45) sa dovoljnom tačnošću imamo

$$\sin\phi = -\frac{2m}{q},$$

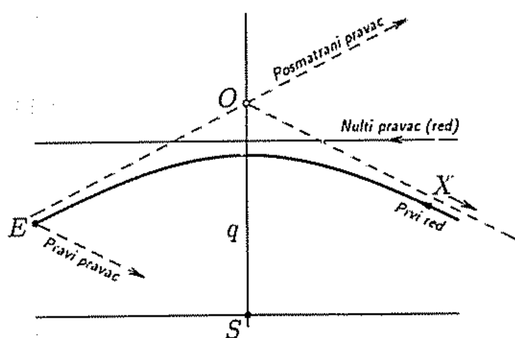
pa pravci asimptota nisu $\phi = 0$ i π kao ranije, već

$$\phi = -\frac{2m}{q} \quad \text{i} \quad \pi + \frac{2m}{q}. \tag{8.46}$$

Ukupno savijanje putanje zraka $\Delta\phi$ u gravitacionom polju Sunca je

$$\Delta\phi = \frac{4m}{q}. \tag{8.47}$$

Ovo savijanje daje mogućnost drugog klasičnog testa opšte relativnosti. Pretpostavimo da je izvor zračenja zvezda u neposrednoj okolini Sunca. Parametar q tada iznosi nekoliko Sunčevih poluprečnika i pri poređenju i zvezda i Zemlja se mogu smatrati na efektivno beskonačnom rastojanju od Sunca. Može se smatrati da su smeštene na asimptotama sl. 8.3. Asimptota EO daje posmatrani pravac zvezde, dok je druga asimptota OX paralelna pravcu u kojem će se zvezda pojaviti u odsustvu bilo kakvog Sunčevog gravitacionog savijanja. Ugao EOX jednak je $180° - \Delta\phi$.



Gravitaciono savijanje svetlosti.

Слика 8.3

Zvezde mogu da se posmatraju veoma blizu Sunca samo u specijalnim uslovima potpunog pomračenja Sunca. Prva posmatranja su dala efekte savijanja svetlosti pri pomračenju Sunca 1919. g., a opšti potvrdni rezultati bili su utvrđeni u tom trenutku i pri sledećim pomračenjima. Vidi se iz (8.47) da je savijanje direktno proporcionalno q. Svetlost svake zvezde biće skrenuta iz njenog „normalnog" položaja za iznos proporcionalan njenoj udaljenosti od centra diska Sunca; promena položaja biće radijalno ka spoljašnjosti. Polje zvezda koje okružuje pomračeno Sunce je fotografisano i relativni položaji zvezda se mere sa fotografskih ploča, a otkrivaju diferencijalno savijanje svetlosti u zvezdanom polju. Za zrak u slučaju dodira, skretanje se dobija uvođenjem radijusa Sunca za q u (8.47) i to je oko $1'',75$.

Iako su posmatranja pomračenja utvrđivala postojanje gravitacionog savijanja svetlosti, nikad nisu omogućavala ubedljivu kvantitativnu podršku za Opštu teoriju relativnosti. Ipak, ako se posmatraju relativni položaji radio izvora u okolini

Sunca, posmatranja ostaju suštinski slična i pomračenje nije više neophodno. Ova posmatranja imaju mnogo veću tačnost i postigla su saglasnost sa opštom relativnošću više od jednog procenta, čineći drugi test opšte relativnosti tačan kao prvi. Takva precizna merenja radio astrometrije imaju tačnost reda jedne lučne milisekunde. Mnogo detaljnija formulacija savijanja svetlosti traži se kada se radi sa takvom preciznošću. Posebno je nedovoljno smatrati da je Zemlja na konačnoj daljini od Sunca, pa moramo da razvijemo izraze za pravac svetlosnog zraka u proizvoljnoj tački. Pravac asimptote je nedovoljan.

Razmotrimo ponovo jednačinu za nultu geodezijsku (8.45). Pogodno je da se to pretvori u Dekartove pravougle koordinate pisanjem $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, ali ova smena je značajna u izotropnom koordinatnom sistemu, dok, s druge strane, vektori u pravcima x- i y-ose nisu ortogonalni. Dakle, prvi korak je zamena radijalne koordinate r sa $\bar{r}$ definisano jednačinom (6.72). Sa dovoljnom tačnošću ovo se piše kao

$$\bar{r} = r - m. \tag{8.48}$$

Prihvatljive kvazi-Dekartove koordinate mogu da se uvedu kao

$$\begin{aligned} x &= \bar{r}\sin\theta\cos\phi \\ y &= \bar{r}\sin\theta\sin\phi \\ z &= \bar{r}\cos\theta. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Metrika ovog koordinatnog sistema je (3.53); tako su ne-nulte komponente metričkog tenzora date do reda $m/\bar{r}$ sa

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2m}{\bar{r}}\right), \qquad g_{44} = 1 - \frac{2m}{\bar{r}}. \tag{8.50}$$

Sada, sa (8.48), imamo da je $u = (\bar{r} + m)^{-1}$. Jednačina nulte geodezijske može da se izrazi u novom koordinatnom sistemu. Posle nekih redukcija rezultat se najkraće izražava sa

$$y = q - \frac{2m\bar{r}}{q} \tag{8.51}$$

§ 8.8. Nulte geodezijske.

Treba nam tangentni vektor na nultu geodezijsku. Kako se zrak prvenstveno kreće u negativnom x-pravcu, zgodan parametar krive je $-x/c$. Onda je tangentni vektor dat sa

$$u^\lambda = \left(-c, -c\frac{dy}{dx}, 0, -c\frac{dt}{dx}\right). \tag{8.52}$$

Iz (8.51) imamo da je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2m}{q}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2)^{1/2} \approx -\frac{2mx}{q\bar{r}}.$$

Konačna komponenta vektora dobija se iz metrike, pamteći da je geodezijska nula. Prema tome, (8.50) daje

$$\left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2m}{\bar{r}}\right)\left[1 + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right].$$

Onda, do tačnosti sa kojom mi radimo, traženi tangentni vektor je

$$u^{\lambda} = \left(-c, \frac{2mcx}{q\bar{r}}, 0, 1 + \frac{2m}{\bar{r}} \right). \tag{8.53}$$

Ova jednačina se primenjuje na bilo koju tačku putanje zraka, a posebno je interesantna za tačku posmatranja.

Jednačina (8.53) bila je izvedena u posebnom koordinatnom sistemu, sa koordinatnim osama izabranim da se minimizira algebarska kompleksnost. Međutim, da bi imala opštu primenu, biće izražena u konvencionalnom vektorskom obliku. Sada su i emisija zračenja i njeno posmatranje događaji u prostor-vremenu. Posmatranje se fiktivno odvija iz centra Zemlje (X, Y, Z) u trenutku T. Tako je to događaj $(\mathfrak{R}, T)$, gde je trovektorska notacija korišćena kao skraćenje. Slično, događanje emisije je predstavljeno sa $(\mathfrak{r}_e, T - \tau)$, gde je τ koordinatno vreme putovanja svetlosti. Iz (8.51) sledi da je u našem specijalnom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \left(X, q - \frac{2mR}{q}, 0 \right) \\ \mathfrak{r}_e &= \left(x_e, q - \frac{2mr_e}{q}, 0 \right). \end{aligned} \tag{8.54}$$

Metod analize zavisi od toga da li se izvor zračenja nalazi u Sunčevom sistemu ili ne. Ta dva slučaja su niže razmatrana odvojeno.

(a) Telo u Sunčevom sistemu. Ovaj slučaj je mnogo komplikovaniji jer savijanje svetlosti zavisi kako od položaja izvora tako i od položaja posmatrača. Hoćemo da svedemo tangentni vektor u^{λ} na geocentrični pravac izvora čiji je jedinični vektor definisan sa

$$\rho\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{r}_e - \mathfrak{R}. \tag{8.55}$$

Ovo je formalna definicija trovektora koji povezuje položaj izvora pri emisiji sa posmatračem u trenutku posmatranja. To nije geometrijski pravac, jer nema mogućnosti da se uključi svetlosno vreme. Veličina ρ nije striktno fizičko rastojanje između izvora i posmatrača. Vidi se iz (8.54) da je $\rho \approx x_e - X$ i da $\mathfrak{s}_0$ ima komponente date sa

$$\mathfrak{s}_0 = \left(1, \frac{2m(R - r_e)}{q\rho}, 0 \right). \tag{8.56}$$

Pravac svetlosnog zraka razlikuje se od ovog za mali iznos. Dopustimo da se napiše

$$u^{\lambda} = \left[-c(\mathfrak{s}_0 + \sigma_0), 1 + \frac{2m}{R} \right], \tag{8.57}$$

gde je, iz jednačine (8.53),

$$\sigma_0 = \left\{ 0, -\frac{2m}{q} \left(\frac{X}{R} + \frac{(R - r_e)}{\rho} \right), 0 \right\}. \tag{8.58}$$

Neophodno je da se vektor σ_0 izrazi u standardnoj vektorskoj notaciji. Kako je on u y-pravcu, razmotriti esencijalni paralelni vektor biće $\mathfrak{s}_0 \times (\mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{R})$. Sa dovoljnom tačnošću nalazimo

$$\mathfrak{s}_0 \times (\mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{R}) = (0, -q, 0),$$

i tako je

$$q^2 = R^2 - (\mathfrak{s}_0 \cdot \mathfrak{R})^2. \tag{8.59}$$

Smenjivanjem ovih rezultata u (8.58) omogućeno je da se σ_0 izrazi kao

$$\sigma_0 = \frac{2m}{(R^2 - (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}_0)^2)} \left(\frac{R - r_e}{\rho} + \frac{\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}_0}{R} \right) \mathfrak{s}_0 \times (\mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{R}). \tag{8.60}$$

Ovaj komplikovaniji izraz daje savijanje svetlosti sasvim uopšteno preko kvazi-geometrijskog pravca izvora $\mathfrak{s}_0$ i vektora položaja izvora i posmatrača. Osim toga, tangentni vektor na geodezijsku ima, prema (8.57), sličan opšti izraz. Sledeći metod §8.9, daje kako u^λ može da se koristi za izvođenje prividnog položaja izvora. Metod tog paragrafa je strogo primenljiv na zvezde, a za tela u Sunčevom sistemu potrebne su minimalne izmene.

(b) Telo izvan Sunčevog sistema. Ovaj slučaj je jednostavniji, jer činjenica da je $q < R \ll r_e$ omogućava znatne aproksimacije. Sada je zgodno svesti tangentni vektor na heliocentrični pravac izvora (tela). On je određen sa $\mathfrak{s}$, gde je $\mathfrak{r}_e = r_e\mathfrak{s}$. Takođe je zgodno uvesti zvezdanu paralaksu π, koja je jednaka r_e^{-1}. Onda, do prvog reda i za m i za π, jednačina (8.54) daje

$$\mathfrak{s} = \left(1, q\pi - \frac{2m}{q}, 0\right). \tag{8.61}$$

Tangentni vektor u topocentru na nultu geodezijsku može biti napisan kao

$$u^\lambda = \left[-c(\mathfrak{s} + \sigma), 1 + \frac{2m}{R}\right]. \tag{8.62}$$

Vektor σ je sada mala popravka uzrokovana savijanjem svetlosti i zvezdanom paralaksom. Iz (8.53) i (8.61) sledi da je

$$\sigma = \left[0, \frac{2m}{q}\left(1 - \frac{X}{R}\right) - q\pi, 0\right].$$

Korišćenjem iz (8.59) već izvedenih rezultata, imamo, posle malih svođenja, da je

$$\sigma = \left\{\pi - \frac{2m}{R[R + (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s})]}\right\} \mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{R}). \tag{8.63}$$

Ovo može da se smeni u (8.62) dajući opšti izraz za u^λ primenljiv u bilo kojem izotropnom koordinatnom sistemu. Ovo je suštinski preduslov za strogo određivanje prividnog položaja zvezde u skladu sa opštom relativnošću.

Jednačina (8.63) pokazuje da su paralaktičko pomeranje i savijanje svetlosti suprotnih smerova; paralaksa pomera zvezdu ka Suncu, a savijanje svetlosti je udaljava od njega. Paralaksa dominira za bliske zvezde, ali za većinu zvezda i posebno za radio izvore savijanje svetlosti je mnogo značajnije. Pokazano je u jednačini (8.9) da je paralaksa proporcionalna sa $\sin E$, gde je E ugaona daljina od Sunca. Svođenje (8.63) na skalarni oblik pokazuje da je savijanje svetlosti proporcionalno sa $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}E$. Ovaj faktor može da bude veliki kod posmatranja pomračenja i okultacije radio izvora Suncem.

§ **8.9. Izvođenje prividnog položaja zvezde u opštoj relativnosti.** Analiza §§8.7 i 8.8 omogućava kompletiranje koraka (i) postupka izvedenog u §3.6 (str. 58). Sada je poznat tangentni vektor iz topocentra na nultu geodezijsku. Korak (ii) je definisanje jediničnih vektora I^λ, J^λ, K^λ, Q^λ. Iz jednačine (3.58), tačne do reda m, imamo da je

$$I^\lambda = \left[c\left(1 - \frac{m}{R}\right), 0, 0, 0\right], \tag{8.64}$$

sa sličnim izrazima i za J^λ i za K^λ. Osim toga, do istog reda je

$$Q^\lambda = \left(0, 0, 0, 1 + \frac{m}{R}\right). \tag{8.65}$$

Ovo je tangentni vektor na svetsku liniju stacionarnog posmatrača smeštenog u tački (X, Y, Z), dok su I^λ, J^λ, K^λ tri koordinatna pravca za tog posmatrača.

Korak (iii) je izvođenje ekvivalencija za geocentričnog posmatrača. Tangentni vektor na svetsku liniju tog posmatrača može biti napisan kao

$$q^\lambda = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(\mathfrak{V}, 1), \tag{8.66}$$

❋ gde je $\mathfrak{V}$ *koordinatna brzina* posmatrača, što je, $V_x = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$, itd. Ovo je najpogodnije i najdirektnije predstavljanje q^λ. Vektor $\mathfrak{V}$ nije tačno jednak „fizičkoj brzini" koja se normalno definiše kao koordinatna brzina u lokalnom Lorencovom sistemu. Međutim, ona se razlikuje samo za mali iznos reda Vm/R koji nema značaja u astrometriji.

Kako je q^λ jedinični vektor, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s$ je određen iz metrike sa dovoljnom tačnošću kao

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1 + \frac{m}{R} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}. \tag{8.67}$$

Sada je jedinični tangentni vektor q^λ izražen preko vektora položaja i brzine Zemlje. Dva poslednja člana na desnoj strani (8.67) su istog reda veličine ($\sim 10^{-8}$). Članovi višeg reda su, bez dokazivanja, zanemareni u daljoj analizi.

Jedinični vektor q^λ je sada korišćen za definisanje jediničnih vektora i^λ, j^λ, k^λ u pravcima posmatračevih koordinatnih osa. Odgovarajuća jednačina koja će biti primenjena jeste (3.65). Posle značajnih redukcija, dobija se da je

$$\begin{aligned} i^\lambda &= \left[c\left(1 - \frac{m}{R}\right) + \frac{V_x^2}{2c}, \frac{V_x V_y}{2c}, \frac{V_x V_z}{2c}, \frac{V_x}{c}\right], \\ j^\lambda &= \left[\frac{V_y V_x}{2c}, c\left(1 - \frac{m}{R}\right) + \frac{V_y^2}{2c}, \frac{V_y V_z}{2c}, \frac{V_y}{c}\right], \\ k^\lambda &= \left[\frac{V_z V_x}{2c}, \frac{V_z V_y}{2c}, c\left(1 - \frac{m}{R}\right) + \frac{V_z^2}{2c}, \frac{V_z}{c}\right]. \end{aligned} \tag{8.68}$$

U primenjenom postupku korak (iv) zahteva primenu jednačina (3.57) i (3.45). Onda je prividni položaj izvora dat jediničnim trovektorom $\mathfrak{s}^*$, gde je

$$\mathfrak{s}^* = (u^\lambda q_\lambda)^{-1}(u^\lambda i_\lambda, u^\lambda j_\lambda, u^\lambda k_\lambda). \tag{8.69}$$

Tangentni vektor nulte geodezijske dat je jednačinom (8.62), gde je σ mali vektor reda m. Onda, uzimajući (8.66) i (8.68), imamo

$$\mathfrak{s}^* = \frac{\left(1+\frac{m}{R}\right)\mathfrak{s}+\sigma+\frac{\mathfrak{V}}{c}+\frac{1}{2c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{s})\mathfrak{V}}{1+\frac{m}{R}+\frac{(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{s})}{c}+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}} \tag{8.70}$$

Konačno, razvijanje imenioca preko binomnog obrasca i smena σ iz (8.63) daje prividni položaj zvezde kao

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s} &+ \left[\pi - \frac{2m}{R(R+\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s})}\right]\mathfrak{s}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{R}) \\ &- \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{s}}{c}\right)\mathfrak{s}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{V}) + \frac{1}{2c^2}\mathfrak{V}\times(\mathfrak{V}\times\mathfrak{s}).\end{aligned} \tag{8.71}$$

Izučavajući desnu stranu ove jednačine možemo da vidimo značaj pojedinih članova u sledećem: vektor $\mathfrak{s}$ je heliocentrični položaj, član sa π je godišnja paralaksa, član sa m je savijanje svetlosti, član prvog reda sa V/c je klasična godišnja aberacija, a ostali članovi su aberacioni članovi drugog reda kako su dati u specijalnoj relativnosti [v. jednačinu (3.34)].

Pregled jednačine (8.71) ukazuje da su uticaji paralakse, savijanja svetlosti i aberacije međusobno razdvojeni, mada oni nisu posebni pojmovi u strogoj formulaciji opšte relativnosti. Rezultat nije iznenađujući. U analizama ovog i prethodnih paragrafa pomeranje sa heliocentričnog na prividni položaj razvijeno je u red po malim veličinama π, m/R i V/c. Najveći mogući mešoviti članovi u ovom razvoju biće reda $\pi V/c$ i mV/Rc, od kojih su oba zanemarena u razmatranju. Šta više, zaključeno je da je, sa tačnošću sa kojom radimo, razmatranje aberacije u specijalnoj relativnosti adekvatno.

§ 8.10. Zaključak.

Ova glava sadrži razmatranje pomeranja nebeskog tela iz heliocentričnog u prividni geocentrični položaj. Formulacija je bila potpuno klasična u prvih šest paragrafa glave i dokazala je mogućim izvođenje eksplicitnih formula za promene rektascenzije i deklinacije $(d\alpha, d\delta)$. Kada su uvedeni relativistički efekti, formule su postale mnogo komplikovanije i, dok izrazi za $d\alpha$ i $d\delta$ jesu pod znakom pitanja, vektorska formulacija je mnogo nejasnija. Postupak za račun promena u rektascenziji i deklinaciji biće konvertovanje heliocentričnog položaja na jedinični vektor, primena popravki iz jednačine (8.71) da se izvede jedinični vektor prividnog položaja i, konačno, konvertovanje nazad u rektascenziju i deklinaciju da se dobiju nove sferne koordinate.

Izvesne fine popravke koje su bile uključene u klasičnom razmatranju izostavljene su u analizi opšte relativnosti. One uključuju razlikovanje između geocentra i baricentra Zemlja/Mesec i, takođe, razliku između heliocentra i baricentra Sunčevog sistema. To su male popravke za koje su članovi drugog reda, bilo za paralaksu ili aberaciju, sasvim zanemarljivi. Oni su, čak, ugrađeni u analizu opšte relativnosti modifikacijom vektora položaja i brzine Zemlje, $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{V}$. Prema tome, u jednačini (8.71) $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{V}$ postaju, redom, Zemljine izotropne komponente koordinata i

brzine sa dodatim baricentričnim popravkama izvedenim iz klasičnih razmatranja. Time su svi efekti prvog i drugog reda adekvatno sačuvani.

Razmatranje §8.9 može se primeniti na zvezdu ili na telo izvan Sunčevog sistema. Za telo u Sunčevom sistemu postupak mora biti malo drugačiji. Navodeći slučaj (a) u §8.8, zamenićemo $\mathfrak{s}$ sa $\mathfrak{s}_0$ i σ sa σ_0. Dakle, iz jednačine (8.60), izvodimo prividni položaj tela u Sunčevom sistemu kao

$$\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}_0 + \frac{2m}{\left[R^2 - (\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_0)^2\right]}\left[\frac{\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_0}{R} - \frac{(r_e - R)}{\rho}\right]\mathfrak{s}_0 \times (\mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{R})$$
$$- \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{s}_0}{c}\right)\mathfrak{s}_0 \times (\mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{V}) + \frac{1}{2c^2}\mathfrak{V} \times (\mathfrak{V} \times \mathfrak{s}). \qquad (8.72)$$

Napomenimo da je u ovoj formuli $\mathfrak{s}_0$ kvazi-geometrijski geocentrični pravac bez korekcije za paralaksu. Jedinični vektor $\mathfrak{s}_0$ mora da se odnosi na heliocentrični pravac preko vektorske jednačine (8.55). Ovo pomeranje neće, u opštem slučaju, biti malo.

Obe jednačie i (8.71) i (8.72) daju prividni položaj preko članova kvazi-geometrijskog položaja. Ipak, ove formule mogu da se invertuju relativno lako. Na primer, heliocentrični položaj zvezde dat je, sa dovoljnom tačnošću, preko članova prividnog položaja formulom

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^* - \left[\pi - \frac{2m}{R(R + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}^*)}\right]\mathfrak{s}^* \times (\mathfrak{s}^* \times \mathfrak{R})$$
$$+ \frac{1}{c}\left(1 + \frac{\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{s}^*}{c}\right)\mathfrak{s}^* \times (\mathfrak{s}^* \times \mathfrak{V}) + \frac{1}{2c^2}\mathfrak{V} \times (\mathfrak{V} \times \mathfrak{s}^*). \qquad (8.73)$$

Jednačina (8.72) može slično da se invertuje.

Suština je da su komplikovane relativističke formule neophodne samo u radu sa velikom preciznošću. Često, mnogo jednostavniji klasični pristup je potpuno zadovoljavajući.

Zadaci

8.1. Zvezda ima ekliptičku longitudu 270° i ekliptičku latitudu 45°. Totalna promena u longitudi zvezde zbog paralakse je 0″,8. Kolika je odgovarajuća promena u latitudi zvezde? Odrediti trenutke u godini kada je najveća latituda i longituda i izračunati udaljenost zvezde pod pretpostavkom da je Zemljina putanja krug.

8.2. Dokazati da na nebeskoj sferi postoje samo dve tačke za koje se gubi uticaj godišnje aberacije. Pokazati da su njihove ekvatorske koordinate date približno sa

$$\alpha = -\operatorname{arctg}(\cos\varepsilon \operatorname{ctg}\lambda_\odot)$$
$$\delta = \pm\arcsin(\sin\varepsilon\cos\lambda_\odot)$$

gde $\lambda_\odot$ označava pravu longitudu Sunca.

8.3. Dokazati da je uticaj godišnje paralakse na rektascenziju zvezde najveći kada je longituda Sunca približno data sa

$$\lambda_\odot = 90^\circ + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha \sec\varepsilon).$$

8.4. Dokazati da su, u izotropnoj formi metrike Švarcšildovog prostor-vremena, koordinate brzine svetlosti

$$c\left(1 - \frac{m^2}{4r^2}\right).$$

8.5. Baricentrična brzina V posmatrača usmerena je ka tački O na nebeskoj sferi. Pokazati da aberacija pomera zvezdu X po velikom krugu OX u tačku X'. Dokazati da je ovaj uticaj tačno dat u specijalnoj relativnosti formulom

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\gamma(1 + V\operatorname{sc}\theta/c)},$$

gde je $OX = \theta$, $OX' = \theta'$ i $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Pokazati da se, za male brzine, ovo aproksimira klasičnom formulom

$$d\theta = -\frac{V}{c}\sin\theta.$$

8.6. Dokazati da svetlosni zrak u Švarcšildovom prostoru-vremenu okarakterisan parametrom q zaklapa ugao ψ u radijalnom pravcu, gde je

$$\sin\psi = \frac{q}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right).$$

8.7. Dokazati da ako je R koordinatni radijus Sunca u metrici izotropnog oblika, onda je ugaoni prečnik Sunca D, posmatran sa koordinatnog rastojanja r, dat sa

$$D = 2\arcsin\left[\frac{R}{r}\left(1 + \frac{2m}{R} - \frac{2m}{r}\right)\right].$$

8.8. Izvesti izraz u opštoj relativnosti za prividni pravac tela Sunčevog sistema preko kvazi-geometrijskog pravca $\mathfrak{s}_0$, definisanog sa

$$\rho\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{r} - \mathfrak{R},$$

gde su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ vektori položaja tela i posmatrača, redom. Proverite da li je vaš rezultat ekvivalentan jednačini (8.72).

8.9. Invertovati rezultat prethodnog zadatka u cilju izvođenja kvazi-geometrijskog pravca $\mathfrak{s}_0$ tela Sunčevog sistema preko prividnog pravca $\mathfrak{s}^*$.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Precesija i nutacija

§ 9.1. Uvod.

U ovoj glavi su izvedene detaljne formule za određivanje promena koordinata zvezde usled dejstva precesije i nutacije. Ove promene nisu izazvane kretanjem same zvezde po nebeskoj sferi, već kretanjem nebeskog pola i pola ekliptike koji zajedno definišu koordinatni sistem. Ranije, u §3.2, već je dat kratak prikaz precesije i nutacije.

Razlika između precesije i nutacije je proizvoljna i napravljena je radi jednostavnije upotrebe pri određivanju položaja. Dugoperiodično, pravilno, kretanje nebeskog pola nazvano je precesija, dok je nutacija kratkoperiodično kretanje tog pola oko njegovog srednjeg položaja. U ovoj glavi je uglavnom analizirana precesija, dok je razmatranje nutacije ostavljeno za §9.8.

U sledeća tri paragrafa biće prvo ustanovljen godišnji iznos precesije. S njim je moguće odrediti promene koordinata zvezde za kratak vremenski interval, prvenstveno za interval kraći od jedne godine. Za razmatranje precesionih promena na višegodišnjim intervalima potreban je tačniji postupak. U §§9.5 i 9.6 izvedeni su strogi obrasci. Međutim, približni obrasci mogu da se koriste i za duge vremenske intervale. Oni mogu da zadovolje mnoge potrebe, jer im se uvođenjem popravki drugog reda povećava tačnost.

U ovoj glavi je pretpostavljeno da se zvezde ne kreću po nebeskoj sferi i da se njihove koordinate menjaju samo usled precesionog i nutacionog kretanja koordinatnog sistema.

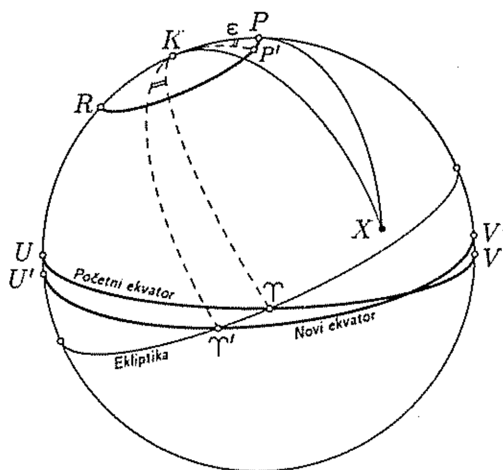
§ 9.2. Luni-solarna precesija.

Kada razmatramo luni-solarnu preceseiju kao posebnu pojavu, mi razmatramo samo srednje kretanje nebeskog pola. Neka su na sl. 9.1 P, K i Υ, redom, srednji nebeski pol, ekliptički pol i srednji ekvinokcij za neku epohu t. Onda je $KP = \varepsilon$. Zvezda u tački X ima ekvatorske koordinate (α, δ), pri čemu je $PX = 90° - \delta$ i $KPX = 90° + \alpha$. Osim toga, zvezda ima ekliptičke koordinate (λ, β), pri čemu je $KX = 90° - \beta$ i $PKX = 90° - \lambda$.

Luni-solarna precesija je posledica srednjeg torzionog privlačenja koje na Zemlju vrše Mesec i Sunce. Usled simetrije, pravac ove *srednje* torzije mora ležati i u ekliptičkoj i u ekvatorskoj ravni, te je to pravac ka Υ tački. Tada tačka P definiše

trenutni pravac vektora Zemljinog ugaonog momenta. Iz toga sledi da srednja torzija uzrokuje kretanje pola P u pravcu koji je već normalan na luk KP.

Pošto je luni-solarna precesija glavna komponenta precesije, njen približni opis možemo dati sa stanovišta da nebeski pol opisuje mali krug $PP'R$ oko pola ekliptike. Taj krug nebeski pol opiše za oko 26 000 godina. Godišnji iznos kretanja nebeskog pola po ovom malom krugu je obeležen sa ψ ($\sim 50''$). Gornji opis je približan jer tačka K nije nepokretna, ona se pomera zbog planetne precesije koja se razmatra u sledećem paragrafu. Međutim, ovakva aproksimacija se može napraviti na kratkom vremenskom intervalu.



Luni-solarna precesija.

Слика 9.1

Pretpostavimo sada da je P' položaj nebeskog pola u trenutku $t+\tau$. Onda je ugao $PKP' = \psi\tau$. Na sl. 9.1 novi ekvator je predstavljen sa $U'\Upsilon'V'$, dok je njegova presečna tačka sa ekliptikom novi ekvinokcij Υ'. Pošto je $PK\Upsilon = P'K'\Upsilon' = 90°$, to sledi da je luk $\Upsilon\Upsilon' = \psi\tau$. Stoga se ekvinokcij kreće po ekliptici retrogradno jednolikom brzinom ψ.

Izrazi za promene ekliptičkih koordinata zvezde X su jednostavni. Pošto je u ovoj aproksimaciji K nepokretno, latituda se ne menja. Početna tačka za longitudu (Υ tačka) pomerila se po ekliptici za $\psi\tau$, pa je tako longituda λ porasla za taj iznos. Promene ekliptičkih koordinata usled luni-solarne precesije su

$$\begin{aligned} d\lambda &= \psi\tau, \\ d\beta &= 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Promene ekvatorskih koordinata su složenije i dobijaju se iz sfernog trougla PKX, čije smo elemente već odredili. Primenom kosinusnog obrasca dobijamo

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda,$$

u kojoj se pomeranjem pola iz P u P' menjaju samo δ i λ. Diferenciranjem dobijamo

$$\cos\delta\, d\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\, d\lambda.$$

Ovo može da se pojednostavi primenom sinusnog obrasca, koji daje

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha. \tag{9.2}$$

Promena deklinacije je, na osnovu (9.1), dobijena kao

$$d\delta = \psi\tau\sin\varepsilon\cos\alpha. \tag{9.3}$$

Promena u rektascenziji se dobija diferenciranjem jednačine (9.2). Koristeći (9.1) i (9.3), imamo

$$\cos\delta\sin\alpha\, d\alpha = \psi\tau(\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\delta\cos^2\alpha).$$

Ekliptičke koordinate na desnoj strani eliminišu se primenom sinusno-kosinusnog obrasca u prvom članu, pa se jednačina svodi na

$$d\alpha = \psi\tau(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta). \tag{9.4}$$

Obično se jednačine (9.3) i (9.4) primenjuju samo za kratke vremenske intervale, reda godine ili kraće. One su jednačine prvog reda izvedene na osnovu geometrijske interpretacije sl. 9.1, koja je njihova aproksimacija.

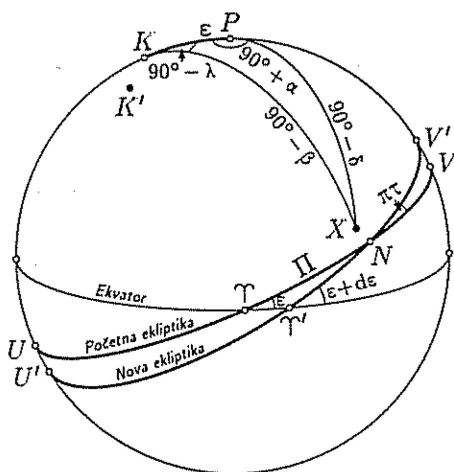
Godišnji iznos luni-solarne precesije je ovde razmatran (klasično) preko Njutnove dinamike sa malom relativističkom popravkom od ($\sim 0'',02$), koja je poznata kao geodezijska precesija. U opštoj relativnosti nađeno je da inercijalni referentni sistem u ravnotežnoj Zemlji koja kruži, ima sporu rotaciju u odnosu na heliocentrični inercijalni sistem, što je uzeto u obzir pri izračunavanju ψ. Vrednost ψ zavisi od brojnih parametara, dinamičkog oblika Zemlje, nagiba ekliptike, masa Meseca i Sunca i njihovih putanjskih elemenata. To je, u stvari, direktno proporcionalno $\cos\varepsilon$, i, pošto nagib ekliptike ima sporu sekularnu promenu izazvanu planetnom precesijom, ψ nije strogo konstantno. Njegova vrednost je data sa

$$\psi = 50'',3878 + 0'',0049T, \tag{9.5}$$

gde je T vreme u stolećima od fundamentalne epohe J2000,0, tj. $T = (t-2000)/100$.

§ 9.3. Planetna precesija.

Uticaj planeta na pravac ose Zemljine rotacije nije zanemarljiv. Planetski poremećaji utiču na Zemljinu putanju oko Sunca. To znači, kako je objašnjeno u glavi 7, da su Zemljini putanjski elementi izloženi postepenim promenama i da putanjska ravan, ekliptika, nije stalna. Ekliptika je definisana kao *srednja* putanjska ravan baricentra Zemlja-Mesec. Kao takva nije izložena nikakvim kratkoperiodičnim varijacijama, već samo sekularnim promenama. Međutim, posledica promene koordinatnog sistema može se opisati kao precesija—*planetna precesija*. Ovom definicijom nisu uključeni nutacioni članovi.



Planetna precesija.

Слика 9.2

U ovom paragrafu pretpostavićemo da su nebeski pol i ekvator nepokretni. Neka su K i ♈ (sl. 9.2), redom, ekliptički pol i ekvinokcij za neku početnu epohu i neka su K' i ♈′ njihovi položaji posle kratkog vremenskog intervala τ. Početna ekliptika je veliki krug U♈V, a nova ekliptika je U'♈′V'. Ove dve ekliptike seku se u dvema dijametralno suprotnim tačkama, N i N', i jedna od njih je prikazana na sl. 9.2.

Kretanje ekliptike može da se opiše kao spora rotacija ekliptičke ravni oko ose NN'. Godišnji iznos ove rotacije je označen sa π ($\sim 0'',5$). Otud sledi da je ugao ♈N♈′ $= \pi\tau$. Položaj rotacione ose

određen je njenom longitudom (na početnoj ekliptici) i obično se označava sa Π. Tada je $\Upsilon N = \Pi$. Prilično lako se vidi da su N i N' polovi luka KK' koji opisuje ekliptički pol na nebeskoj sferi.

Izrazi za uticaj planetne precesije na ekvatorske koordinate (α, δ) zvezde X su vrlo jednostavni. Pošto se nebeski pol ne kreće, nema promene u deklinaciji zvezde. Osim toga, ekvinokcij je pomeren duž ekvatora za luk $\Upsilon\Upsilon'$. Ovo ćemo označiti sa $\lambda'\tau$, gde je λ' poznato kao *godišnji iznos planetne precesije*. Pošto je ekvinokcij početna tačka za rektascenziju, stoga je jasno da će rektascenzija svake zvezde biti smanjena za $\lambda'\tau$; pa su, formalno, promene ekvatorskih koordinata zvezde, usled planetne precesije, date sa

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\lambda'\tau, \\ d\delta &= 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Parametar λ' može se odrediti iz sfernog trougla $\Upsilon\Upsilon' N$. Elementi ovog trougla su sledeći: kao što smo već označili, $\Upsilon N = \Pi$, $\Upsilon\Upsilon' = \lambda'\tau$ i $\Upsilon N \Upsilon' = \pi\tau$. Međutim, pošto je nagib ekliptike ugao između ekliptike i ekvatora, to sledi da je $N\Upsilon\Upsilon' = \varepsilon$, dok je $\Upsilon\Upsilon' N = 180° - (\varepsilon + d\varepsilon)$. Napomenimo da planetna precesija uzrokuje promene nagiba ekliptike.

Primenjujući sinusni obrazac na sferni trougao $\Upsilon\Upsilon' N$ dobijamo

$$\sin\Pi \sin\pi\tau = \sin\lambda'\tau \sin(\varepsilon + d\varepsilon).$$

Za malo τ, s dovoljnom tačnošću, imamo

$$\lambda' = \pi \sin\Pi \csc\varepsilon. \tag{9.7}$$

Isto tako, izvedena je i promena nagiba ekliptike. Na osnovu četvoroelementnog obrasca imamo

$$\cos\varepsilon \cos\lambda'\tau = \sin\lambda'\tau \operatorname{ctg}\Pi + \sin\varepsilon \operatorname{ctg}(\varepsilon + d\varepsilon),$$

ili

$$\sin(\varepsilon + d\varepsilon)\cos\varepsilon\cos\lambda'\tau - \cos(\varepsilon + d\varepsilon)\sin\varepsilon = \sin\lambda'\tau \operatorname{ctg}\Pi \sin(\varepsilon + d\varepsilon).$$

Posle uvođenja uobičajenih aproksimacija za male uglove, ovo se, sa (9.7), svodi na

$$d\varepsilon = \pi\tau\cos\Pi. \tag{9.8}$$

Promene ekliptičkih koordinata zvezda su složenije od ekvatorskih. Najdirektniji način njihovog dobijanja je razmatranje sfernog trougla KPX. Takav trougao smo sreli u §9.2 sa poznatim elementima, koji su dati saglasno sl. 9.2. Već su nađene promene $d\alpha$ i $d\varepsilon$. Kosinusni obrazac za taj trougao je

$$\sin\beta = \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha$$

Diferencirajući ovu jednakost dobijamo

$$\cos\beta\, d\beta = -(\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha)\, d\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha.$$

Ekvatorske koordinate na desnoj strani moraju se zameniti ekliptičkim koordinatama primenom, u prvom članu, sinusno-kosinusnog obrasca i, u drugom članu, sinusnog obrasca (9.2). To daje sledeći rezultat

$$d\beta = \pi\tau\sin(\Pi - \lambda). \tag{9.9}$$

Promena longitude dobija se diferenciranjem jednačine (9.2)

$$\cos\beta \sin\lambda \, d\lambda = \cos\delta \sin\alpha \, d\alpha - \sin\beta \cos\lambda \, d\beta.$$

Proizvod $\cos\delta \sin\alpha$ eliminisaćemo primenom sinusno-kosinusnog obrasca. Zatim, posle malih pojednostavljenja, nalazimo da je

$$d\lambda = \pi\tau\left[\operatorname{tg}\beta \cos(\Pi - \lambda) - \sin\Pi \operatorname{ctg}\varepsilon\right].$$

Uticaj planetne precesije na ekliptičke koordinate zvezde je dat izrazima

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\lambda'\tau \cos\varepsilon + \pi\tau \operatorname{tg}\beta \cos(\Pi - \lambda), \\ d\beta &= \pi\tau \sin(\Pi - \lambda). \end{aligned} \tag{9.10}$$

Radi ilustracije longitude ose rotacije NN', ugao Π je nacrtan kao oštar ugao. U stvari, $\Pi \simeq 175°$. Tačka N je na suprotnoj strani dijagrama, sasvim blizu jesenje ravnodnevice, a luk KK' je blizu meridijana longitude KP na ekliptici. Međutim, ove razlike ne utiču na formule koje su izvedene. Napomenimo da je λ' pozitivno i da nagib ekliptike opada sa vremenom.

Godišnji iznos λ' planetne precesije dat je preko dva parametra π i Π. Ovi parametri su kasnije izvedeni iz planetskih poremećaja koji se izučavaju metodama nebeske mehanike i nijedan od njih nije strogo konstantan. Brzina rotacije π ima vrlo malu sekularnu promenu, a usled kretanja Υ tačke longituda Π s dodatim sekularnim pomeranjem, takođe, ima i precesionu promenu. Ovaj parametar zahteva preciznije određivanje od ranije datog. Ovo može da se posmatra kao longituda (u odnosu na srednju Υ tačku datuma) uzlaznog čvora trenutne ekliptike na njenom neposredno prethodnom položaju.

Numeričke vrednosti gore razmatrana dva parametra su

$$\begin{aligned} \Pi &= 174°,8764 + 0°,9137T, \\ \pi &= 0'',4700 - 0'',0007T, \end{aligned} \tag{9.11}$$

gde je T vreme u stolećima od J2000,0. Godišnji iznos planetne precesije i iznos promene nagiba ekliptike mogu se izračunati iz ovih vrednosti korišćenjem jednačina (9.7) i (9.8). Nađeno je da su

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0'',1055 - 0'',0189T, \\ \varepsilon &= 23°26'21'',45 - 46'',81T. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Do sada razmatrani podaci i primenjivane metode nisu dale zadovoljavajuću tačnost za nagib ekliptike ε. To se može postići tačnijim metodama koje su date u §9.5.

§ 9.4. Opšta precesija.

Određivanje planetne precesije izloženo u prethodnom paragrafu, donekle, pokazuje neprirodnost. Naime, ekvator je posmatran kao nepokretan, zanemarivanjem činjenice da je njegovo pomeranje usled luni-solarne precesije znatno veće nego pomeranje ekliptike koje je razmatrano. Međutim, ovakvo određivanje dalo je korisne rezultate. *Opšta precesija*, koja je ukupni efekt i koja proizilazi iz kombinovanog kretanja ekvatora i ekliptike, može se razmatrati kao zbir luni-solarne precesije i planetne precesije. Princip sabira-

nja je opravdan, pod uslovom da je interval τ za koji je razmatrano pomeranje dovoljno mali. Tada se uticaj opšte precesije, jednostavno, dobija sabiranjem rezultata posebno dobijenih u §§9.2 i 9.3.

Razmotrimo prvo uticaj opšte precesije na ekvatorske koordinate (α, δ) zvezde. Sabiranjem uticaja datih jednačinama (9.3) i (9.4) sa onima iz (9.6) dobijamo

$$\begin{aligned} d\alpha &= m\tau + n\tau \sin\alpha \operatorname{tg}\delta, \\ d\delta &= n\tau\cos\alpha, \end{aligned} \qquad (9.13)$$

gde imamo uvedene dve nove precesione konstante, naime

$$\begin{aligned} m &= \psi\cos\varepsilon - \lambda', \\ n &= \psi\sin\varepsilon. \end{aligned} \qquad (9.14)$$

Konstante m i n se redom odnose na godišnji iznos precesije u rektascenziji i godišnji iznos precesije u deklinaciji.

Promene ekliptičkih koordinata (λ, β) se lako određuju. Kombinovanjem rezultata jednačina (9.1) i (9.10) imamo

$$\begin{aligned} d\lambda &= p\tau + \pi\tau \operatorname{tg}\beta\cos(\Pi - \lambda), \\ d\beta &= \pi\tau\sin(\Pi - \lambda), \end{aligned} \qquad (9.15)$$

gde je p poznato kao godišnji iznos opšte precesije (u longitudi). To je definisano jednačinom

$$p = \psi - \lambda'\cos\varepsilon. \qquad (9.16)$$

Napomenimo, još jednom, da godišnji iznosi m, n i p nisu sasvim konstantni, već imaju slabe sekularne promene. Iz njihovih definicija i iz numeričkih vrednosti, već datih jednačinama (9.5), (9.11) i (9.12), možemo ustanoviti da je

$$p = 50'',2910 + 0'',0222T, \qquad (9.17)$$

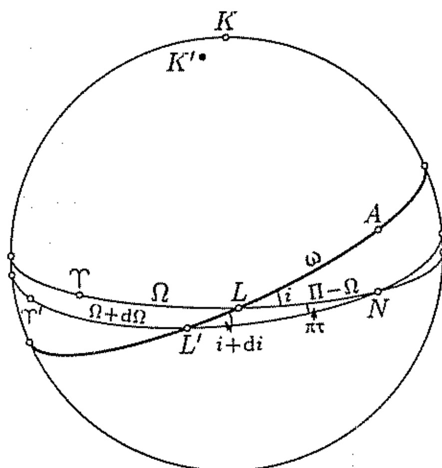
dok su

$$\begin{aligned} m &= 3^s,074\,96 + 0^s,001\,86T \\ n &= 1^s,336\,21 - 0^s,000\,57T = 20'',0431 - 0'',0085T. \end{aligned} \qquad (9.18)$$

Obično je parametar n dat i u lučnim i u vremenskim sekundama, kao gore, pošto se koristi za izračunavanje promena i u rektascenziji i u deklinaciji. S druge strane, m se koristi samo za rektascenziju, a p samo za longitudu; pa su i upotrebljene odgovarajuće jedinice.

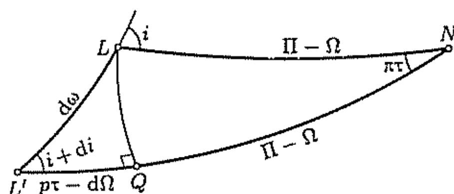
Dodatne promene koordinata nebeskog tela nastaju i usled precesionih promena u putanjskim elementima heliocentrične putanje. Elementi koji se menjaju usled precesije su nagib putanje i, longituda uzlaznog čvora Ω i argument perihela ω. Oni su redom prikazani na sl. 9.3 uglom ALN i lucima ΥL i LA. Na ovom dijagramu, ΥLN predstavlja ekliptiku za neku početnu epohu, dok je $\Upsilon' L' N$ njen malo kasniji položaj, posle τ (godina). Naravno, veliki krug $L'LA$ je putanjska ravan, a tačka A predstavlja položaj planete u perihelu.

Odmah je prepoznatljivo da je $LL' = d\omega$, priraštaj argumenta perihela. Osim toga, novi nagib putanje je sferni ugao $LL'N = i + di$. Posmatrajmo sada čvor N koji je zajednički za obe ekliptike. U odnosu na početni ekvinokcij Υ, njegova longituda je Π, odakle je $LN = \Pi - \Omega$. Njegova longituda u odnosu na novi ekvinokcij Υ' sledi iz (9.15). Kako je $\beta = 0$, to je $d\lambda = p\tau$. Stoga, zaključujemo da je



Precesione promene putanjskih elemenata.

Слика 9.3



Uvećani deo sl. 9.3.

Слика 9.4

$$L'N = \Pi - \Omega + p\tau - \mathrm{d}\Omega.$$

Preostala dva elementa sfernog trougla $LL'N$ su lako uočljiva, $LNL' = \pi\tau$ i $L'LN = 180° - i$. Jasnoće radi, ovaj trougao je uvećano prikazan na sl. 9.4.

Izvršimo sada sledeću konstrukciju. Povucimo mali kružni luk sa polom u N kroz tačku L do preseka sa NL' u tački Q. Tada je $NL = NQ = \Pi - \Omega$, tako je i $L'Q = p\tau - \mathrm{d}\Omega$; pa je mali kružni luk LQ dužine $\pi\tau \sin(\Pi - \Omega)$. Sada mali sferni trougao LQL' može biti posmatran kao ravanski trougao s pravim uglom kod Q. Vidi se da je

$$\mathrm{d}\omega = LQ \csc(i + \mathrm{d}i),$$
$$p\tau - \mathrm{d}\Omega = LQ \operatorname{ctg}(i + \mathrm{d}i).$$

Uvodeći smenu za mali kružni luk, dobijamo, s dovoljnom tačnošću, dva rezultata

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \pi\tau \csc i \sin(\Pi - \Omega), \\ \mathrm{d}\Omega &= p\tau - \pi\tau \operatorname{ctg} i \sin(\Pi - \Omega). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Priraštaj u nagibu putanje dobijen je primenom četvoroelementnog obrasca na sferni trougao $L'LN$. Tada je

$$-\cos \mathrm{d}\omega \cos i = \sin \mathrm{d}\omega \operatorname{ctg}(\Pi - \Omega) - \sin i \operatorname{ctg}(i + \mathrm{d}i),$$

tj.

$$\sin i \cos(i + \mathrm{d}i) - \cos \mathrm{d}\omega \cos i \sin(i + \mathrm{d}i) = \sin \mathrm{d}\omega \operatorname{ctg}(\Pi - \Omega) \sin(i + \mathrm{d}i).$$

Pošto su $\mathrm{d}i$ i $\mathrm{d}\omega$ male veličine, ovo daje

$$\sin \mathrm{d}i + O(\mathrm{d}\omega^2) = -\mathrm{d}\omega \sin i \operatorname{ctg}(\Pi - \Omega) + O(\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}i).$$

Koristeći prvi rezultat (9.19) dobićemo rešenje prvog reda

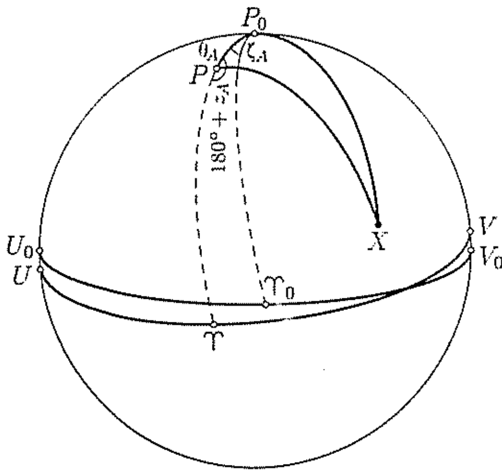
$$\mathrm{d}i = -\pi\tau \cos(\Pi - \Omega). \tag{9.20}$$

Treba ponovo spomenuti da su formule za opštu precesiju, izvedene u ovom paragrafu, namenjene za korišćenje na kratkim vremenskim intervalima, uglavnom kraćim od jedne godine. Ako ih koristimo na dužim vremenskim intervalima, gubi se na preciznosti.

U ovom paragrafu nisu izvođene stroge formule, već je njihovo izvođenje ostavljeno za sledeći paragraf. Na neki način, stroge formule nisu tako fleksibilne, ali su vrlo moćne kada se koriste u cilju za koji su namenjene, naime za prelazak sa ekvatorskih koordinata jedne epohe na ekvatorske koordinate druge epohe koja je mnogo godina udaljena od prve epohe.

§ 9.5. Stroge formule. Kada je potrebno upoređivati mnogo pojedinačnih, višegodišnjih posmatranja, u praksi je neophodno da se sva ta posebna posmatranja svedu na istu standardnu epohu. Do skoro je to bila epoha 1950,0, premda će, u buduće, biti korišćena J2000,0 (v. §10.5). Zato razmotrimo transformaciju ekvatorskih koordinata između ma koje epohe u trenutku t i standardne epohe u trenutku t_0.

Neka su P_0 i Υ_0 nebeski pol i ekvinokcij u trenutku t_0. Ekvator za ovu epohu prikazan je na sl. 9.5 kao $U_0\Upsilon_0V_0$. Prikazan je, takođe, položaj zvezde X sa koordinatama (α_0, δ_0) za ovu epohu. Sada, pretpostavimo da je P novi položaj nebeskog pola u trenutku t i obeležimo luk P_0P sa θ_A. Podrazumeva se da je to luk velikog kruga koji spaja dve tačke sfere. Stoga, P_0P, kao što je prikazano na sl. 9.5, ne predstavlja putanju pola od jedne do druge tačke, iako je time ograničena. Precesija je, prvom grubom aproksimacijom, opisana kao kretanje nebeskog pola po malom krugu oko pola ekliptike. Na početku, pol će se malim delom putanje kretati duž velikog kruga $P_0\Upsilon_0$. Sledstveno tome, ugao $PP_0\Upsilon_0$ biće mali ugao, koji mora težiti nuli u toku vremenskog intervala $(t - t_0)$. Označimo ovaj ugao $PP_0\Upsilon_0$ sa ζ_A. Rektascenzija zvezde je $\alpha_0 = \Upsilon_0P_0X$. Kao i obično, vidimo da je u sfernom trouglu $PP_0X = \alpha_0 + \zeta_A$, dok je $P_0X = 90^\circ - \delta_0$.



Precesioni uglovi ζ_A, z_A, θ_A.
Слика 9.5

Neka je sada $U\Upsilon V$ ekvator za trenutak t, a Υ ekvinokcij za novu epohu. Na isti način je ustanovljeno da je $PP_0\Upsilon_0$ mali ugao, dok je ΥPP_0 ograničeno na 180°. Označimo da je $\Upsilon PP_0 = 180^\circ + z_A$. Kao što je pokazano na sl. 9.5, i ζ_A i z_A biće mali pozitivni uglovi (kada je $t > t_0$). U stvari, oni su veličine prvog reda za vremenski interval $(t - t_0)$. Neka su (α, δ) koordinate zvezde u odnosu na novi ekvator i ekvinokcij. Pošto je $\alpha = \Upsilon PX$, to sledi da je $P_0PX = 180^\circ - (\alpha - z_A)$. Stoga je $PX = 90^\circ - \delta$.

Sada je određeno svih pet elemenata sfernog trougla P_0PX, naime $P_0P = \theta_A$, $P_0X = 90^\circ - \delta_0$, $PX = 90^\circ - \delta$, $PP_0X = \alpha_0 + \zeta_A$, $P_0PX = 180^\circ - (\alpha - z_A)$. Sferne koordinate zvezde za dve različite epohe mogu, primenom standardnih trigonometrijskih obrazaca na sferni trougao P_0PX, biti povezane. Na primer, (α, δ) se izrazi preko (α_0, δ_0), a tri precesiona ugla, uvođenjem obrnutog redosleda sinusno-kosinusnog, sinusnog i kosinusnog obrasca, biće

$$\begin{aligned}
\cos\delta\cos(\alpha - z_A) &= \cos\theta_A\cos\delta_0\cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin\theta_A\sin\delta_0,\\
\cos\delta\sin(\alpha - z_A) &= \cos\delta_0\sin(\alpha_0 + \zeta_A),\\
\sin\delta &= \sin\theta_A\cos\delta_0\cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos\theta_A\sin\delta_0.
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Na drugoj strani, ako se transformacija primeni u suprotnom smeru, primena, s neznatnom razlikom, tri ista osnovna obrasca daje

$$\begin{aligned} \cos\delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos\theta_A \cos\delta \cos(\alpha - z_A) + \sin\theta_A \sin\delta, \\ \cos\delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos\delta \sin(\alpha - z_A), \\ \sin\delta_0 &= -\sin\theta_A \cos\delta \cos(\alpha - z_A) + \cos\theta_A \sin\delta. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Formule (9.21) i (9.22) su tačne. Nije napravljena nikakva aproksimacija. Ipak, da bi se ove formule primenile, neophodno je imati tri precesiona ugla ζ_A, z_A i θ_A, koji se moraju izvesti iz teorije precesije. Oni su praktično izračunati kao stepeni redovi vremenskog intervala $(t - t_0)$ do članova trećeg reda. Koeficijenti u stepenim redovima neznatno zavise od izbora početne epohe. Ako za nju uzmemo J2000,0, imamo

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0^\circ{,}640\,616\,1\,T + 0^\circ{,}000\,083\,9\,T^2 + 0^\circ{,}000\,005\,0\,T^3, \\ z_A &= 0^\circ{,}640\,616\,1\,T + 0^\circ{,}000\,304\,1\,T^2 + 0^\circ{,}000\,005\,1\,T^3, \\ \theta_A &= 0^\circ{,}556\,753\,0\,T - 0^\circ{,}000\,118\,5\,T^2 - 0^\circ{,}000\,011\,6\,T^3. \end{aligned} \tag{9.23}$$

U ovim formulama T je interval $(t - t_0)$ izražen u julijanskim stolećima od po 36 525 dana.

Bar za sada, korišćenje standardne epohe J2000,0 znači da je $(t - t_0)$, a time i T, negativno. Sva tri parametra data jednačinama (9.23) biće, takođe, negativna. Ovo je suprotno onom što je predstavljeno izvedenim jednačinama (9.21) i (9.22) i onom što je ilustrovano na sl. 9.5. Iako je dijagram dat drugačije, rezultujuće formule su nepromenjene.

Može se, takođe, koristiti i prethodna standardna epoha, sada napisana kao B1950,0. Definicije ove dve standardne epohe, i u vezi s njima različite konvencije, detaljno su razmatrane u §10.5. Korišćenje epohe B1950,0 zahteva i drugačije formule za ζ_A, z_A i θ_A. One su

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0^\circ{,}640\,263\,3\,T + 0^\circ{,}000\,083\,9\,T^2 + 0^\circ{,}000\,005\,0\,T^3, \\ z_A &= \zeta_A + 0^\circ{,}000\,219\,7\,T^2, \\ \theta_A &= 0^\circ{,}556\,737\,6\,T - 0^\circ{,}000\,118\,3\,T^2 - 0^\circ{,}000\,011\,7\,T^3. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Sada je, međutim, T vremenski interval posle B1950,0 izražen u tropskim stolećima od po 36 524,22 dana. Treba naglasiti da stari sistem koristi nešto različite vrednosti precesionih konstanti i to je razlog neslaganja jednačina (9.23) i (9.24).

Tri precesiona ugla ζ_A, z_A i θ_A definišu položaj pola P i ekvinokcija Υ (sl. 9.5) u odnosu na njihove početne položaje. Zato oni određuju promene u ekvatorskim koordinatama zvezde. Međutim, ova tri ugla nisu dovoljna za određivanje promena u ekliptičkim koordinatama, pošto oni ne određuju položaj pola ekliptike. U odnosu na sl. 9.5, moguće je da početni ekliptički pol K_0 leži na velikom krugu P_0U_0 sa nerešenim desnim uglom $\Upsilon_0 P_0$, a sličan zaključak može se napraviti i za njegov položaj u trenutku t. Za određivanje položaja ekliptičkog pola i tako definisane ekliptičke ravni, neophodno je znati nagib ekliptike. On je izveden iz teorije precesije i iznosi

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21''{,}448 - 46''{,}815T - 0''{,}001T^2 + 0''{,}002T^3 \tag{9.25}$$

gde je T vreme u julijanskim stolećima od fundamentalne epohe J2000,0.

Ekliptičke koordinate nebeskog tela mogu se izvesti za svaku epohu korišćenjem jednačine (9.25). Kao što je pokazano u §2.5, transformacija sa ekvatorskih na ekliptičke koordinate je rotacija osa za ugao ε. Jednačina (9.25) daje vrednost ovog ugla. Transformaciju sa koordinata jedne epohe na koordinate druge epohe najbolje je izvršiti u ekvatorskom koordinatnom sistemu.

§ 9.6. Matrice rotacije.

U prethodnom paragrafu izvedene su stroge formule, ali nisu ništa pogodnijeg oblika za kompjutersko izračunavanje. Njihov oblik se može poboljšati uvođenjem vektorskih oznaka. Tada transformacija sa ekvatora i ekvinokcija jedne epohe na ekvator i ekvinokcij druge epohe postaje matrična operacija vektora položaja zvezde.

Neka je $\mathfrak{s}_0$ jedinični vektor koji posebno označava položaj zvezde u odnosu na normalno postavljene pravougle ekvatorske ose određene sa ekvatorom i ekvinokcijom standardne epohe t_0. Označićemo sa $\mathfrak{s}_0$ vektor-kolonu koji će, korišćenjem oznaka prethodnog paragrafa, biti

$$\mathfrak{s}_0 = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0 \end{matrix} \right\| . \tag{9.26}$$

Slično tome, neka $\mathfrak{s}$ bude pravac zvezde u odnosu na ose definisane sa ekvatorom i ekvinokcijem u trenutku t. Tada je

$$\mathfrak{s} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{matrix} \right\| . \tag{9.27}$$

Sada se jednačina za transformaciju (9.21) može izraziti preko komponenata ova dva vektora. Treća jednačina (9.21) je najednostavnija i razvoj na desnoj strani funkcije $\cos(\alpha_0 + \zeta_A)$ direktno daje

$$z = \cos\zeta_A \sin\theta_A x_0 - \sin\zeta_A \sin\theta_A y_0 + \cos\theta_A z_0 . \tag{9.28}$$

Za dobijanje izraza za x i y neophodno je kombinovati prve dve jednačine sistema (9.21), pa imamo

$$x = \cos\delta\cos(\alpha - z_A)\cos z_A - \cos\delta\sin(\alpha - z_A)\sin z_A ,$$

i

$$y = \cos\delta\cos(\alpha - z_A)\sin z_A + \cos\delta\sin(\alpha - z_A)\cos z_A .$$

Tada, uvodeći smenu iz (9.21) i pronalazeći neophodnu formu, dobićemo dva rezultata

$$\begin{aligned} x &= (\cos\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A - \sin\zeta_A \sin z_A)x_0 \\ &\quad - (\cos\zeta_A \sin z_A + \sin\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A)y_0 - \cos z_A \sin\theta_A z_0 , \\ y &= (\sin\zeta_A \cos z_A + \cos\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A)x_0 \\ &\quad + (\cos\zeta_A \cos z_A - \sin\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A)y_0 - \sin z_A \sin\theta_A z_0 . \end{aligned} \tag{9.29}$$

Neki koeficijenti u (9.29) imaju izgled kosinusnog obrasca, što i jesu. Koeficijenti uz x_0, y_0, z_0 u jednačinama (9.28) i (9.29) su kosinusi pravaca novih osa u

odnosu na stare. Tako su dobijeni rezultati jedva nešto poboljšani u odnosu na (9.21). Oni se mogu jednostavno napisati u matričnom obliku i, što je važnije, pogodni su za računanje.

Ako umesto koordinata (x, y, z) stavimo (x_1, x_2, x_3) i korišćenjem već pomenutih oznaka, rezultati (9.28) i (9.29) mogu se napisati kao

$$x_i = P_{ij} x_{0j}. \tag{9.30}$$

Ovde su P_{ij} elementi matrice, odnosno koeficijenti koji se pojavljuju u (9.28) i (9.29). Oni glase

$$\left.\begin{aligned}
P_{11} &= -\sin\zeta_A \sin z_A + \cos\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A \\
P_{12} &= -\cos\zeta_A \sin z_A - \sin\zeta_A \cos z_A \cos\theta_A \\
P_{13} &= -\cos z_A \sin\theta_A \\
P_{21} &= \sin\zeta_A \cos z_A + \cos\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A \\
P_{22} &= \cos\zeta_A \cos z_A - \sin\zeta_A \sin z_A \cos\theta_A \\
P_{23} &= -\sin z_A \sin\theta_A \\
P_{31} &= \cos\zeta_A \sin\theta_A \\
P_{32} &= -\sin\zeta_A \sin\theta_A \\
P_{33} &= \cos\theta_A.
\end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

Napisaćemo jednačinu za transformisanje (9.30) u formalnom matričnom zapisu kao

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{P}\mathfrak{s}_0. \tag{9.32}$$

※ Matrica $\mathfrak{P}$ se naziva *matrica rotacije*. Razmatrajući dijagram na sl. 9.5, vidimo da se transformisane koordinate mogu rastaviti kao proizvod tri rotacije: (i) rotaciju za ugao $-\zeta_A$ oko početne z-ose (P_0); (ii) rotaciju za ugao θ_A oko rezultujuće y-ose, i (iii) poslednju rotaciju za ugao $-z_A$ oko rezultujuće z-ose (P).

Pošto su sva tri precesiona parametra ζ_A, z_A i θ_A mali uglovi, elementi matrice rotacije su uglavnom male veličine. Izuzetak su tri dijagonalna elementa koji su bliski jedinici. Može se očekivati da, ako vremenski interval $(t - t_0)$ teži nuli, matrica rotacije teži jediničnoj matrici; transformacija postaje identitet.

Neposredno, iz jednačine (9.32) sledi povratna transformacija sa epohe t na epohu t_0, koja glasi

$$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{s} \tag{9.33}$$

Međutim, inverzna matrica nije neophodna. Inverzna transformacija se dobija zamenom ζ_A, z_A i θ_A sa $-z_A$, $-\zeta_A$ i $-\theta_A$, redom. Kada se ove izmene uvedu u (9.31), nalazimo da je inverzna matrica matrici $\mathfrak{P}$, njena transponovana matrica. Odnosno

$$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{P}^{\mathrm{T}}\mathfrak{s} \tag{9.34}$$

Matrica rotacije je vrlo pogodna za korišćenje. Normalno, njene elemente ne treba računati, jer su njihove dnevne vrednosti utabličene u *Astronomical Almanacu*. Tablični elementi se neznatno razlikuju od gore definisanih P_{ij}, pošto su uključeni i nutacioni efekti. Neophodna modifikacija biće data u §9.9.

§ 9.7. Približne formule. Stroge formule, koje su izvedene u dva prethodna paragrafa, mnogo su više razrađene nego formule prvog reda prikazane u §9.4. Iako je matrična formulacija jednostavna, njena primena povlači sa sobom veliki račun, dok formule prvog reda daju promene koordinata mnogo neposrednije. Međutim, formule prvog reda postaju nedovoljno tačne ako se koriste za vremenske intervale mnogo duže od jedne godine. Njihovu preciznost moguće je poboljšati zadržavanjem njihovog početnog oblika. Obračunavanjem promena u iznosu godišnje precesije u izabranom intervalu vremena, one se mogu pretvoriti u slične formule koje su tačne do drugog reda. Nasuprot tome, tako zvane stroge formule mogu se isto tako poboljšati povećanjem preciznosti izraza za tri ugla ζ_A, z_A i θ_A. Zato su, pri takvoj primeni, stroge formule, bilo da se koriste u matričnom obliku ili ne, tačne do trećeg reda u izabranom intervalu vremena.

Formule koje ćemo modifikovati date su jednačinama (9.13), (9.15), (9.19) i (9.20). Modifikovani oblici su primenljivi za duže vremenske intervale τ, odnosno za veliki broj godina, gde je $\tau = t - t_0$, kao i ranije t je neka epoha, dok je t_0 standardna epoha. Modifikacija sadrži zamenu vrednosti precesionih parametara koji odgovaraju sredini intervala τ. Slično tome, kada je pogodno, koordinate zvezda se procenjuju za taj trenutak. Korišćenjem indeksa m obeležićemo vrednosti koje odgovaraju trenutku vremena $\frac{1}{2}(t_0+t)$. Tada su novi parametri definisani na sledeći način:

$$\left.\begin{aligned} M &= m_m(t-t_0) \\ N &= n_m(t-t_0) \\ a &= p_m(t-t_0) \\ b &= \pi_m(t-t_0) \\ c &= 180^\circ - \Pi_m + \tfrac{1}{2}a \\ c' &= 180^\circ - \Pi_m - \tfrac{1}{2}a. \end{aligned}\right\} \quad (9.35)$$

Navešćemo formule koje daju koordinate zvezda, ili putanjske elemente planeta, za trenutak t, preko koordinata za fundamentalnu epohu:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + M + N\sin\alpha_m \operatorname{tg}\delta_m \\ \delta &= \delta_0 + N\cos\alpha_m \\ \lambda &= \lambda_0 + a - b\operatorname{tg}\beta_0\cos(\lambda_0 + c) \\ \beta &= \beta_0 + b\sin(\lambda_0 + c) \\ i &= i_0 + b\cos(\Omega_0 + c) \\ \Omega &= \Omega_0 + a - b\operatorname{ctg} i_0 \sin(\Omega_0 + c) \\ \omega &= \omega_0 + b\csc i_0 \sin(\Omega_0 + c). \end{aligned}\right\} \quad (9.36)$$

Nećemo posebno izvoditi svaku ovu formulu, ali ćemo, primera radi, razmatrati formule za ekliptičke koordinate (λ, β). Sa tačnošću jednačina (9.15), iz njih sledi da je

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= p_m\tau + \pi_m\tau\operatorname{tg}\beta_m\cos(\Pi_m - \lambda_m), \\ \beta - \beta_0 &= \pi_m\tau\sin(\Pi_m - \lambda_m). \end{aligned}$$

Pošto je iznos rotacije ekliptike π samo oko jedan stoti deo od iznosa opšte precesije p, ili od iznosa Π, njihov doprinos u λ_m u trigonometrijskim funkcijama na desnoj strani jednačina može se zanemariti. Prema tome, dovoljno je zameniti $\operatorname{tg}\beta_m$ sa $\operatorname{tg}\beta_0$ i λ_m sa $\lambda_0 + \frac{1}{2}p_m\tau$ $(= \lambda_0 + \frac{1}{2}a)$. Koristeći definicije (9.35), dobijaju se dva relevantna rezultata u (9.36). Formule date u *Astronomical Almanacu* neznatno se razlikuju od ovih ovde, ali su iste tačnosti.

Da bi izveli ekvatorske koordinate (α, δ), neophodno je zameniti vrednosti za (α_m, δ_m) zbirom s početnim vrednostima rektascenzije i deklinacije. Smenjujući pažljivo, jedna od mogućnosti je

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha_0 + \frac{1}{2}(M + N \sin\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0) \\ \delta_m &= \delta_0 + \frac{1}{2}N\cos\alpha_m . \end{aligned}\right\} \quad (9.37)$$

Jednom bi se iteracijom ovo poboljšalo, ali se, obično, ne isplati.

Vrednosti parametara definisanih jednačinama (9.35) mogu se izračunati iz godišnjih iznosa precesije, već datih u §§9.2–9.4. Oni se mogu izračunati kao stepeni redovi vremenskog intervala od kojih su značajna samo prva dva člana. Ako se za fundamentalnu epohu uzme J2000,0, dobiće se sledeći numerički rezultati

$$\left.\begin{aligned} M &= 1^\circ{,}281\,232T + 0^\circ{,}000\,388T^2 \\ N &= 0^\circ{,}556\,753T - 0^\circ{,}000\,119T^2 \\ a &= 1^\circ{,}396\,971T + 0^\circ{,}000\,309T^2 \\ b &= 0^\circ{,}013\,056T - 0^\circ{,}000\,010T^2 \\ c &= 5^\circ{,}1236 + 0^\circ{,}2416T \\ c' &= 5^\circ{,}1236 - 1^\circ{,}1553T. \end{aligned}\right\} \quad (9.38)$$

U ovim jednačinama T je vremenski interval od J2000,0 izražen u julijanskim stolećima.

Korišćenjem ovih numeričkih izraza, jednačine (9.36) predstavljaju jednačine za transformisanje ekvatorskih koordinata, ekliptičkih koordinata i putanjskih elemenata sa standardnog ekvinokcija J2000,0 na ekvinokcij u ma kom trenutku t, što je često ekvinokcij datuma. Međutim, često je potrebna obrnuta transformacija, s namenom da se standardizuju posmatranja. Formule (9.36) moraju se tada invertovati.

Mala vrednost za b dozvoljava da se β i β_0, i i i_0, koriste nepromenjeni kao argumenti trigonometrijskih funkcija na desnoj strani (9.36). Međutim, pošto je $\lambda \simeq \lambda_0 + a$, vidi se da je prilagodljivo

$$\lambda_0 + c \simeq \lambda + c'$$

i

$$\Omega_0 + c \simeq \Omega + c',$$

po istom rezonu. Ovo je opravdano ako su u b članovi drugog reda zanemareni. Međutim, jednačine (9.36) mogu biti napisane u obliku pogodnom za svođenje na standardni ekvinokcij kao

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha - M - N \sin\alpha_m \operatorname{tg}\delta_m \\
\delta_0 &= \delta - N\cos\alpha_m \\
\lambda_0 &= \lambda - a + b\operatorname{tg}\beta\cos(\lambda + c') \\
\beta_0 &= \beta - b\sin(\lambda + c') \\
i_0 &= i - b\cos(\Omega + c') \\
\Omega_0 &= \Omega - a + b\operatorname{ctg} i\sin(\Omega + c') \\
\omega_0 &= \omega - b\csc i\sin(\Omega + c').
\end{aligned}\right\} \tag{9.39}$$

Sa dovoljnom tačnošću, vrednosti (α_m, δ_m) za sredinu intervala date su sa

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \alpha - \frac{1}{2}(M + N\sin\alpha\operatorname{tg}\delta) \\
\delta_m &= \delta - \frac{1}{2}N\cos\alpha_m.
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Približne formule, razmatrane u ovom paragrafu, mogu dati iznos precesije s tačnošću jedne lučne sekunde na intervalu od 50 godina

§ 9.8. Nutacija.

Kretanje pravog pola po nebeskoj sferi je vrlo složeno, pa je izvršeno neprirodno razdvajanje ovog kretanja na luni-solarnu precesiju i nutaciju. Nutacija je kasnije definisana kao periodično kretanje pravog pola oko njegovog srednjeg položaja.

Dinamička teorija precesije i nutacije je veoma složena i daleko je izvan okvira ove knjige. Sledeći komentari, nadamo se, dosta će ilustrovati neke osnovne principe koji su uključeni. Prvo, razmotrimo torziono privlačenje koje na Zemlju vrši Sunce, čije su koordinate rektascenzija i deklinacija označene sa $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$. Veličina ove torzije, računata za jednostavni model čvrste Zemlje proporcionalna je $\sin 2\delta_\odot$. Međutim, torzije nestaju kada se Sunce nalazi u ekvinokcijima. To možemo predstaviti vektorom $\mathfrak{K}$ koji će, zbog uzimanja u obzir simetrije, biti normalan i na liniju Zemlja-Sunce i na Zemljinu osu simetrije, tj. polarnu osu. U stvari, ovaj vektor leži u ravni ekvatora i to u pravcu rektascenzije $\alpha_\odot - 90°$. Na osnovu gore pomenutog, spreg se može napisati preko ekvatorskih pravouglih koordinata kao

$$\mathfrak{K} = K_0 \sin 2\delta_\odot \left[\cos(\alpha_\odot - 90°), \sin(\alpha_\odot - 90°), 0\right],$$

gde je K_0 konstanta, pa je

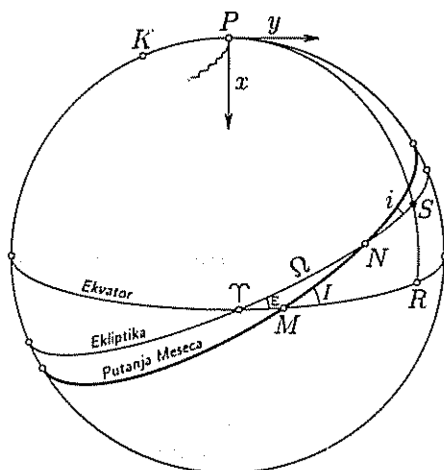
$$\mathfrak{K} = 2K_0 \sin\delta_\odot (\sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot, -\cos\alpha_\odot\cos\delta_\odot, 0). \tag{9.41}$$

Uticaj različitih članova u (9.41) postaće očigledan ako $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ zamenimo Sunčevom longitudom. Na sl. 9.6 prikazani su ekvator, ekliptika i ravan Mesečeve putanje, pri čemu je N uzlazni čvor Mesečeve putanje na ekliptici, a M uzlazni čvor na ekvatoru. Kao što je označeno u §7.5, biće $\Upsilon NM = i$, $\Upsilon N = \Omega$. Neka je sada S položaj Sunca. Ako zanemarimo ekscentričnost Zemljine putanje, tada je $\Upsilon S = L$, Sunčeva srednja longituda. Dalje je, $N\Upsilon M = \varepsilon$. Pošto je Sunčeva ekliptička longituda jednaka nuli, standardnom transformacijom pomoću jednačina (2.19) imamo

$$\begin{aligned} \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \cos L \\ \sin\delta_\odot &= \sin L \sin\varepsilon \\ \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \sin L \cos\varepsilon. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Smenjujući ovo u (9.41) dobijamo

$$\mathfrak{K} = K_0 \sin\varepsilon\big[\cos\varepsilon(1-\cos 2L), -\sin 2L, 0\big]. \tag{9.43}$$



Слика 9.6

Vektor Zemljinog ugaonog momenta je u pravcu tačke P. Torzija je normalna na ovaj pravac i ne može uticati na veličinu Zemljinog ugaonog momenta, već samo na njegov pravac, koji je srednji položaj same tačke P.

Da bi pratili pomeranje tačke P, neophodno je vezati koordinatni sistem za poseban pol. Neka je $\mathfrak{s} = (x, y, z)$ vektor položaja nebeskog pola u odnosu na ekvatorske ose koje se odnose na srednji pol i ekvinokcij početne epohe kada je $L = 0$. Tada su komponente vektora $\mathfrak{K}$ proporcionalne $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t, 0)$. Integraleći (9.43), sledeći položaj pola može da se izrazi kao

$$\begin{aligned} x\csc\varepsilon &= \psi_1\left[t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\sin 2L\right], \\ y &= \frac{1}{2}\psi_1\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\operatorname{tg}\varepsilon\cos 2L, \\ z &= 1, \end{aligned} \tag{9.44}$$

gde je ψ_1 konstanta koja zavisi od veličine ugaonog momenta, srednjeg torzionog privlačenja Sunca i nagiba ekliptike.

Sada je $x\csc\varepsilon$ promena u longitudi nebeskog pola, dok je y promena u nagibu ekliptike. Prepoznajemo član ψ_1 kao uticaj Sunca (oko jedne trećine) u luni-solarnoj precesiji. Pored ovoga, ustanovljeno je da postoje dva nutaciona člana, jedan u longitudi i jedan u nagibu, i oba imaju periode od šest meseci. Ako je t izraženo u godinama, tada je $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 2\pi$ i jednačina (9.44) povezuje amplitude nutacionih članova sa brzinom solarne precesije.

Osim toga, pojavljuju se čisto solarni članovi kada se uzme u obzir godišnja promena Zemljinog rastojanja od Sunca. U prvom redu, ako posmatramo ekscentričnost Zemljine putanje, pojaviće se zajedno sa precesionim članom i nutacioni članovi s periodima od jedne godine. Pored toga, ovi članovi, sa već ustanovljenim nutacionim članovima, daju dva nova nutaciona člana s periodom od jedne godine i s periodom od četiri meseca. Treba, takođe, uključiti i nekoliko Sunčevih nutacionih članova višeg reda.

Dok se direktni uticaji solarne precesije i nutacije mogu prilično lako razdvojiti, kao što je već izneto, lunarni doprinos je mnogo komplikovaniji. Diskusija §7.5 opisala je složenost Mesečeve putanje i njoj odgovarajuću složenost nutacionih efekata. Ovde ćemo pokušati da izvedemo samo glavne nutacione efekte.

Koristeći iste argumente koji su bili primenjeni za Sunce, analiza se može napraviti i za elemente srednje Mesečeve putanje, zanemarivanjem njene ekscentričnosti. Torziono privlačenje Meseca na Zemlju je tada oblika

$$\mathfrak{K}' = K_0' \sin I\left[\cos I(1 - \cos 2L'), -\sin 2L', 0\right], \tag{9.45}$$

gde je, na sl. 9.6, sa I $(= S\hat{M}R)$ označen ugao nagiba putanje prema ekvatoru, a L' je Mesečevo ugaono rastojanje od tačke M. Napomenimo da koordinatni sistem (x', y', z'), koji je korišćen u jednačini (9.45), nije standardni ekvatorski koordinatni sistem. To je ekvatorski sistem sa z'-osom usmerenom ka tački P, ali osa x' je usmerena ka tački M, umesto ka Υ. U jednačini (9.45) otkrivamo kvazi-precesioni član, kao i nutacione članove koji imaju period oko 14 dana (pola meseca). Ovi nutacioni članovi nisu veliki kao što bi se na prvi pogled moglo i očekivati. U stvari, oni su manji od glavnih solarnih članova. Mada je lunarna torzija veća ($K_0' \simeq 2K_0$), faktor $(\mathrm{d}L'/\mathrm{d}t)^{-1}$ koji se pojavljuje pri integraljenju je oko 12 puta manji nego njegov solarni ekvivalent—jednačina (9.44). Glavni nutacioni članovi su sadržani tamo gde su bili opisani kao kvazi-precesioni član, te se ovo mora detaljnije proučiti.

Čvor N, koji je presečna tačka srednje Mesečeve putanje sa ekliptikom, opiše krug za 18,6 godina. Zato pravac x'-ose, odnosno tačka M, osciluje u ovom periodu oko ekvinokcija, a nagib I osciluje oko svoje srednje vrednosti ε. Pošto je nagib i Mesečeve srednje putanje prema ekliptici mali, stepen ovih oscilacija biće takođe mali. Ipak, kvazi-precesioni član torzije sadrži male varijacije i u svojoj veličini i u svom pravcu. U odnosu na standardne pravougle ekvatorske ose, to je

$$\mathfrak{K}_P = \frac{1}{2} K_0' \sin 2I(\cos \Upsilon M, \sin \Upsilon M, 0). \tag{9.46}$$

Neka je procena ove korekcije za i prvog reda. Primenom sinusnog obrasca na sferni trougao ΥMN imamo

$$\sin \Upsilon M \sin I = \sin \Omega \sin i.$$

Pa je, s dovoljnom tačnošću,

$$\sin \Upsilon M = i \sin \Omega \csc \varepsilon, \tag{9.47}$$

i, naravno, $\cos \Upsilon M \approx 1$. Dalje, primenom četvoroelementnog obrasca imamo

$$\cos \Upsilon M \cos \varepsilon = \sin \Upsilon M \operatorname{ctg} \Omega + \sin \varepsilon \operatorname{ctg} I.$$

Koristeći već dobijen rezultat, ovo može biti napisano kao

$$\sin(I - \varepsilon) \approx \sin i \cos \Omega,$$

gde je s tačnošću prvog reda

$$I = \varepsilon + i \cos \Omega. \tag{9.48}$$

Ovi rezultati za ΥM i I mogu se sada uvrstiti u (9.46) i posle malih pojednostavljenja, nalazimo da je

$$\mathfrak{K}_P = K_0'(\sin \varepsilon \cos \varepsilon + i \cos \Omega \cos 2\varepsilon, i \cos \varepsilon \sin \Omega, 0). \tag{9.49}$$

Prelazimo sada na integraljenje i izvođenje pomeranja pola u odnosu na njegov početni položaj, kada je $\Omega = 0$, kao

$$\begin{aligned} x \csc \varepsilon &= \psi_1' \left[t + 2i \operatorname{ctg} 2\varepsilon \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^{-1} \sin \Omega \right] \\ y &= -\psi_1' i \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^{-1} \cos \Omega . \end{aligned} \tag{9 50}$$

Ovde je ψ_1' konstanta odabrana tako da predstavlja precesioni član u longitudi. U (9.50) mogu se identifikovati članovi precesije u longitudi i članovi nutacije u longitudi i nagibu sa periodima od 18,6 godina. U stvari, nalaze se najveći nutacioni članovi koji su preko deset puta veći od šestomesečnih solarnih članova koji su prvi sledeći po značaju.

Gornji argument pokazuje kako nastaju luni-solarna precesija i najvažniji nutacioni članovi. Do skoro je teorija nutacije, radi jednostavnog korišćenja, bila bazirana na modelu čvrste Zemlje. Odnos između amplituda precesionih i nutacionih članova u (9.44) i (9.50) saglasan je sa teorijom. Nova teorija nutacije postavljena je 1980. i usvojena od IAU (1982). Ova teorija je zasnovana na realnijem modelu, to nije model čvrste Zemlje i čak nije osno simetričan. Teorija nutacije iz 1980. sadrži po 106 članova i u longitudi i u nagibu, mada su neki poslednji zanemareni.

Pomeranje pravog nebeskog pola u odnosu na srednji pol u longitudi označeno je sa $\Delta\psi$, a u nagibu sa $\Delta\varepsilon$. Ovo se, redom, naziva *nutacija u longitudi* i *nutacija u nagibu*, a po našim ranijim oznakama njima odgovaraju $x \csc \varepsilon$ i y. Teorija nutacije omogućava razvoj u red za $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$ u obliku

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum a_{ijklm} \sin(iM' + jM + kF + lD + m\Omega) \\ \Delta\varepsilon &= \sum b_{ijklm} \cos(iM' + jM + kF + lD + m\Omega) \end{aligned} \tag{9.51}$$

gde i, j, k, l i m uzimaju celobrojne vrednosti. Veličine M', M, F i D bile su uvedene u §7.5 pri razmatranju Mesečeve putanje. One su, redom, srednja anomalija Meseca, srednja anomalija Sunca, srednji argument Meseca od čvora i srednja elongacija Meseca od Sunca. Sve se ravnomerno menjaju sa vremenom, kao što se menja i srednja longituda čvora. U teoriji nutacije iz 1980. glavni pomenuti članovi u ovom paragrafu su sledeći

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17'',1996 \sin \Omega - 1'',3187 \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0'',2274 \sin(2F - 2\Omega) \\ \Delta\varepsilon &= 9'',2025 \cos \Omega + 0'',5736 \cos(2F - 2D + 2\Omega) + 0'',0927 \cos(2F - 2\Omega). \end{aligned} \tag{9.52}$$

Koeficijent glavnog člana nutacije u nagibu često se navodi kao *konstanta nutacije*. Koeficijenti u dva razvoja imali su sekularne promene, ali one su značajne samo za oko 15 od 106 članova. Brojni koeficijenti u (9.52) odgovaraju epohi J2000,0.

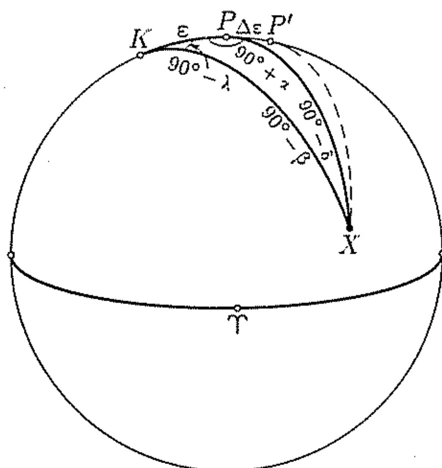
Nekada je pogodno razdvojiti „dugoperiodične" od „kratkoperiodičnih" članova. Pod dugoperiodičnim članovima podrazumevaju se oni koji ne zavise od srednje Mesečeve longitude. U stvari, postoji jasna podela u periodima; dugoperiodični članovi imaju periode preko 90 dana, dok nekratkoperiodični član ima period veći od 35 dana. Kratkoperiodični članovi su posebno sumirani i označeni sa $d\psi$ i $d\varepsilon$.

Na primer, u *The Apparent Places of the Fundamental Stars*, rektascenzija i deklinacija su date na desetodnevnim intervalima. Ovo je naravno dug interval da bi interpolacija imala smisla za kratkoperiodične nutacione efekte, koji su isključeni, tako da se primenjuju nutacione popravke $\Delta\psi - d\psi$ i $\Delta\varepsilon - d\varepsilon$. Kompletne nutacione promene $(\Delta\psi, \Delta\varepsilon)$ utabličene su na dnevnim intervalima u *Astronomical Almanacu*.

§ 9.9. Uticaj nutacije na koordinate zvezda.

Nutacija u longitudi je jednostavno periodični dodatak luni-solarnoj precesiji. Kao rezultat toga, prava ekliptička longituda zvezde razlikuje se od njene srednje longitude za $\Delta\psi$. Ekliptička latituda je nepromenjena. Uticaj $\Delta\psi$ na ekvatorske koordinate zvezde može da se izvede neposredno iz jednačina (9.3) i (9.4) koje daju odgovarajuće promene za luni-solarnu precesiju. Sledstveno tome

$$\begin{aligned} d\alpha &= \Delta\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \operatorname{tg}\delta) \\ d\delta &= \Delta\psi \sin\varepsilon \cos\alpha. \end{aligned} \tag{9.53}$$



Слика 9.7

Razmotrimo promene koordinata usled nutacije u nagibu. Na sl. 9.7, P predstavlja srednji pol, a P' njegov pomereni položaj za $\Delta\varepsilon$. Posmatrajmo standardni sferni trougao KPX koji obrazuju ekliptički pol, nebeskoi pol i zvezda. Delovi ovog trougla su određeni na slici sa oznakama ekliptičkih koordinata zvezde (λ, β) i njenih ekvatorskih koordinata (α, δ). Pomeranje pola iz P u P' ne utiče ni na stranu KX ni na ugao PKX, tako da su ekliptičke koordinate nepromenjene. Promena ε uticaće i na α i na δ.

Primena kosinusnog obrasca na trougao PKX daje

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda, \tag{9.54}$$

a pošto se λ i β ne menjaju, diferencirajući ovu jednačinu imaćemo

$$\cos\delta\, d\delta = (-\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda)\Delta\varepsilon.$$

Zagrada na desnoj strani može se pojednostaviti sinusno-kosinusnim obrascem, koji daje

$$-\cos\delta\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \tag{9.55}$$

odakle je

$$d\delta = \Delta\varepsilon\sin\alpha.$$

Sada sinusni obrazac daje dobro poznati rezultat

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta. \tag{9.56}$$

Njegovim diferenciranjem dobijamo

$$\sin\alpha\cos\delta\, d\alpha + \cos\alpha\sin\delta\, d\delta = 0.$$

Smenjujući dδ dobijamo priraštaj u rektascenziji, pa su konačni rezultati

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\Delta\varepsilon \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \\ d\delta &= \Delta\varepsilon \sin\alpha. \end{aligned} \tag{9.57}$$

Formule prvog reda, jednačine (9.53) i (9.57), dovoljno su tačne u gotovo svim slučajevima, pošto su obe nutacije mali uglovi. Uticaj ukupne nutacije na koordinate dobija se sabiranjem dveju jednačina. Međutim, često je pogodnije izraziti rezultate u pravouglim koordinatama.

Neka $s = (x, y, z)$ bude jedinični vektor koji definiše položaj zvezde u odnosu na postavljene Dekartove ose određene srednjim polom i srednjim ekvinokcijem. Komponente ovog vektora date su jednačinom (9.27). Osim toga, s' biće isti jedinični vektor u odnosu na trenutni ekvator i trenutni ekvinokcij. Sada je

$$s' - s = ds = (dx, dy, dz). \tag{9.58}$$

Pa je, na osnovu diferencijalnog oblika (9.27),

$$s' - s = d\alpha \begin{Vmatrix} -\sin\alpha\cos\delta \\ \cos\alpha\cos\delta \\ 0 \end{Vmatrix} + d\delta \begin{Vmatrix} -\cos\alpha\sin\delta \\ -\sin\alpha\sin\delta \\ \cos\delta \end{Vmatrix}. \tag{9.59}$$

Priraštaji $(d\alpha, d\delta)$ dobijeni su zajedničkim sabiranjem priraštaja datih u (9.53) i (9.57). Posle malog svođenja, dobijaju se rezultati u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} dx &= -(y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon)\Delta\psi \\ dy &= x\cos\varepsilon\,\Delta\psi - z\,\Delta\varepsilon \\ dz &= x\sin\varepsilon\,\Delta\psi + y\,\Delta\varepsilon. \end{aligned} \tag{9.60}$$

Ovaj, poslednji, rezultat može se izraziti u matričnom obliku kao

$$s' = \mathfrak{N} s, \tag{9.61}$$

gde je $\mathfrak{N}$ *matrica rotacije* za nutaciju, data sa

$$\mathfrak{N} = \begin{Vmatrix} 1 & -\Delta\psi\cos\varepsilon & -\Delta\psi\sin\varepsilon \\ \Delta\psi\cos\varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi\sin\varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{Vmatrix}. \tag{9.62}$$

Ovakva formulacija nutacije dopušta njeno kombinovanje sa precesijom na jednostavan način. Neka s_0 bude vektor položaja zvezde na nebeskoj sferi u odnosu na ekvator i ekvinokcij standardne epohe. Tada je, kao što je pokazano u §9.6, $s = \mathfrak{P} s_0$, gde je $\mathfrak{P}$ matrica rotacije za precesiju, pa se prave pravougle koordinate zvezde mogu izvesti iz matrične jednačine

$$s' = \mathfrak{N} s = (\mathfrak{N}\mathfrak{P}) s_0 = \mathfrak{R} s_0. \tag{9.63}$$

Matrica rotacije $\mathfrak{R}$ ($\equiv \mathfrak{N}\mathfrak{P}$) uzima u obzir i precesiju i nutaciju, pa su istovremeno potrebne dve popravke. Elementi matrice rotacije $\mathfrak{R}$ dati su na dnevnim intervalima u *Astronomical Almanacu*, tako da se elementi matrice, kada su potrebni precizni podaci, mogu dobiti jednostavnom interpolacijom.

Odgovarajući metod određivanja popravki za precesiju i nutaciju razmatran je u glavi 12. On koristi Beselove dnevne brojeve i omogućuje, u isto vreme, određi-

vanje popravki za paralaksu i aberaciju. Ovakav metod je račun prvog reda i popravke za precesiju određuju se samo na kratkom vremenskom intervalu. Važno je što metod koristiti sredinu godine kao referentnu epohu umesto standardne epohe.

Nasuprot tome, korišćenje matrice rotacije je striktno, barem kad se radi o precesiji. Međutim, nutaciona matrica data u (9.62) samo je popravka prvog reda za $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$. Da bi ovo potvrdili, napomenimo da vrste i kolone u (9.62) nisu tačno jedinični vektori. Greške, koje korišćenje ovakvog oblika matrice rotacije povlači sa sobom, su verovatno oko $0'',001$, što je za mnoge rezultate prihvatljivo. Međutim, ako je potreban tačan oblik nutacione matrice rotacije, on se može izvesti rešavanjem problema u ekliptičkim koordinatama.

Prelazak sa srednjeg pola na pravi pol povlači sa sobom (i) priraštaj longitude zvezde za $\Delta\psi$, i (ii) priraštaj u nagibu ekliptike za $\Delta\varepsilon$. Jednačine (9.54), (9.55) i (9.56) sada daju veze između ekliptičkih koordinata i pravouglih ekvatorskih koordinata z, $-y$ i x, redom. Sledi da će koordinate s' date u strogoj formi biti

$$\begin{aligned} x' &= \cos\beta\cos(\lambda+\Delta\psi) \\ y' &= -\sin\beta\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)+\cos\beta\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin(\lambda+\Delta\psi) \\ z' &= \sin\beta\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)+\cos\beta\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin(\lambda+\Delta\psi). \end{aligned} \tag{9.64}$$

Razvijmo sada funkcije $\cos(\lambda+\Delta\psi)$ i $\sin(\lambda+\Delta\psi)$ na desnoj strani ovih jednačina i uvedimo one pravougle koordinate (x, y, z), koje se pojavljuju. Rezultati su

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos\Delta\psi\, x - \cos\varepsilon\sin\Delta\psi\, y - \sin\varepsilon\sin\Delta\psi\, z \\ y' &= \cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin\Delta\psi\, x \\ &\quad + \left[\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\Delta\psi+\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\right]y \\ &\quad + \left[\sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\Delta\psi-\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\right]z \\ z' &= \sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin\Delta\psi\, x \\ &\quad + \left[\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\Delta\psi-\sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon\right]y \\ &\quad + \left[\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\Delta\psi+\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\right]z. \end{aligned}\right\} \tag{9.65}$$

Ovim su elementi matrice rotacije N određeni.

Zadaci

9.1. Zvezda s koordinatama (α, δ) nalazi se na ekliptici i ima longitudu λ. Pokazati da su promene, usled luni-solarne precesije u rektascenziji, deklinaciji i longitudi, za kratak vremenski interval, date relacijom

$$\cos^2\delta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\Delta\alpha = \mathrm{ctg}\,\delta\,\Delta\delta = \mathrm{ctg}\,\lambda\,\Delta\lambda.$$

9.2. Za epohu J1984,0, zvezda Severnjača ima rektascenziju $2^h15^m54^s,6$ i deklinaciju $89°11'39''$. Koristeći formule prvog reda (9.13) izračunati njene koordinate za J1985,0.

9.3. Za prelazak sa standardne epohe J2000,0 na epohu J1985,0, izračunati tri precesiona ugla ζ_A, z_A i θ_A.

9.4. Pokazati da je za kratak vremenski interval τ

$$m\tau = \zeta_A + z_A$$
$$n\tau = \theta_A.$$

9.5. Pokazati da se zvezde, čije se deklinacije usled precesije ne menjaju u toku određenog perioda T od standardne epohe, nalaze na velikom krugu čiji su polovi tačke s koordinatama $\alpha = \zeta_A$, $\delta = -\frac{1}{2}\theta_A$ i $\alpha = 12^h + \zeta_A$, $\delta = \frac{1}{2}\theta_A$.

9.6. Zvezda Severnjača ima, za standardnu epohu J2000,0, koordinate ($2^h31^m46^s,3$, $89°15'50'',6$). Korišćenjem približnih formula iz §9.7 izračunati njene koordinate za epohu J1985,0. Uporediti dobijeni rezultat sa onim dobijenim u zadatku 9.2. Koji rezultat je tačniji?

9.7. Proverite vaš odgovor iz prethodnog zadatka korišćenjem strogih formula za izračunavanje rektascenzije i deklinacije zvezde Severnjače za epohu J1985,0.

9.8. Uporišna zvezda ima, za standardnu epohu, koordinate (α_0, δ_0). Najbliži objekt, meren t godina kasnije, pomeren je za $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ od uporišne zvezde. Pokazati da su njegove koordinate (α, δ) za standardnu epohu

$$\alpha = \alpha_0 + (1 - e \operatorname{tg}\delta_0)\,\Delta\alpha - f \operatorname{sc}^2\delta_0\,\Delta\delta$$
$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta + f\,\Delta\alpha,$$

gde je

$$e = -(nt + \Delta\psi\,\sin\varepsilon)\cos\alpha - \Delta\varepsilon\,\sin\alpha,$$
$$f = (nt + \Delta\psi\,\sin\varepsilon)\sin\alpha - \Delta\varepsilon\,\cos\alpha.$$

9.9. Pokazati da je konstanta nutacije približno povezana sa godišnjim iznosom luni-solarne precesije jednačinom

$$N = \frac{18{,}61mi}{2\pi(r^3 + m)},$$

gde je m masa Meseca u jedinicama mase Sunca i r radijus njegove putanje u AJ.

9.10. Koristeći koordinate date u zadatku 9.6, odrediti epohu kada je zvezda Severnjača najbliža severnom nebeskom polu. Izračunati njenu deklinaciju u tom trenutku.

9.11. Pokazati da su nedijagonalni elementi matrice rotacije za precesiju mali i da su dijagonalni elementi bliski jedinici. Posebno pokazati da je

$$P_{12} + P_{21} = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta_A\sin(\zeta_A - z_A)$$

i da je razlika između P_{12} i P_{21} veličina četvrtog reda.

ГЛАВА ДЕСЕТА

Vreme

§ 10.1. Astronomska i fizička koncepcija vremena.

Krajnja priroda vremena je duboko i neodređeno filozofsko pitanje, ali na sreću nije jedno od onih kojim je potrebno da se bavimo u jednom uvodnom tekstu položajne astronomije. Dovoljno je usvojiti da vreme može biti mereno i definisano periodičnim ponavljanjem događaja. To mogu biti jednostavni otkucaji sata, prolazi Sunca kroz posmatračev meridijan ili nešto suptilnije. Mada bi se neke vremenske skale, u globalnom kontekstu fizičke nauke, morale razmatrati detaljnije od drugih, morala bi se shvatiti i njihova nezavisnost pre bilo kakvog pokušaja pravljenja njihovog kompromisa i uspostavljanja povezanosti između njih. U astronomiji se koriti šest različitih vremenskih skala; one su:

(i) *Zvezdano vreme*
(ii) *Srednje vreme*
(iii) *Dinamičko vreme*
(iv) *Atomsko vreme*
(v) *Sopstveno vreme*
(vi) *Koordinatno vreme*.

U ovoj glavi su date formalne definicije navedenih vremenskih skala, njihovih varijanti i konvencijom usvojeno povezivanje svake sa svakom. Ipak, pre definisanja, važno je, radi razumevanja, naglasiti neke principe. Stoga je ovaj paragraf posvećen pravljenju nekih opštih uvodnih komentara za svaku od gore pomenutih vremenskih skala.

(i) Zvezdano vreme. Zvezdano vreme je časovni ugao ♈ tačke. Nezavisno od malog uticaja precesije, ono zavisi isključivo od Zemljine rotacije. Poznato je da brzina Zemljine rotacije, kada se uporedi sa drugim, fundamentalnijim vremenskim skalama, nije sasvim ravnomerna. Ta brzina sigurno sadrži kvazi-periodične nepravilnosti sekularnog usporenja, koje uzrokuju odgovarajuće neravnomernosti u zvezdanom vremenu. ❊

(ii) Srednje vreme. Pravo vreme je definisano časovnim uglom pravog Sunca. I ono je izloženo svim nepravilnostima, koje su razmatrane u §2.6, pa se zato uvodi sre- ❊

dnje vreme. Časovni ugao pravog Sunca zavisi od dve stvari: Zemljine rotacije i Sunčeve rektascenzije koja se menja sa Zemljinom revolucijom. Stoga sledi, da je srednje vreme, bez obzira na ukupne ali uklonjive nepravilnosti, hibrid zavisan od dva različita i nepovezana periodična fenomena, nazvana Zemljina dnevna rotacija i njena godišnja revolucija oko Sunca. Da bi se uklonila zabuna, u astronomiji se definiše srednje vreme na dva različita načina. Svetsko vreme (UT) je potpuno zavisno od Zemljine rotacije, dok je efemeridsko vreme dinamička skala vremena koja zavisi samo od Zemljine revolucije.

UT mora biti definisano preko Griničkog časovnog ugla (t_G) fiktivnog tela koje se naziva *srednje svetsko Sunce* (*Universal Mean Sun*—UMS). Da bi početak dana padao u prethodnu srednju ponoć, definicija je:

$$\mathrm{UT} = 12^{\mathrm{h}} + t_G. \tag{10.1}$$

Srednje svetsko Sunce se kreće po ekvatoru ravnomernom brzinom kao *u pomenutoj vremenskoj skali*. I zvezdano vreme i UT su zasnovani na Zemljinoj rotaciji. Mada su vremenske jedinice (sekunda, minuta, čas, dan) u dva sistema različite, one su povezane. Stoga, sledi da rektascenzija srednjeg svetskog Sunca ravnomerno raste sa zvezdanim vremenom. Postavimo sve prilično drugačije, ali, nadamo se, jasnije —ako bi zaustavili Zemljinu rotaciju, i zvezdano i svetsko vreme bili bi u mirnom stanju, a kretanje srednjeg svetskog Sunca po ekvatoru bilo bi, takođe, zaustavljeno, čak iako je rektascenzija pravog Sunca u stalnom porastu za Zemlju koja zadržava svoju revoluciju. U stvari, malo neslaganje između rektascenzije svetskog srednjeg Sunca i vrednosti koja bi se dobila iz srednjeg kretanja pravog Sunca je oko $2''$.

(iii) Dinamičko vreme. Dinamičko vreme označava nezavisnu promenljivu koja se pojavljuje u gravitacionim jednačinama kretanja. Stoga, srednje anomalije neporemećenih planetskih putanja, ravnomerno rastu u dinamičkom vremenu. U Njutnovoj fizici ova vremenska skala je prihvaćena kao apsolutna i u prošlosti je bila definisana Njutnovim izrazima sa *ad hoc* relativističkim popravkama, koje su uzimane kao Njutnovi poremećaji.

Efemeridsko vreme (ET) je dinamička skala vremena izražena preko efemeridskog Sunca. Ono može da se definiše časovnim uglom drugog fiktivnog tela koje se naziva *srednje efemeridsko Sunce* (*Ephemeris Mean Sun*—EMS). Ono se kreće po srednjem ekvatoru ravnomernom brzinom koja odgovara srednjem kretanju pravog Sunca. Međutim, jedino Grinički časovni ugao ovog tela ne može da se koristi za definisanje dinamičke vremenske skale, pošto, u odnosu na zvezde, pravac ovog meridijana zavisi od Zemljine rotacije. Stoga je definisan drugi standardni meridijan, *efemeridski meridijan*, koji bi se poklapao sa Griničkim meridijanom kada bi Zemljina rotacija bila potpuno ravnomerna. Zbog toga, efemeridski meridijan nije vezan za Zemljinu površinu već ima sporo pomeranje ka istoku. Časovni ugao koji karakteriše ovaj meridijan označen je kao *efemeridski časovni ugao* (t_E), a ET može da se definiše jednačinom sličnoj kao (10.1)

$$\mathrm{ET} = 12^{\mathrm{h}} + t_E. \tag{10.2}$$

ET je uvedeno 1960. kao argument koji je korišćen u efemeridama koje su publikovane u godišnjim almanasima. Razlika između UT i ET označena je sa ΔT, u smislu:

$$\Delta T = \mathrm{ET} - \mathrm{UT}. \tag{10.3}$$

Ovaj iznos nije unapred tačno poznat pošto zavisi od nepravilnosti u Zemljinoj rotaciji koje su nepredvidive. Ipak, dinamička teorija dopušta da heliocentrični položaji planeta budu unapred određeni za svako ET. Osim toga, koordinate geocentra mogle bi se odrediti na sličan način. Odatle se geocentrične koordinate mogu računati sa ET kao nezavisnim argumentom.

(iv) Atomsko vreme. Atomski časovnici obezbeđuju dosledno i najpreciznije merenje vremena. Međunarodno atomsko vreme (*International Atomic Time*—IAT) uvedeno je 1972., mada su atomske vremenske skale korišćene mnogo ranije. Zato je bilo moguće ekstrapolovati IAT unazad, čak do 1956. Osnovna jedinica IAT je SI sekunda, koja je definisana preko rezultujuće učestanosti zračenja pojedinačnih superfinih promena u atomu cezijuma.

Postoji konceptualna razlika između atomskog i dinamičkog vremena. Međutim, uzimajući da su konstante u prirodi apsolutne, ove dve skale treba da budu čvrsto vezane. Osim toga, definicije sekunde u IAT i u ET, iako formalno nezavisne, u stvari su numerički jednake, tako da se ne nalazi ništa drugo osim izjednačavanja dveju vremenskih skala. Razlika između dveju vremenskih skala postaje značajna ako bi se dogodilo, na primer, da gravitaciona konstanta G ima promenu u kosmološkoj vremenskoj skali. Ovo je sugerisano nekim neortodoksnim kosmologijama; dinamičko vreme bi tada teklo sporije od atomskog vremena.

U klasičnoj fizici, vreme je apsolutna veličina, a razlika između atomskog i dinamičkog vremena je samo stvar njihovih merenja i definisanja. Međutim, u opštoj relativnosti, razlika postaje bitna jer je prirodno razlikovati sopstveno od koordinatnog vremena.

(v) Sopstveno vreme. Zemljina svetska linija u opštoj relativnosti je geodezijska. Sopstveno vreme s duž ove geodezijske linije korišćeno je kao parametar krive u §6.9. To vreme koje bi merio posmatrač na svetskoj liniji je fizički smisao ovog parametra. To je vreme posmatrača vezanog za Zemlju. Sledstveno tome, vreme mereno na bilo kom časovniku na Zemlji biće sopstveno vreme. Posebno, atomsko vreme biće oblik sopstvenog vremena.

(vi) Koordinatno vreme. U §6.9 pokazano je da sopstveno vreme ima periodične varijacije u odnosu na koordinatno vreme t. Zaista, sopstveno vreme je algebarski najzgodnije za korišćenje pri rešavanju geodezijskih diferencijalnih jednačina, što znači da je korišćeno kao nezavisna dinamička promenljiva. Međutim, nepodesno je kao osnova za opštu dinamičku vremensku skalu, jer je kao posebna sopstvena vremenska skala definisano za svako nebesko telo. Samo je Zemljino sopstveno vreme to koje je merljivo, dok je koordinatno vreme očigledno drugačije od sopstvenog, jer se može primeniti uopšteno. Dok u opštoj relativnosti koordinatno vreme nije jedinstveno definisano, može da se napravi pojedinačan izbor. U statičkom sferno simetričnom Švarcšildovom prostor-vremenu, izbor je očigledan. To vreme je koordinatno da bi se koristilo u svim izrazima metrike navedene u glavama 3, 6 i 8.

Priznajući važnost relativističkih efekata, IAU je 1976. preporučila uvođenje dve nove vremenske skale umesto efemeridske skale ET. Ipak, IAU ne želi da opštu relativnost otvoreno potvrdi kao konačnu relativističku teoriju, pošto su druge

post-Njutnovske teorije gravitacije bile, i još uvek jesu, u procesu suštinskih proučavanja i testiranja. Stoga, sledi da samo jedna od ovih vremenskih skala može biti definisana na neprihvatljiv način.

❊ Jedna vremenska skala je *Zemljino dinamičko vreme* (*Terrestrial Dynamical Time*—TDT) uvedeno 1. januara 1977. Zasnovano je na SI sekundi, ali je njegova nulta tačka izabrana tako da je nastavak skale ET. Namenjeno je da se koristi kao vremenska skala za prividne geocentrične efemeride. Iako nije učinjena pretpostavka o teoriji gravitacije, unutar konteksta opšte gravitacije ova vremenska skala je sopstveno vreme na Zemlji i meri se atomskim časovnicima.

❊ Druga vremenska skala je *baricentrično dinamičko vreme* (*Barycentric Dynamical Time*—TDB). Namenjeno je za korišćenje kretanja planeta u jednačinama koje se odnose na baricentar Sunčevog sistema. Ova vremenska skala nije jednoznačno definisana i zavisi od prihvatanja posebne post-Njutnovske gravitacione teorije. U svakom slučaju, ograničenja koja se nameću skali TDB su zahtev da se od skale TDT razlikuje samo po periodičnim članovima. Ovo ograničenje može da se koristi u bilo kojoj gravitacionoj teoriji. U opštoj gravitaciji TDB će biti koordinatno vreme t, ranije spomenuto, sa podesnim izborom nulte tačke i skalnog faktora mere.

§ 10.2. Zvezdano i srednje vreme.

Već je data definicija zvezdanog vremena, koja je veoma jednostavna. Na primer, Griničko zvezdano vreme je dato kao Grinički časovni ugao ♈ tačke

$$S = t_G(\Upsilon). \qquad (10.4)$$

U jednačini (10.4) ♈ se uvek odnosi na ekvinokcij datuma, ali nutacija može i ne mora biti uključena. Ako se u ovu jednačinu stavi pravi ekvinokcij (prava ♈ tačka), onda se zvezdano vreme naziva *pravo zvezdano vreme*. Ako je, pak, ♈ srednji ekvinokcij, jednačina (10.4) daje *srednje zvezdano vreme*.

❊ Razlika između dva zvezdana vremena određena je *jednačinom ekvinokcija*. Lako se vidi iz jednačina (9.53) i (9.57) da je

$$\text{Jednačina ekvinokcija} = \Delta\psi \cos\varepsilon. \qquad (10.5)$$

Pravo zvezdano vreme se ne koristi kao vremenska skala, ali je neophodno za meridijanska posmatranja. Zadržaćemo se, u daljem izlaganju, samo na srednjem zvezdanom vremenu koje je ravnomerna vremenska skala, izuzimajući neravnomernosti Zemljine rotacije.

Zbog precesije, srednji zvezdani dan se malo razlikuje od jedne Zemljine rotacije. U slučaju da se zvezda nalazi u ♈ tački, njena bi rektascenzija imala godišnji priraštaj od $\psi\cos\varepsilon$, [v. (9.4)]. Ovo odgovara dnevnoj brzini od $0^s{,}0084$, te je tako period Zemljine rotacije veći od srednjeg zvezdanog dana za ovaj iznos.

Precesija utiče i na dužinu godine, ili, preciznije, na dužinu trajanja tropske godine. Slično mesecu, godina se može definisati na više načina. Najznačajnija je tropska godina, koja predstavlja srednji vremenski interval za koji Sunčeva longituda priraste za 360°. Taj interval između dve uzastopne prolećne ravnodnevice (prolećna ekvinokcija) je, ipak, interval između dva identična sezonska datuma. Građanski kalendar odgovara ovoj dužini godine, dok u Gregorijanskom kalendaru na svakih 400 godina postoji 97 prestupnih godina, dajući srednju dužinu kalendarske

godine od $365^d{,}2425$ koja je vrlo blizu tropske godine. Nasuprot tome, stari Julijanski kalendar ima svaku četvrtu godinu prestupnu i interval od $365^d{,}25$ koji je nazvan *Julijanska godina*. Julijanski vek je tačno 36 525 dana.

Period Zemljine revolucije oko Sunca u odnosu na zvezde nazvan je *siderička godina*, a period Zemljine revolucije oko Sunca u odnosu na perihel njene putanje nazvan je *anomalistička godina*. Na kraju, može se definisati *eklipsna godina* ili *godina pomračenja* (pp.), kao interval između uzastopnih prolaza srednjeg Sunca kroz uzlazni čvor Mesečeve srednje putanje. Ova godina se primetno razlikuje po trajanju od drugih godina, a određena je srednjom učestanošću Sunčevih i Mesečevih pomračenja.

Navedimo dužine nekoliko definisanih godina:

$$\begin{aligned} \text{Julijanska godina} &= 365^d{,}25 \\ \text{Tropska godina} &= 365^d{,}2422 \\ \text{Siderička godina} &= 365^d{,}2564 \\ \text{Anomalistička godina} &= 365^d{,}2596 \\ \text{Eklipsna godina} &= 346^d{,}6201. \end{aligned} \qquad (10.6)$$

Ove vrednosti imaju slabe vekovne promene, koje su za većinu slučajeva isuviše malog značajna.

Tropska godina je značajna za definisanje veze između zvezdanog i srednjeg vremena. Za bilo koji objekt X može se napisati

$$S = t_G(X) + \alpha(X), \qquad (10.7)$$

obezbeđujući merenje rektascenzije od srednjeg ekvinokcija (srednje Υ tačke). Možemo sada tačku X identifikovati sa svetskim srednjim Suncem, tako da koristeći (10.1) imamo

$$S = \mathrm{UT} - 12^h + \alpha_s.$$

Rektascenzija svetskog srednjeg Sunca priraste za 24^h u jednoj tropskoj godini. Ako je μ jednako recipročnoj vrednosti jedne tropske godine u danima, onda je

$$S = S_0 + (1 + \mu)\mathrm{UT} \qquad (10.8)$$

gde je S_0 konstanta.

Ovo, naravno, pretpostavlja da rektascenzija svetskog srednjeg Sunca prirasta ravnomerno sa UT, što je deo definicije srednjeg Sunca. Pojam srednjeg Sunca bio je prvi put uveden od Njukomba (NEWCOMB, 1895) u vreme kada nisu bile poznate male promene u brzini Zemljine rotacije. Stoga, Njukomb nije imao potrebu da pravi razliku između svetskog i efemeridskog srednjeg Sunca. Fiktivno telo koje on razmatra kreće se ravnomerno (nezavisno od slabih vekovnih uticaja) i u zvezdanom i u dinamičkom vremenu. On daje izraze za rektascenziju svog srednjeg Sunca koje je efektivno definisao kao telo. Ovi izrazi su kasnije bili zadržani za definisanje svetskog srednjeg Sunca sa nepromenjenim koeficijentima, ali sada sa eksplicitno definisanim argumentom UT, kao u jednačini (10.8). U reviziji astronomskih konstanti 1976. unete su male modifikacije u ovaj izraz, a kao rezultat dobijena je sledeća relacija između UT i zvezdanog vremena (IAU, 1983):

$$\begin{aligned} S_0(\text{u } 0^h\,\mathrm{UT}) = {}& 6^h41^m50^s{,}548\,41 \\ & + 8\,640\,184^s{,}812\,866\,T_u + 0^s{,}093\,104\,T_u^2 - 6^s{,}2\cdot 10^{-6}\,T_u^3. \end{aligned} \qquad (10.9)$$

Ovde bi bilo podesnije napisati UT kao UT1, koje je definisano u sledećem paragrafu, a T_u je vreme u Julijanskim stolećima od epohe 2000 januar 1, 12^h UT1 (JD 2 451 545,0).

Elementi u (10.9) su očekivana vekovna promena u dužini tropske godine koja je uglavnom uzrokovana promenom u brzini precesije, što je malo u odnosu na promene u brzini Zemljine rotacije. Zanemarujući vekovnu promenu i deleći koeficijent uz T_u sa 36 525, dobijamo za koliko je duži srednji dan od srednjeg zvezdanog dana u zvezdanom vremenu. U stvari,

$$1 \text{ srednji dan} = 24^h03^m56^s{,}555\,37 \text{ srednjeg zvezdanog vremena,}$$

dok je

$$1 \text{ srednji zvezdani dan} = 23^h56^m04^s{,}090\,53 \text{ srednjeg vremena.} \tag{10.10}$$

§ 10.3. Efemeridsko i svetsko vreme.

Fiktivno srednje Sunce koje je uveo Njukomb (1895) koncepcijski je sasvim blisko efemeridskom srednjem Suncu. Rektascenzija efemeridskog srednjeg Sunca je jednostavno Sunčeva srednja longituda L. Dinamička vremenska skala može se definisati direktno preko članova ovih veličina, bez pribegavanja efemeridskom meridijanu korišćenom u jednačini (10.2). U stvari, formalna definicija ET sledi iz ovog postupka. Njukombov izraz za geometrijski srednju longitudu Sunca L je

$$L = 279°41'48'',04 + 129\,602\,768'',13\,T + 1'',089\,T^2, \tag{10.11}$$

gde T ima značenje kao kasnije definisano ET, izraženo u Julijanskim stolećima. Epoha od koje se meri T jeste, po definiciji, 1900 januar 0, 12^h ET.

Gornji izraz za srednju Sunčevu longitudu, preko koeficijenta uz T, definiše jedinice efemeridskog vremena. Zanemarujući male vekovne promene, ovaj koeficijent daje priraštaj srednje Sunčeve longitude za period od 36 525 efemeridskih dana. Pošto u jednoj tropskoj godini L priraste za 360° (ili 1 296 000''), možemo dobiti tropsku godinu u efemeridskim danima, ili u efemeridskim sekundama. Efemeridski dan je definisan kao 86 400 efemeridskih sekundi.

Osnovna jedinica ET je tropska godina za 1900,0, koja može da se podeli na N efemeridskih sekundi, gde je

$$N = \frac{1\,296\,000 \cdot 36\,525 \cdot 86\,400}{129\,602\,768{,}13}$$

tj.

$$N = 31\,556\,925{,}9747. \tag{10.12}$$

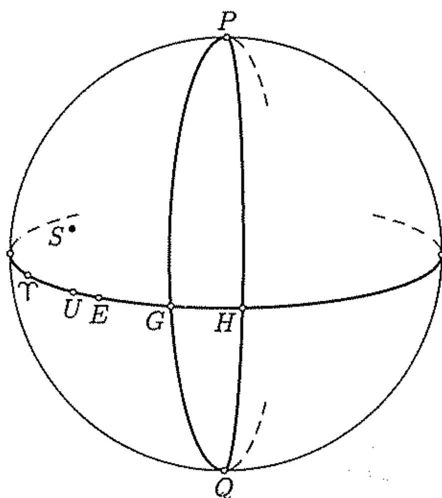
Efemeridska sekunda se formalno definiše kao $(1/N)$-ti deo tropske godine 1900,0.

U onome što sledi i dalje ćemo zanemariti članove uz T^2 u (10.11). Izražena u vremenskoj meri, ova jednačina je oblika

$$\alpha_E = S_0' + \mu \mathrm{ET}, \tag{10.13}$$

gde je μ jednako recipročnoj vrednosti tropske godine u danima. Ovo je očigledno pogodnije za korišćenje od geometrijske rektascenzije i za svetsko i za efemeridsko Sunce. Neophodna aberacijska popravka je konstantna i može se obračunati sa S_0'.

Da bi se ET upoređivalo sa UT uvodi se pojam efemeridskog meridijana. Pošto je samo ET formalno definisano sa (10.11), efemeridski časovni ugao, a sledstveno tome i efemeridski meridijan, određeni su jednačinom (10.2). Na sl. 10.1 prikazani su efemeridski meridijan i Grinički meridijan, redom, kao veliki krugovi PHQ i PGQ. Tačke E i U predstavljaju efemeridsko i svetsko srednje Sunce, dok S predstavlja pravo Sunce. Ugao HG obeležićemo sa λ_E, a to je geografska dužina efemeridskog meridijana istočno od Griničkog.



Efemeridski i Grinički meridijan.

Слика 10.1

Sada iz (10.1) i (10.2) imamo da je

$$t_E = \mathrm{ET} - 12^{\mathrm{h}}$$
$$t_G = \mathrm{UT} - 12^{\mathrm{h}} \qquad (10.14)$$

Luk ΥG je Griničko zvezdano vreme; slično tome je ΥH nazvano *efemeridsko zvezdano vreme* (S_E), što je u suštini zvezdano vreme efemeridskog meridijana. Stoga je

$$S_E = S + \lambda_E. \qquad (10.15)$$

Pošto je $S_E = t_E + \alpha_E$, jednačine (10.2) i (10.13) daju

$$S_E = S_0' - 12^{\mathrm{h}} + (1+\mu)\mathrm{ET}, \qquad (10.16)$$

što ima vrlo sličnu formu kao jednačina (10.8).

U protekloj epohi, bila je to 1902, poklopili su se položaji svetskog i efemeridskog srednjeg Sunca. U tom trenutku poklopili su se efemeridski i Grinički meridijan. Zato je od tog trenutka mereno i efemeridsko i Griničko zvezdano vreme, pa sledi, iz (10.8) i (10.16), da je $S_0 = S_0' - 12^{\mathrm{h}}$. Oduzimajući dve jednačine, dobijamo pomoću (10.15) i (10.3) da je

$$\lambda_E = (1+\mu)\,\Delta T = 1{,}002\,738\,\Delta T. \qquad (10.17)$$

Razlika u rektascenzijama dva srednja Sunca je luk UE. Koristeći (10.14), vidi se da je taj luk jednak $\lambda_E - \Delta T$. Otuda je

$$\alpha_E - \alpha_s = \mu\,\Delta T. \qquad (10.18)$$

U principu, za merenje ET male su potrebe za posmatranjima Sunčeve longitude. Pošto je ET dinamička vremenska skala, stoga se mogu koristiti longitude drugih tela Sunčevog sistema. U praksi, ET se uglavnom izvodi iz posmatranja Meseca, jer se njegova longituda mnogo više menja od Sunčeve. Važno je da se ta posmatranja moraju prvo svesti na poznato ET koje je efektivno dobijeno. To podrazumeva da će ET biti poznato tek neko vreme posle završetka posmatranja, a nikako unapred.

Nasuprot tome, UT se određuje skoro neposredno. Meridijanska posmatranja zvezda obezbeđuju direktno merenje zvezdanog vremena, sa kojeg može, jednačinom (10.9), da se pređe na svetsko vreme UT. Samo vremenska razlika ΔT postaje poznata kasnije i to sa poznavanjem ET

Neophodno je uvideti razlike između nekoliko oblika UT. Direktni prelazak sa posmatranog zvezdanog vremena na svetsko vreme, pomoću jednačine (10.9), povlači sa sobom poznavanje longitude mesta, koja je tačno određena u odnosu na geometrijski pol. Označimo to sa λ_0. Na drugoj strani, u skladu sa oznakama u §5.5, neka λ bude longituda u odnosu na trenutni pol rotacije. Jednačina (5.29) daje vezu između dveju longituda.

Pošto je λ_0 za jedno mesto stalno, prelazak sa zvezdanog vremena na svetsko vreme UT mogao bi se neposredno ostvariti korišćenjem vrednosti ove longitude. Dobijeno UT označimo sa UT0. Zbog kretanja Zemljinih polova, vrednost UT0 zavisi od mesta i nije data opštim standardom. Na ovaj način, prelazak bi se mogao ostvariti korišćenjem trenutne vrednosti longitude mesta λ. Ovakva varijanta UT nazvana je UT1. Varijanta UT1 se koristi za povezivanje UT sa drugim vremenskim skalama. Kada se simbol UT koristi bez oznake uvek se podrazumeva da je to UT1. Jednačina (5.29) daje

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} - (u_x \sin\lambda_0 + u_y \cos\lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_0, \tag{10.19}$$

gde je φ_0 geografska širina mesta posmatranja, a (u_x, u_y) su koordinate trenutnog pola izražene u vremenskoj meri, tj $\left(\frac{1}{15}x, \frac{1}{15}y\right)$ u skladu sa oznakama §5.5. Koeficijenti (u_x, u_y) nisu poznati za vreme posmatranja; oni se kasnije publikuju u Međunarodnoj službi širine i Međunaradnoj službi za vreme (*International Polar Motion Service* and *Bureau International de l'Heure*).

Moguće je UT još prečistiti. UT1 je izloženo promenama koje potiču od varijacija u brzini Zemljine rotacije. Ove varijacije se ne mogu unapred detaljno predvideti, ali sadrže prepoznatljive sezonske periodičnosti. Kada se iz UT1 uklone sezonske periodičnosti dobija se nova vremenska skala nazvana UT2. I UT1 i UT2 ne zavise od položaja posmatrača na Zemljinoj površini

§ 10.4. Moderne dinamičke skale vremena.

Vremenska skala ET postala je nezadovoljavajuća, pa od 1984. godine prestaje da se koristi kao osnovna astronomska skala vremena u godišnjim almanasima. Nova vremenska skala, Zemljino dinaničko vreme (TDT), uvodi se s ciljem da očuva kontinuitet s efemeridskim vremenom. Time su naša ranija razmatranja vremenske skale ET još uvek važna i objašnjavaju poreklo novih vremenskih skala. Principijelne primedbe vremenskoj skali ET su da je neprirodna i da nije neposredno dostupna. Ona jeste dinamička vremenska skala, u obliku potrebnom za efemeride, ali je zasnovana na pred-relativističkim dinamikama. Osim toga, s Njutnove tačke gledišta, bitno se ne razlikuje od atomskog vremena, koje se može lakše dobiti i sa znatno većom tačnošću.

Efemeridska sekunda je definisana, jednačinom (10.12), kao N^{-1} deo tropske godine za 1900,0. Osnovna jedinica za međunarodno atomsko vreme (*International Atomic Time*—TAI) jeste SI sekunda, koja je definisana kao vremenski interval u kojem se izvrši 9 192 631 770 prelaza elektrona sa jednog hiperfinog energetskog nivoa na drugi u pobuđenom atomu cezijuma 133. Nije ustanovljena sistematska razlika između ove dve vremenske jedinice. Veza između ET i atomskog vremena data je kao

$$\mathrm{ET} = \mathrm{TAI} + 32^{\mathrm{s}},184. \tag{10.20}$$

Godine 1977. kada je uvedena nova astronomska vremenska skala za efemeride TDT, tada je formalno bila sasvim blizu TAI, ali ova nova vremenska skala uopšte nije korišćena do 1984. Osnovna jedinica vremenske skale TDT jeste SI sekunda, potpuno ista kao u skali atomskog vremena, što je neophodno da bi se dve vremenske skale povezale izjednačavanjem tačnih vrednosti. U ovom slučaju, jednakost je oblika

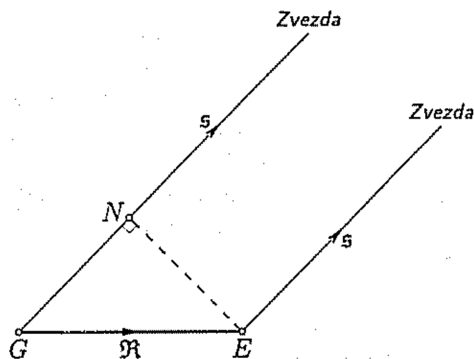
$$1977 \text{ januar } 1\ 0^h \text{ TAI} = 1977 \text{ januar } 1{,}000\,3725 \text{ TDT}. \qquad (10.21)$$

Ovo je ista vrednost poravnavanja kao u (10.20), da bi se očuvao kontinuitet sa ET.

Pri reviziji vremenskih skala, ni malo nije promenjena definicija UT. Međutim, neznatne promene su unete u numeričke vrednosti koeficijenata usled predefinisanja ekvinokcija (Υ tačke). U novom sistemu, UT1 je efektivno definisano relacijom sa Griničkim zvezdanim vremenom S datom jednačinom (10.9). Veza između svetskog i zvezdanog vremena je sigurno korisna, ali to ima svoju cenu. Jednačina (10.18) pokazuje da se rektascenzija srednjeg svetskog Sunca razlikuje od srednje longitude pravog Sunca. Istina, to neslaganje je vrlo malo, svega oko $0^s{,}15$. Ali ono raste sa vremenom i neophodna je eventualna potpuna modifikacija, ili će UT u osnovi biti predefinisano.

Vremenski signali koji se prenose preko radija zasnovani su na koordinatnom svetskom vremenu (*Coordinated Universal Time*—UTC). Ovo nije u potpunosti skala srednjeg vremena, već modifikovani oblik atomskog vremena. UTC se razlikuje od TAI za ceo broj sekundi, a to je uvek očuvano sa razlikom manjom od $0^s{,}9$ sa UT1. To se postiže povremenim unošenjem dodatih sekundi, koje se nazivaju skok sekunde. U principu, sekunde se mogu i izostaviti iz UTC ako je to nužno, ali, u stvari, TAI se povećava oko jedne sekunde godišnje i u odnosu na UT1 takvo podešavanje je već uneto skok sekundom. Unapred je dogovoreno da se skok sekunda unosi, kada je to potrebno, na kraju juna ili na kraju decembra, tako da je poslednji dan meseca produžen jednom sekundom. Na primer, početkom 1983 razlika između TAI i UTC bila je 21^s; poslednja skok sekunda bila je uneta 1982., 30. juna.

TDT je vremenska skala koja se koristi za geocentrične efemeride. Ipak, mnogo više posmatranja se svode na baricentar Sunčevog sistema nego na geocentar. Kao što se transformišu položajne koordinate, koje su bile razmatrane u glavi 8, tako bi se vreme koje odgovara nekom posmatranom slučaju transformisalo u vreme za slučaj u kojem bi ga posmatrao pretpostavljeni baricentrični posmatrač. Ovo je posebno značajno za brze periodične pojave, kao što su pulsarski signali, kratkoperiodično promenljive i dvojni sistemi. Bitno je da se prijem svetlosnih ili radio signala od takvih objekata odnosi na zajedničko početno ubrzanje.



Слика 10.2

Geometrija, koja je vrlo jednostavna, predstavljena je na sl. 10.2, na kojoj je G tačka baricentra, a E tačka geocentra. Vektor $\overrightarrow{GE} = \mathfrak{R}$ i komponente (X, Y, Z) ovog vektora bile su

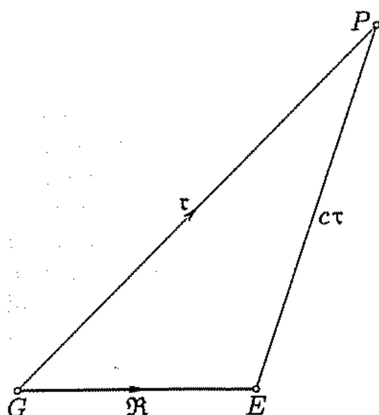
razmatrane u §8.2. Pretpostavimo da se zvezda nalazi u pravcu koji je dat jediničnim vektorom $\mathbf{s}$. Rastojanje do zvezde smatraćemo beskonačnim, jer je malo verovatno da je paralaksa važna za ovaj problem. Neka t bude vreme posmatranja na Zemlji, a $t+\tau$ vreme stizanja svetlosnog signala u G. Očigledno je $c\tau = GN = \mathfrak{R}\cdot\mathbf{s}$. Izražavajući $\mathbf{s}$ preko ekvatorskih koordinata zvezda (α, δ) imamo

$$c\tau = X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta, \qquad (10.22)$$

što daje malu razliku između Zemljinog i baricentričnog vremena za posmatranja tela izvan Sunčevog sistema. Komponente (X, Y, Z) izražene su u AJ, pa korišćenjem (8.18) nalazimo

$$\tau = 0^d{,}005\,775\,6\,(X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta). \qquad (10.23)$$

Malo je verovatno da tela Sunčevog sistema zahtevaju ovaj oblik baricentrične korekcije. Ipak, dinamička teorija kretanja planeta mora biti formulisana preko vremena koje je poznato kao baricentrično dinamičko vreme (TDB). Kada se uzmu u obzir relativistički efekti, tada postoje fine razlike između TDB i TDT, koje će biti razmatrane u §10.7. Osim toga, značajno je obračunati svetlosno vreme.



Слика 10.3

Pretpostavimo, na primer, da je planeta posmatrana u trenutku t a da je zračenje bilo emitovano u trenutku $t-\tau$. Na sl. 10.3, G ponovo predstavlja baricentar, E je položaj Zemlje u trenutku t i P je planeta u trenutku $t-\tau$. Pošto je PE jednostavno jednako $c\tau$, to sledi da je

$$c^2\tau^2 = r^2 + R^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathfrak{R}. \qquad (10.24)$$

Relativistička popravka za ovu jednačinu je izvedena u §10.8.

§ 10.5. Julijanska i Beselova godina.

Ovaj paragraf daje brojne definicije i opise, vezane za vreme, usvojene astronomskim dogovorima. Pre svega, jedna takva stavka je: za izričito navođenje trenutka nekog događaja, u astronomskoj praksi daju se vremenski intervali (godina, mesec, dan, itd.) u opadajućem redosledu. Na primer, s obzirom na to da se može nenamerno reći da se nešto dogodilo u podne 23-eg septembra 1985, korektna astronomska određenost bi bila 1985 septembar 23 12^h. Na korektan način, ovo se može zapisati i kao 1985 sept. 23,5. Osim toga, astronom smatra da se ne treba držati nametnute konvencije o broju dana u mesecu, uglavnom, kada se to odnosi na dane oko Nove godine, kao što su decembar 32, i januar 0. Na primer, trenutak 1985 decembar 31 18^h može se napisati kao 1986 januar $0^d{,}75$. Ovakve konvencije mogu se primeniti na svaku, ranije spomenutu, vremensku skalu.

Postoji odgovarajući način za posebno specifično astronomsko označavanje trenutka nekog događaja koji se koristi u dinamičkoj vremenskoj skali. Vreme događaja se deli sa kalendarskim datumom i koristi samo godina, ali u obliku razlomka,

tj. 1985,1672. U upotrebi su dva sistema, stari je zasnovan na Beselovoj godini, dok novi sistem koristi Julijansku godinu. Značajno je prepoznati u svakom sistemu kako je definisan trenutak početka godine, jer ni u jednom slučaju to nije trenutak koji saopštava „staro dobro vreme" („*Auld Lang Syne*")—niti je to Grinič.

Dužina Beselove godine je interval za koji rektascenzija efemeridskog srednjeg Sunca priraste za 24^h. Ovo može da se identifikuje sa tropskom godinom, mada postoji mala razlika između njih, koja iznosi samo $0^s,148\,T$, gde je T vreme u stolećima od 1900. Ako vekovne promene ne uzmemo u obzir, tada je Beselova godina jednaka tropskoj godini dužine od $365^d,2422$. Poseban trenutak, koji predstavlja početak Beselove godine, definisan je kao trenutak kada je longituda srednjeg Sunca tačno jednaka 280°, ili

$$\alpha_s = 18^h 40^m. \qquad (10.25)$$

Ovo je uvek blizu početka kalendarske godine. Fundamentalna epoha, koja je napisana kao B1900,0, jeste 1900 januar $0^d,813$ ET, dok je standardna epoha B1950,0 tačno 50 tropskih godina, ili 18 262,110 dana, kasnije. Ovaj interval prevazilazi 50 prostih godina od 365 dana za $12^d,110$. Podsećajući da 1900 *nije* bila prestupna godina, vidi se da je

$$\text{B1950,0} \equiv \text{1950 januar } 0^d,923\,\text{ET} \equiv \text{1949 decembar 31 } 22^h 09^m\,\text{ET}. \qquad (10.26)$$

Beselova epoha za svaku sledeću godinu može se izračunati dodavanjem intervala od 365,2422 dana.

Račun postaje jednostavniji korišćenjem Julijanskog sistema. U tom sistemu datum je izražen kao razlomak Julijanske godine od $365\frac{1}{4}$ dana. Fundamentalna epoha, napisana je kao J2000,0

$$\text{J2000,0} \equiv \text{2000 januar } 1^d,5\,\text{TDB}. \qquad (10.27)$$

Ovom definicijom može se odrediti trenutak svake Julijanske epohe. Poređenja radi, odredimo epohu J1950,0. To će biti tačno $18\,262^d,5$ pre fundamentalne epohe, koja, uzimanjem u obzir 12 prestupnih godina, daje

$$\text{J1950,0} \equiv \text{1950 januar } 1^d,0.$$

Novi sistem Julijanske epohe uvodi IAU 1976 revizijom astronomskih konstanti (IAU, 1977). U isto vreme, stara Beselova epoha bila je predefinisana preko pojmova nove vremenske skale. Definicija Beselove godine bila je pojednostavljena njenim izjednačavanjem u trajanju sa tropskom godinom za B1900,0. Precizne formule za Julijansku epohu i predefinisanu Beselovu epohu date su niže.

Za neka posmatranja pogodno je izraziti vreme isključivo u danima. To se može postići korišćenjem *Julijanskog datuma* (JD) koji je formalno definisan kao vreme u danima, uključujući delove, koji se broje od epohe 4713 p.n.e. januar $1^d,5$. Razlozi za ovakav, prividno vrlo jednostavan, izbor epohe su prilično nejasni i povlače sa sobom gomilanje nekoliko hronoloških ciklusa. Objašnjenje se može naći u *Explanatory Supplement*, str. 431. Na ovaj način određeni JD, ranije pomenutih standardnih epoha, biće

$$\begin{aligned} \text{B1900,0} &= \text{JD } 2\,415\,020{,}313 \\ \text{B1950,0} &= \text{JD } 2\,433\,282{,}423 \qquad (10.28) \\ \text{J2000,0} &= \text{JD } 2\,451\,545{,}0. \end{aligned}$$

Julijanski datum, JD, bio je prvobitno definisan korišćenjem sistema svetskog vremena UT, za epohu 4713 p.n.e. januar 1, u srednje griničko podne. Napravljena je slična definicija u sistemu efemeridskog vremena ET i nazvana Julijanski efemeridski datum. Namerno je izbegnuta specifikacija vremenske skale pri definisanju JD, tako da se svaka vremenska skala može koristiti; pojam JD dat preko sistema svetskog vremena UT nije se dugo održao. Ako postoji ma kakva mogućnost pogrešnog tumačenja, mora se eksplicitno navesti korišćenje vremenske skale. Obično nije potrebno i verovatno je jasno čitaocu da su prve dve vremenske skale u (10.28) ET, dok je treća TDB. Početna epoha za JD ima istu formalnu definiciju u bilo kojoj vremenskoj skali, ali neće odgovarati istom vremenskom trenutku. Zaista, malo se zna o relacijama između različitih vremenskih skala u dalekoj prošlosti.

Relacije između Julijanske ili Beselove epohe i JD mogu biti date kao

$$\begin{aligned} \text{Julijanska epoha} &= \text{J}2000{,}0 + \frac{\text{JD} - 2\,451\,545}{365{,}25} \\ \text{Beselova epoha} &= \text{B}1900{,}0 + \frac{\text{JD} - 2\,415\,020{,}313\,52}{365{,}242\,198\,781}. \end{aligned} \qquad (10.29)$$

Jednostavnost i preciznost novog Julijanskog sistema biće dokazana.

❋ Celobrojni deo od JD nazvan je *broj Julijanskog datuma*. Njega je retko potrebno računati, pošto je JD utabličen za svaki dan u godini u *Astronomical Almanacu*. Mora biti naglašeno da Julijanski dan počinje u podne a ne u ponoć. Ova činjenica je propuštena, a važna je jer je suprotna svim drugim astronomskim konvencijama.

Moguće je koristiti modifikovan Julijanski datum (MJD), koji je definisan kao

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2\,400\,000{,}5. \qquad (10.30)$$

Za normalnu upotrebu MJD vraća početak dana u ponoć i vreme je u danima od datuma 1858 novembar 17,0.

§ **10.6. Vremensko izjednačenje.** Već je, u §2.6, pomenuta razlika između pravog i srednjeg vremena. Razlika između ta dva vremena nazvana je ❋ *vremensko izjednačenje* η, definisano kao

$$\eta = \text{pravo vreme} - \text{srednje vreme}. \qquad (10.31)$$

Ovo se može izraziti preko rektascenzija kao

$$\eta = \alpha_s - \alpha_\odot. \qquad (10.32)$$

U *Astronomical Almanacu* date su nedovoljno tačne formule za izračunavanje ovih vrednosti, ali nije ni pokušano da se η utabliči s visokom tačnošću, iz razloga koji slede.

Desna strana jednačine (10.32) sadrži dve veličine koje su definisane u različitim vremenskim skalama. Rektascenzija srednjeg svetskog Sunca α_s poznata je za svako UT, dok se rektascenzija pravog Sunca može izračunati samo za ET. Pošto razlika dve vremenske skale ΔT nije unapred poznata, vremensko izjednačenje ❋ ne može biti precizno izračunato. Problem se rešava korišćenjem *efemeridskog vremenskog izjednačenja* η^*, koje je definisano kao

$$\eta^* = \alpha_E - \alpha_\odot. \qquad (10.33)$$

Iz jednačine (10.18) sledi da η^* prevazilazi vremensko izjednačenje za $\mu\,\Delta T$.

Veličina koja je utabličena u *Astronomical Almanacu* je trenutak *efemeridske kulminacije* Sunca. To je jednostavno efemeridsko vreme ET Sunčevog prolaza kroz efemeridski meridijan. Jednačinu (10.33) pišemo kao

$$\eta^* = t_{\odot}^{E} - t_E = t_{\odot}^{E} - \mathrm{ET} + 12^{\mathrm{h}}.$$

Za prolaz kroz efemeridski meridijan, gubi se prvi član na desnoj strani, pa je

$$\text{Efemeridsko vreme kulminacije} = 12^{\mathrm{h}} - \eta^*. \qquad (10.34)$$

Astronomical Almanac, takođe, daje efemeridske prolaze za Mesec (gornji i donji prolaz), velike planete i neke male planete.

Razmatrajmo sada izračunavanje η^*. Na sl. 10.4, $F\Upsilon G$ predstavlja srednji ekvator, a $A\Upsilon S$ ekliptiku. Pretpostavimo da je S položaj Sunca u trenutku t i A njegov položaj u perigeju u trenutku τ. Tačka E predstavlja efemeridsko srednje Sunce u trenutku t. Po definiciji, $\Upsilon E = L$ je Sunčeva srednja longituda. Rečeno je da je rektascenzija pravog Sunca $\Upsilon PS = \alpha$.

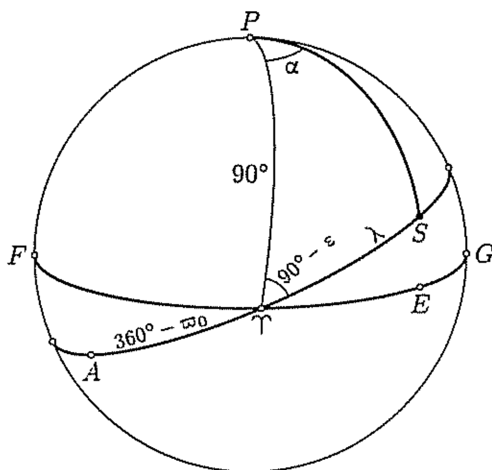
Sa jednačinom (10.33) biće

$$\eta^* = L - \alpha. \qquad (10.35)$$

Neophodno je izvesti posebne izraze za L i α.

Neka ϖ_0 bude Sunčeva longituda u perigeju. Ona je, u stvari, oko 282°, pa je tako $A\Upsilon = 360° - \varpi_0$. Pretpostavimo sada da je M srednja anomalija Sunca (ili Zemlje) u trenutku t. Ona se računa kao $n(t - \tau)$, gde je n srednje kretanje. Srednja longituda je $M - A\Upsilon$, pa sledi da je

$$L = M + \varpi_0. \qquad (10.36)$$



СЛИКА 10.4

Sada je luk AS prava anomalija v. Ona je dobijena iz srednje anomalije na uobičajen način, tj. rešavanjem Keplerove jednačine za dobijanje ekscentrične anomalije a zatim primenom jednačine (6.28). Za longitudu pravog Sunca nađen je izraz

$$\lambda = \Upsilon S = v + \varpi_0 \qquad (10.37)$$

iz kojeg se ona može izračunati.

Poslednji korak jeste dobijanje α iz sfernog trougla $P\Upsilon S$ u kojem su poznata četiri elementa, kao na dijagramu. Primenom četvoroelementnog obrasca imamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon \operatorname{tg}\lambda. \qquad (10.38)$$

Efemeridsko vremensko izjednačenje je sada dato pomoću jednačina (10.35) i (10.38) kao

$$\eta^* = M + \varpi_0 - \operatorname{arctg}\left[\cos\varepsilon \operatorname{tg}(v + \varpi_0)\right]. \qquad (10.39)$$

§ 10.7. Sopstveno i koordinatno vreme. U opštoj relativnosti neophodno je napraviti razliku između sopstvenog i koordinatnog vremena. Vreme koje meri za Zemlju vezan posmatrač jeste sopstveno vreme s; to je interval duž posmatračeve svetske linije. Ona je poistovećena sa običom geodezijskom linijom u Švarcšildovom prostor-vremenu, koja je već razmatrana u §6.9.

Koordinatno vreme, iako nije direktno merljivo, odgovara zahtevima dinamičke vremenske skale. Ono može da se koristi kao nezavisna promenljiva, ili parametar krive, za svetsku liniju ma kog tela na heliocentričnoj putanji. Mora se primetiti da pod koordinatnim vremenom podrazumevamo ono posebno odabrano koordinatno vreme koje je napravljeno u dve, već razmatrane, metrike, to su (3.46) i (3.52). Ovaj izbor koordinatnog vremena t dopušta metriku za pisanje u vremenski nezavisnoj formi, a ova osobina je dovoljna za određivanje jedinstvene nezavisnosti od nulte tačke i konstantnog skalnog faktora.

Veza između sopstvenog i koordinatnog vremena zasnovana je na jednačini (6.71). Koristeći (6.70), s dovoljnom tačnošću, nalazimo da je

$$t - t_0 = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{m}{a}\right)(s - s_0) + \frac{2m}{a}\frac{e \sin E}{n}. \qquad (10.40)$$

Ovde su a, e, n, redom, Zemljina velika poluosa, ekscentričnost i srednje kretanje, a t_0 i s_0 su koordinatno i sopstveno vreme perihela. Napravljena razlika, do reda m, između relativističke i klasične vrednosti putanjskih elemenata je beznačajna.

Izjednačimo sada sopstveno vreme sa Zemljinom vremenskom skalom (TDT) i pokušajmo da napravimo od koordinatnog vremena, ranije spomenutu, opštu dinamičku vremensku skalu TDB. Dozvoljene su samo periodične promene između dve vremenske skale, koje su sadržane u drugom članu (10.4). Stoga, prihvatamo koordinatnu vremensku skalu T kao TDB, takvu da je

$$T - s_0 = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{m}{a}\right)^{-1}(t - t_0). \qquad (10.41)$$

Razvojem do reda m, imamo

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + \frac{2m}{a}\frac{e \sin E}{n}. \qquad (10.42)$$

Preostaje još da uvrstimo vrednosti za putanjske elemente i za Švarcšildov radijus. Stavljajući sledeće numeričke podatke

$$\begin{aligned} 2m &= 2{,}956\,\mathrm{km} \\ a &= 1{,}496 \cdot 10^8\,\mathrm{km} \\ e &= 0{,}016\,71 \\ n &= 1{,}991 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

dobijamo rezultat kao

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 0^{\mathrm{s}}{,}001\,658 \sin E. \qquad (10.43)$$

Ako je potrebno, ekscentrična anomalija se može eliminisati iz (10.43) izražavajući $\sin E$ u obliku stepenog reda po M i e. Keplerova jednačina se može rešiti rekurentnom relacijom datom u jednačini (6.33), a zatim, zanemarujući članove e^3, nalazimo

$$e \sin E = e \sin(M + e \sin M) \simeq e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M.$$

Smenjivanjem ovoga u (10 42) dolazimo do krajnjeg numeričkog rezultata

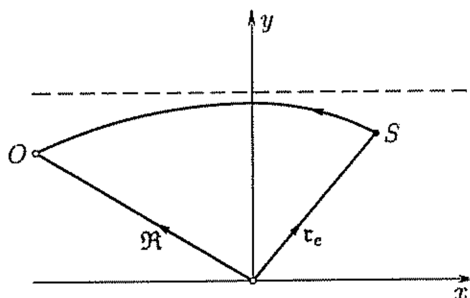
$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 0^s{,}001\,658 \sin M + 0^s{,}000\,014 \sin 2M. \qquad (10.44)$$

§ 10.8. Izračunavanje svetlosnog vremena—radarska kašnjenja.

Izvođenje vremena putovanja svetlosti od izvora do posmatrača je relevantno za svako posmatranje tela unutar Sunčevog sistema. Obično, tačnost položaja nije tolika kao u klasičnom postupku Ipak, visoka tačnost radarskih i laserskih merenja ne zavisi od ugaonih merenja, izazivajući relativističke efekte koji ne samo da su merljivi već i značajni. Merenje radarskog kašnjenja između emitovanja radarskog signala i prijema njegovog eha jeste sopstveno vreme. Međutim, ono može biti određeno kada je utvrđen interval koordinatnog vremena koji je potreban signalu da dostigne cilj i da se vrati. Ovo uključuje proučavanje nultih geodezijskih koje predstavljaju svetske linije određenog signala i povratnog eha.

Nulte geodezijske za Švarcšildov prostor-vreme bile su izvedene u §8 7, a osobine pravaca njihovog prostiranja su proučavane u §8.8. Da bi izveli vremenske osobine nulte geodezijske koja povezuje metu čiji je vektor položaja $\mathfrak{r}_e$ sa posmatračem na Zemlji čiji je vektor položaja $\mathfrak{R}$, treba proširiti analizu slučaja (a) iz prethodnog paragrafa. Zadržaćemo se na delu puta povratnog signala, ali je emitovani deo u suštini isti.

Slika 10.5 prikazuje putanju zraka od mete S do posmatrača O. Izabrali smo izotropni koordinatni sistem tako da put zraka leži u x–y „ravni" (tj. $z = 0$) simetrično oko y-ose. Dijagram je vrlo sličan sl. 8.3. Tada iz jednačine (8.5) dva pomenuta vektora položaja mogu biti napisana u obliku



Nulta geodezijska povezuje radarsku metu S i posmatrača O.

Слика 10.5

$$\mathfrak{R} = \left(X,\, q - \frac{2m}{q} R,\, 0\right)$$
$$\mathfrak{r}_e = \left(x_e,\, q - \frac{2m}{q} r_e,\, 0\right) \qquad (10.45)$$

Kao u (8.55), uvedimo geocentrični pravac s_0 i geocentrično rastojanje ρ sa formalnom definicijom

$$\rho s_0 = \mathfrak{r}_e - \mathfrak{R}. \qquad (10.46)$$

Tada je

$$\rho^2 = (x_e - X)^2 + \frac{4m^2}{q^2}(r - R)^2,$$

imamo popravku do reda m, da je

$$\rho = (x_e - X). \qquad (10.47)$$

Tada svetlosno vreme određeno na klasičan način jednostavno jeste

$$t_0 = \frac{\rho}{c} = \frac{(x_e - X)}{c}. \tag{10.48}$$

Na drugoj strani, relativističko koordinatno vreme može se dobiti izjednačavanjem četvrtih komponenti, kako su date jednačinama (8.52) i (8.53), tangentnog vektora na nultu geodezijsku.

To daje diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{c}\left(1 + \frac{2m}{r}\right). \tag{10.49}$$

Biće dovoljno korektno zameniti r samo za nulti red (po m), tj. $r = (x^2+q^2)^{1/2}$, pošto je oblik vektora položaja dat u (10.45) primenjen, takođe, na svaku središnju tačku. Integraljenje jednačine (10.49) daće koordinatno vreme putovanja svetlosti kao

$$t = t_0 + \frac{2m}{c}\int\limits_X^{x_e} \frac{dx}{(x^2+q^2)^{1/2}}.$$

Ovim dobijamo krajnji rezultat

$$t = t_0 + \frac{2m}{c}\left(\operatorname{Arsh}\frac{x_e}{q} - \operatorname{Arsh}\frac{X}{q}\right). \tag{10.50}$$

Faktor $2m/c$ je oko 10 µs, ali pod određenim okolnostima vremensko zakašnjenje $(t - t_0)$ može biti mnogo veće od toga. Pretpostavimo da je meta planeta u gornjoj konjunkciji; tada će parametar q, izražen u astronomskim jedinicama (AJ), biti mali. Za zrak u okolini Sunca, q je jedan Sunčev prečnik koji je 0,0046 AJ. Tada je $\operatorname{Arsh}(X/q)$ oko -10, a $\operatorname{Arsh}(x_e/q)$ biće istog reda veličine ali suprotnog znaka. Kada se mere i izlazni i povratni put signala, ukupno radarsko kašnjenje može da pređe 400 µs. Merenja takvih radarskih signala daju opštoj teoriji relativnosti važan test—ponekad nazvan četvrti klasični test. Dostignuta preciznost je slična onoj u drugom testu sa kojim je ovaj test povezan. Dok drugi test meri savijanje putanje svetlosti, dotle četvrti test meri odgovarajuće vremensko kašnjenje.

Preostaje samo da se rezultat (10.50) izrazi opštom vektorskom formom koja ne zavisi od specijalno izabranog koordinatnog sistema. S dovoljnom tačnošću, imamo da je

$$\begin{aligned} x_e &= \mathfrak{r}_e \cdot \mathfrak{s}_0 \\ X &= \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}_0, \end{aligned} \tag{10.51}$$

dok sa jednačinom (8.59) biće

$$q^2 = \left[R^2 - (\mathfrak{s}_0 \cdot \mathfrak{R})^2\right]. \tag{10.52}$$

Osim toga, lako je videti da se u ovoj jednačini $\mathfrak{R}$ može zameniti sa $\mathfrak{r}_e$, dajući

$$q^2 = \left[r_e^2 - (\mathfrak{s}_0 \cdot \mathfrak{r}_e)^2\right]. \tag{10.53}$$

Ovo se obično piše u logaritamskom obliku inverznog hiperboličkog sinusa. Pošto je X negativno, imamo

$$-\operatorname{Arsh}\frac{X}{q} = \ln\left[-X + (X^2+q^2)^{1/2}\right] - \ln q.$$

Koristeći (10.51) i (10.52), ovo postaje

$$-\operatorname{Arsh}\frac{X}{q} = \ln(R - \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_0) - \ln q.$$

Sličnim postupkom i korišćenjem (10.53) nalazimo, pošto je x_e pozitivno, da je

$$\operatorname{Arsh}\frac{x_e}{q} = \ln(r_e + \mathfrak{r}_e\cdot\mathfrak{s}_0) - \ln q.$$

Koristeći ova dva izraza, formula za radarsko kašnjenje (10.50) daje

$$t - t_0 = \frac{2m}{c}\ln\left[\frac{(r_e + \mathfrak{r}_e\cdot\mathfrak{s}_0)(R - \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_0)}{q^2}\right],$$

koja se, sa (10.52), svodi na

$$t - t_0 = \frac{2m}{c}\ln\left[\frac{(r_e + \mathfrak{r}_e\cdot\mathfrak{s}_0)}{(R + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_0)}\right]. \tag{10.54}$$

Faktor $2m/c$ je 9,86 µs.

Jednačina (10.54) daje samo radarsko kašnjenje u povratku signala. Uz malo prilagođavanje formule, kašnjenje emitovanog signala dobijamo na sličan način. Zanemarujući promene položaja posmatrača u toku putovanja signala, ukupno zakašnjenje je jednostavno dvostruka vrednost ove date u jednačini (10.54). Ostavlja se čitaocu za vežbu da pokaže da se ukupno kašnjenje može napisati u obliku

$$t - t_0 = \frac{4m}{c}\ln\left[\frac{(r_e + R + \rho)}{(r_e + R - \rho)}\right]. \tag{10.55}$$

Zadaci

10.1. Pokazati da je Griničko zvezdano vreme dato za svaku epohu T kao

$$S_0 = 18^{\rm h},697\,374\,6 + 879\,000^{\rm h},051\,336\,9\,T,$$

gde je T vreme u julijanskim stolećima od standardne epohe. Zašto je formula (10.9) referentna?

10.2. Data je

$$\text{tropska godina} = 365^{\rm d},2422$$

$$\text{siderička godina} = 365^{\rm d},2564$$

$$\text{anomalistička godina} = 365^{\rm d},2596,$$

odrediti približan iznos i znak godišnje precesije i kretanja perihela.

10.3. Naći datume koji odgovaraju dvema epohama B1985,1672 i J1985,1672.

10.4. Pokazati da se jednačina vremenskog izjednačenja može približno napisati kao

$$\eta^* = y\sin 2L - 2e\sin 2M + 4ey\sin M\cos 2L - \frac{1}{2}y^2\sin 4L - \frac{5}{4}e^2\sin 2M,$$

gde je M srednja anomalija Sunca, L je njegova srednja longituda, e je ekscentričnost Zemljine putanje i $y = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varepsilon$.

10.5. Pokazati da je iznos promene efemeridskog vremenskog izjednačenja negativan u oba solsticija, pretpostavljajući da je $e = 0{,}016\,75$. Pokazati da se najraniji zalaz javlja pre srednjeg letnjeg dana, a poslednji zalaz posle toga

10.6. Pokazati da kulminacije pravog Sunca po svetskom vremenu (UT) prevazilaze njegove utabličene efemeridske kulminacije za $\mu\,\Delta T$.

10.7. Radarski signal je pošao sa Zemlje u vreme kada je heliocentrični vektor bio $\mathfrak{R}_1$. Radarski eho je primljen sa mete čiji je trenutni vektor položaja $\mathfrak{r}$ i kada je eho primljen vektor položaja Zemlje bio je $\mathfrak{R}_2$. Pokazati da je interval koordinatnog vremena protekao između slanja i prijema dat sa

$$\tau = \frac{\rho_1 + \rho_2}{c} + \frac{2m}{c}\ln\left|\frac{(r + R_1 + \rho_1)(r + R_2 + \rho_2)}{(r + R_1 - \rho_1)(r + R_2 - \rho_2)}\right|,$$

gde je

$$\rho_1 = \left(r^2 + R_1^2 - 2\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{R}_1\right)^{1/2}$$

i

$$\rho_2 = \left(r^2 + R_2^2 - 2\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{R}_2\right)^{1/2}$$

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

Sopstveno kretanje i radijalna brzina

§ **11.1. Komponente zvezdanog kretanja.** U ovoj glavi se razmatra kretanje zvezda u odnosu na Sunce, kao i uticaj tog kretanja na posmatranja. U razmatranju nije obuhvaćeno određivanje referentnog sistema, koji mora da zavisi od statističke interpretacije posmatranja velikog broja zvezda. Za sada je pretpostavljeno da se referentni sistem, sa središtem u baricentru Sunčevog sistema, može približno definisati kao inercijalan. Posebna kretanja, uglavnom najbližih zvezda, unutar takvog referentnog sistema, biće u ovoj glavi razdvojena.

Pretpostavimo da zvezda ima brzinu $\mathfrak{V}$ u odnosu na Sunce, strogo govoreći u odnosu na baricentar, i da je posmatrana u pravcu $\mathfrak{s}$. Ova se brzina može razdvojiti na radijalnu komponentu V_r i transverzalnu komponentu $\mathfrak{V}_T$, gde je

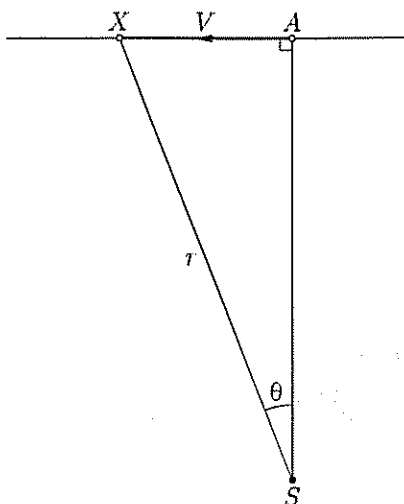
$$\mathfrak{V} = V_r \mathfrak{s} + \mathfrak{V}_T. \tag{11.1}$$

Neposredno sledi da je

$$V_r = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{s} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{V}_T = \mathfrak{s} \times (\mathfrak{V} \times \mathfrak{s}). \tag{11.2}$$

U principu, radijalna komponenta se uvek može odrediti iz Doplerovog (DOPPLER) pomaka u spektru zvezde, dok se transverzalna brzina ne može direktno meriti. Njen pravac je poznat iz promene položaja zvezde $\dot{\mathfrak{s}}$, tj. iz njenog sopstvenog kretanja, ali njegova veličina se može odrediti samo ako je već poznata udaljenost zvezde od Sunca. Ovu informaciju daju paralaktička merenja za mali broj zvezda, ali u najvećem broju slučajeva paralaktičko pomeranje je toliko malo da bi se merenjem moglo u potpunosti odrediti. Dok je paralaksa godišnji periodični fenomen, sopstveno kretanje je vekovni efekt koji je moguće meriti kroz dugi vremenski interval.

Neka je, na sl. 11.1, X položaj zvezde, a S položaj Sunca, koje se smatra nepokretnim. Sada se brzina zvezde u odnosu na Sunce menja sa vremenom, ali vrlo sporo. Vremenski interval promene biće reda perioda galaktičke rotacije ($\sim 2 \cdot 10^8$ godina). U skladu sa tim, realno je, i vrlo korisno, približno posmatrati brzinu zvezde kao konstantnu u odnosu na Sunce. Putanju predstavljenu pravom linijom AX opisaće zvezda konstantnom brzinom V. Tačka A je presečna tačka normale povučene iz položaja Sunca na putanju i putanje zvezde. Obeležimo rastojanje zvezde od Sunca XS sa r i ugao XSA sa θ; ovo su, jednostavno, polarne koordinate tačke X u odnosu na Sunce kao pol i SA kao početnu liniju.



Brzina zvezde relativno u odnosu na Sunce.

Слика 11.1

Jasnoće radi, neka je r izraženo u kilometrima a θ u radijanima, dok je vreme t dato u godinama. Stoga je pogodno izraziti brzine u km/s. U ovim jedinicama, radijalna i transverzalna brzina date su sa

$$V_r = V \sin\theta = \frac{1}{n}\frac{dr}{dt}, \tag{11.3}$$

$$V_T = V \cos\theta = \frac{1}{n} r \frac{d\theta}{dt}, \tag{11.4}$$

gde je n broj sekundi u jednoj godini, odnosno $3{,}156 \cdot 10^7$.

Godišnje sopstveno kretanje zvezde definisano je kao njeno ukupno ugaono pomeranje u jednoj godini na nebeskoj sferi u odnosu na nepokretni ekvator i ekvinokcij i treba ga dati u lučnim sekundama po godini. U ovim jedinicama biće

$$\mu = \frac{d\theta}{dt} \csc 1''. \tag{11.5}$$

Rastojanje zvezde mora se izraziti preko njene paralakse π i treba ga dati u lučnim sekundama. Koristeći (8.11), rastojanje r u km dato je sa

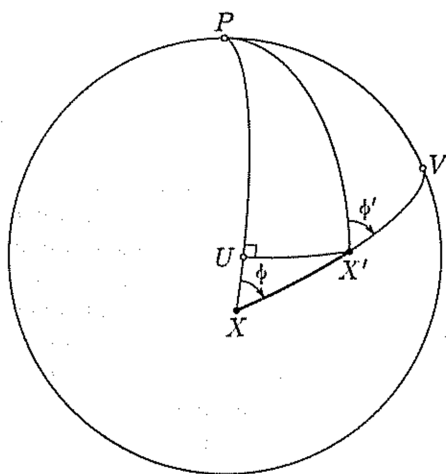
$$r = a\pi^{-1} \csc 1'', \tag{11.6}$$

gde je a astronomska jedinica izražena u km, tj. $a = 1{,}496 \cdot 10^8$. Tada se (11.4) može napisati kao

$$V_T = \frac{a}{n}\frac{\mu}{\pi}, \tag{11.7}$$

što daje numerički rezultat

$$V_T = 4{,}74 \frac{\mu}{\pi} \text{ km/s}. \tag{11.8}$$



Položajni ugao ϕ sopstvenog kretanja zvezde.

Слика 11.2

Godišnje sopstveno kretanje zvezde μ može se razdvojiti na dve komponente, na sopstveno kretanje u rektascenziji i sopstveno kretanje u deklinaciji, označeno, redom, sa μ_α i μ_δ. Ove komponente daju iznos godišnje promene rektascenzije i deklinacije zvezde. Na sl. 11.2, X predstavlja položaj zvezde na nebeskoj sferi u jednom trenutku, a X' njen položaj dt godina kasnije, tako da je $XX' = \mu\, dt$. Ako je P severni nebeski pol, ugao PXX', označen sa ϕ, naziva se *položajni ugao sopstvenog kretanja*. On se meri u smeru prikazanom na dijagramu i može uzimati sve vrednosti između 0 i 360°.

Nacrtajmo mali kružni luk, sa polom u P, kroz tačku X' do preseka sa lukom PX u U. Ako su (α, δ) ekvatorske koordinate tačke X, onda su $(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$ koordinate tačke X', pa se lako vidi da je

$$UX' = d\alpha \cos(\delta + d\delta), \qquad UX = d\delta.$$

Mali trougao UXX' može se aproksimirati ravanskim trouglom sa pravim uglom kod U. Stoga sledi, u prvom redu, da je

$$\begin{aligned} d\alpha \cos\delta &= \mu\, dt \sin\phi \\ d\delta &= \mu\, dt \cos\phi. \end{aligned}$$

Komponente sopstvenog kretanja su jednostavno izvodi $d\alpha/dt$ i $d\delta/dt$. U stvari, u praktičnim jedinicama μ_α biće izraženo u vremenskim sekundama po godini, a μ_δ u lučnim sekundama po godini. Otuda je

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \tfrac{1}{15} \sin\phi \sec\delta \\ \mu_\delta &= \mu \cos\phi. \end{aligned} \qquad (11.9)$$

U gornjoj analizi još nije korišćena pretpostavka da je brzina zvezde konstantna. Praktično, jednačine (11.8) i (11.9) mogu se primeniti u svakom slučaju. Ova pretpostavka je, u stvari, potrebna za određivanje promena komponenata μ_α i μ_δ, u sledećem paragrafu. Posledica pomenute pretpostavke je da se zvezda kreće po pravoj liniji i da je njena putanja na nebeskoj sferi veliki krug. (Putanja zvezde zajedno sa Suncem definiše ravan koja u preseku sa nebeskom sferom daje veliki krug.)

Neka je V tačka na nebeskoj sferi ka kojoj je usmerena brzina zvezde. Tada je jasno da će se V nalaziti na luku XX' velikog kruga. Obeležimo ugao $PX'V$ sa ϕ' —to je položajni ugao sopstvenog kretanja zvezde u trenutku $t + dt$ i može se napisati kao

$$\phi' = PX'V = \phi + d\phi. \qquad (11.10)$$

§ 11.2. Promene sopstvenog kretanja unutar sistema.

Komponente sopstvenog kretanja su prvi izvodi koordinata zvezde. Izračunavanje sopstvenog kretanja zvezda za interval t, može se napisati kao $(\mu_\alpha t, \mu_\delta t)$, što je ekvivalentno skraćenim Tejlorovim serijama do članova drugog reda. Ovo nije dovoljno za bliže zvezde sa velikim sopstvenim kretanjem, pa se tada moraju uzeti bar i članovi drugog reda. Oni su izraženi kao izvodi od μ_α i μ_δ, koji su niže navedeni. U ovim izvodima je pretpostavljeno da su ekvator i ekvinokcij nepokretni, tako da promene u μ_α i μ_δ u potpunosti odgovaraju samo kretanju *zvezde* po nebeskoj sferi. Navešćemo ove promene kao bitne promene komponenata sopstvenog kretanja. Komponente sopstvenog kretanja se, takođe, manjaju usled precesije, ali takve promene se ovde neće razmatrati.

Diferenciranjem μ_α i μ_δ u jednačinama (11.9) imaćemo sledeće dve formule

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\alpha}{dt} &= \frac{1}{15}\frac{d\mu}{dt} \sin\phi \sec\delta + \frac{1}{15}\mu \cos\phi \sec\delta \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{15}\mu \sin\phi \sec\delta \operatorname{tg}\delta \frac{d\delta}{dt} \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= \frac{d\mu}{dt} \cos\phi - \mu \sin\phi \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned} \qquad (11.11)$$

U ovim jednačinama vremenski izvodi od ϕ i δ su u radijanima, ali u drugim slučajevima koriste se i druge mere. Osim toga je

$$\frac{d\delta}{dt} = \mu_\delta \sin 1'' \tag{11.12}$$

Korišćenje rezultata (11.9)s malim pojednostavljenjima može dati

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt} &= \frac{1}{15}\frac{d\mu}{dt}\sin\phi \sec\delta + \frac{1}{15}\mu_\delta \sec\delta \frac{d\phi}{dt} + \mu_\alpha\mu_\delta \operatorname{tg}\delta \sin 1'' \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= \frac{d\mu}{dt}\cos\phi - 15\mu_\alpha \cos\delta \frac{d\phi}{dt}.\end{aligned} \tag{11.13}$$

Da bi koristili ove formule, neophodno je naći iznose promena sopstvenog kretanja i položajnog ugla.

Vratimo se nazad na sl. 11.2. Označavajući koordinate tačke X' sa (α', δ'), imamo da su elementi sfernog trougla PXX' sledeći: $PX = 90° - \delta$, $PX' = 90° - \delta'$, $PXX' = \phi$, $PX'X = 180° - \phi'$. Sinusni obrazac primenjen na ovaj trougao daje

$$\cos\delta \sin\phi = \cos\delta' \sin\phi'.$$

Podrazumeva se da je pomeranje zvezda po luku velikog kruga $XX'V$ i da je veličina $\cos\delta \sin\phi$ stalna, tj.

$$\frac{d}{dt}(\cos\delta \sin\phi) = 0,$$

što daje

$$\frac{d\phi}{dt} = \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\delta \frac{d\delta}{dt}.$$

Na osnovu jednačina (11.9) i (11.12), ovo se može napisati kao

$$\frac{d\phi}{dt} = 15\mu_\alpha \sin\delta \sin 1''. \tag{11.14}$$

❊ Iznos promene μ poznat je kao *sopstveno ubrzanje*. Izvod diferencijalne jednačine (11.4) daje

$$-V \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{n}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{r}{n}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Izvodi od ugla θ eliminišu se korišćenjem jednačine (11.5) koja je njegov prvi izvod. Dalje pojednostavljenje obezbeđuje jednačina (11.3), dajući rezultat

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2n\mu V_r}{r}.$$

Smenjujući r izrazom (11.6) dobija se sopstveno ubrzanje kao

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2n}{a}V_r\mu\pi \sin 1''. \tag{11.15}$$

U numeričkom obliku, ovo je

$$\frac{d\mu}{dt} = -0{,}422 V_r \mu\pi \sin 1''. \tag{11.16}$$

Izrazi koji su izvedeni za $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ mogu se sada uvrstiti u (11.13). Posle manjeg pojednostavljenja, konačni rezultati se dobijaju kao

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mu_\alpha}{\mathrm{d}t} &= -0{,}422 V_r \pi \mu_\alpha \sin 1'' + 2\mu_\alpha\mu_\delta \operatorname{tg}\delta \sin 1'' \\ \frac{\mathrm{d}\mu_\delta}{\mathrm{d}t} &= -0{,}422 V_r \pi \mu_\delta \sin 1'' - 255\mu_\alpha^2 \sin\delta\cos\delta \sin 1''.\end{aligned} \tag{11.17}$$

Napomenimo da su u ovim izrazima μ_α i μ_δ dati, redom, u vremenskim i lučnim sekundama po godini, π je u lučnim sekundama, a V_r je u km/s.

Izvodi dati jednačinama (11.17) potrebni su samo za zvezde sa velikim sopstvenim kretanjima, što je slučaj kod bliskih i brzih zvezda. Ovo omogućava da pomeranja zvezda budu računata sa velikom preciznošću. Pretpostavimo, na primer, da zvezda ima ekvatorske koordinate (α, δ) i sopstveno kretanje (μ_α, μ_δ) za neku početnu epohu. Tada će koordinate zvezde za t godina kasnije biti (α', δ')

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \left(\mu_\alpha + \frac{1}{2}t\frac{\mathrm{d}\mu_\alpha}{\mathrm{d}t}\right)t \\ \delta' &= \delta + \left(\mu_\delta + \frac{1}{2}t\frac{\mathrm{d}\mu_\delta}{\mathrm{d}t}\right)t.\end{aligned} \tag{11.18}$$

Ovo je dovoljno tačno, skoro za sve zvezde, za intervale reda 100 godina ili manje, a samo je u retkim slučajevima potrebno da drugi izvodi sopstvenog kretanja budu uključeni.

Analiza u ovom paragrafu zasnovana je na pretpostavci da je brzina zvezde u odnosu na Sunce konstantna. U stvari, ova pretpostavka dopušta tačno rešenje za pomeranje zvezde, kao što je pokazano u sledećem razmatranju (v. zadatak 11.2).

Neka je $\mathfrak{s} = (x, y, z)$ jedinični vektor u pravcu zvezde. Tada se sopstveno kretanje može razmatrati kao vektor $\boldsymbol{\mu}$, gde je

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{\mathfrak{s}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta). \tag{11.19}$$

Tri komponente vektora $\boldsymbol{\mu}$ bolje je izraziti preko μ_α i μ_δ. Zadržavajući sistem „praktičnih jedinica" koji je ranije bio korišćen, znači da za komponente $\boldsymbol{\mu}$ u lučnim sekundama nalazimo da su

$$\begin{aligned}\mu_x &= -15\sin\alpha\cos\delta\,\mu_\alpha - \cos\alpha\sin\delta\,\mu_\delta \\ \mu_y &= 15\cos\alpha\cos\delta\,\mu_\alpha - \sin\alpha\sin\delta\,\mu_\delta \\ \mu_z &= \cos\delta\,\mu_\delta.\end{aligned} \tag{11.20}$$

Vektor transverzalne brzine povezan je sa vektorom $\boldsymbol{\mu}$ preko jednačine (11.7), naime, imamo da je

$$\mathfrak{V}_T = \frac{a\boldsymbol{\mu}}{n\pi}. \tag{11.21}$$

Stoga, sledi da je ukupna prostorna brzina zvezde, na osnovu (11.1), data sa

$$\mathfrak{V} = V_r\mathfrak{s} + \frac{a}{n\pi}\boldsymbol{\mu}. \tag{11.22}$$

Neka je početni vektor položaja zvezde $\mathfrak{r}$, tj. $\mathfrak{r} = r\mathfrak{s}$, i neka je $\mathfrak{r}'$ vektor položaja t godina kasnije. Pošto je $\mathfrak{v}$ konstantan vektor, to sledi da je

$$\mathfrak{r}' = r\mathfrak{s} + \mathfrak{V}nt.$$

Pomoću jednačine (11.6), ovo se može napisati u obliku

$$\mathfrak{r}' = k\mathfrak{s}^*,$$

gde je k konstanta (jednaka $a\pi^{-1}\csc 1''$), a $\mathfrak{s}^*$ je vektor blizak jedinici dat sa

$$\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}\left(1 + V_r \frac{\pi t}{4{,}74} \sin 1''\right) + \mu t \sin 1''. \tag{11.23}$$

Potpuna normalizacija $\mathfrak{s}^*$ daće jedinični vektor u pravcu zvezde za kasniju epohu. Nedostatak ove analize je, naravno, ograničena tačnost koju unosi uvedena pretpostavka da je brzina zvezde $\mathfrak{V}$ konstantna.

§ 11.3. Precesione promene u sopstvenom kretanju.

U prethodnom paragrafu razmatrane su unutrašnje promene u sopstvenom kretanju. One potiču od dva povezana izvora, (i) promene u samom μ (sopstveno ubrzanje), i (ii) promene μ date preko dve komponente, onako kako se zvezda pomera po nebeskoj sferi. Neophodno je shvatiti, da dok se posmatra promena položaja, koordinatni sistem se smatra nepokretnim. Rektascenzija i deklinacija zvezde, kao i komponente njenog sopstvenog kretanja, odnosile su se na stalni ekvator i ekvinokcij. Precesioni efekti nisu bili razmatrani, te ćemo njih razmatrati sada.

Za bilo koji datum posmatranja ili datum efemeride, koordinate se mogu odnositi na ekvator i ekvinokcij neke epohe, a to ne mora da bude epoha posmatranja. Isto je i sa komponentama sopstvenog kretanja. Međutim, problem koji se razmatra u ovom paragrafu jeste problem transformisanja ovih komponenti sa jedne epohe na drugu.

Najpreciznij način, i analitički najdirektniji, jeste primena matrice rotacije koja je data u §9.6. Pretpostavimo da je μ_0 vektor sopstvenog kretanja u odnosu na vektor i ekvinokcij epohe t_0 i da je μ isti taj vektor ali u odnosu na ekvator i ekvinokcij epohe t. Tada je, po analogiji sa jednačinom (9.32),

$$\mu = \mathfrak{P}\mu_0, \tag{11.24}$$

gde je $\mathfrak{P}$ matrica rotacije koja povezuje dve epohe. Vektori μ_0 i μ vezani su odgovarajućim komponentama u rektascenziji i deklinaciji datim jednačinom (11.20) i njoj inverznom jednačinom, koja je

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \tfrac{1}{15}(1 - z^2)^{-1}(x\mu_y - y\mu_x) \\ \mu_\delta &= (1 - z^2)^{-1/2}\mu_z. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Iako je ovaj metod analitički atraktivan, čak elegantan, može uneti nepotrebno dug račun, posebno ako je potrebno elemente matrice rotacije računati *ab initio*. Komponente sopstvenog kretanja su male veličine i njihove precesione promena su veličine drugog reda. Ipak, nije neophodno sačuvati potpunu preciznost pri izračunavanju njihovih precesionih promena kao preciznost pri izračunavanju precesionih promena koordinata zvezde. Naravno, biće dovoljno koristiti približne formule izvedene u §9.4.

Razmotrimo ponovo dve jednačine (11.11) koje daju iznose promena komponenata sopstvenog kretanja. Te promene su prosto definisane izvodima (μ_α, μ_δ), koji ne zavise od uzroka. Za dobijanje precesionih promena, potrebno je samo zameniti pogodne izraze za tri izvoda na desnoj strani. Očigledno je u ovom slučaju

$$\frac{d\mu}{dt} = 0, \tag{11.26}$$

pošto precesija ne može uticati na totalno sopstveno kretanje, već samo na njegov pravac. Osim toga, sa (9.13) imamo

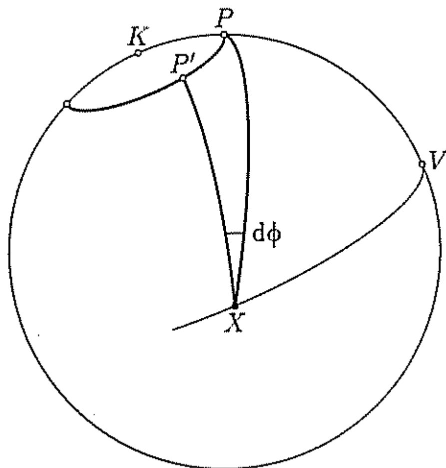
$$\frac{d\alpha}{dt} = n \cos\alpha \sin 1'', \tag{11.27}$$

gde je n izraženo u lučnim sekundama.

Sada razmotrimo iznos precesione promene položajnog ugla ϕ. Neka su P i P' dva položaja pola (sl. 11.3) za epohe razdvojene kratkim vremenskim intervalom dt. Neka se zvezda nalazi u tački X, pa će njeno sopstveno kretanje biti duž velikog kruga XV. Očigledno je da će precesioni priraštaj ugla ϕ za interval dt biti $d\phi = P'XP$. Neka sada (α, δ) i (α', δ') budu, redom, koordinate zvezde koje se odnose na polove P i P' i odgovarajuće ekvinokcije. Tada je $P' = 90° - \delta'$. Usled luni-solarne precesije nebeski pol opisuje mali krug oko pola ekliptike K; pa je dužina luka PP' data sa

$$PP' = \psi \sin\varepsilon \, dt = n \, dt.$$

Strogo gledano, ovo je dužina luka malog kruga, ali kratak vremenski interval nam daje mogućnost da tretiramo PP' kao luk velikog kruga. Osim toga je $KPP' = 90°$, pa je $P'PX = \alpha$. Sada, primenom sinusnog obrasca na sferni trougao $PP'X$ dobijamo



Precesione promene položajnog ugla.

Слика 11.3

$$\sin d\phi \cos\delta' = \sin(n \, dt) \sin\alpha.$$

U graničnom slučaju, kada dt teži nuli, imamo da je

$$\frac{d\phi}{dt} = n \sin\alpha \sec\delta \sin 1'', \tag{11.28}$$

jer je n izraženo u lučnim sekundama.

Rezultati jednačina (11.26), (11.27) i (11.28) mogu se sada uvrstiti u desnu stranu jednačine (11.11). Iznosi precesionih promena (μ_α, μ_δ) dati su kao

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = n\left(\mu_\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\delta + \frac{\mu_\delta}{15} \sin\alpha \sec^2\delta\right) \sin 1''$$
$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -15 n \mu_\alpha \sin\alpha \sin 1''. \tag{11.29}$$

Ove jednačine koriste praktične jedinice, pa je μ_α u vremenskim sekundama, a μ_δ i n su u lučnim sekundama.

U izvodima je uključena samo luni-solarna precesija, zato što planetna precesija utiče samo na ekliptički pol K, a ne i na nebeski pol P. Očigledno je da ne utiče ni na deklinaciju zvezde ni na njen položajni ugao.

Ako su potrebne komponente sopstvenog kretanja za nekoliko različitih trenutaka, da se u svakoj prilici odnose na ekvator i ekvinokcij datuma, biće neophodno primeniti i unutrašnje i precesione promene. Pod ovim okolnostima, ukupan iznos promena se dobija sabiranjem desnih strana jednačina (11.17) i (11.29), što se dalje analizira u sledećem paragrafu.

Konstanta precesije n koja se pojavljuje u (11.29) je oko 20″ i veća je od sopstvenog kretanja svake zvezde. Stoga je jasno da su uvek obe promene uključene, pa je iznos precesione promene onaj koji je veći. Kada se izvode precesione promene za duge vremenske intervale može da bude neophodno poboljšanje tačnosti jednačine (11.29). Ovo se može postići korišćenjem vrednosti n koja se odnosi na sredinu vremenskog intervala. Ipak, najveća tačnost se postiže određivanjem (11.29) i korišćenjem matrice rotacije, ranije objašnjene.

§ 11.4. Baricentrična radijalna brzina.

Strogo rečeno, radijalnu brzinu nije moguće meriti, ali je ona povezana sa sopstvenim kretanjem. Osim toga, zavisi od izbora središta nebeske sfere, tako da je neophodno napraviti razliku između topocentrične, geocentrične i baricentrične radijalne brzine. Pošto radijalna brzina ne zavisi od rastojanja, napravljena razlika je uvek bitna. Otuda sledi da ćemo uvesti različite oznake za topocentričnu, geocentričnu i baricentričnu radijalnu brzinu, i to V_r'', V_r' i V_r, redom.

Radijalna brzina je izvedena iz merenja Doplerovog pomeranja ili crvenog-pomaka, z. Pretpostavimo da je ν_0 posmatrana frekvencija spektralne linije i da je ν nepromenjena frekvencija ove linije obezbeđene laboratorijskim izvorom. Tada je crveni-pomak z dat jednačinom

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0}. \qquad (11.30)$$

Posmatrani crveni-pomak je povezan sa topocentričnom radijalnom brzinom V_r'' preko klasične Doplerove formule, koja je

$$z = \frac{V_r''}{c}. \qquad (11.31)$$

Ova formula je važeća samo za mali crveni-pomak koji odgovara radijalnim brzinama mnogo manjim od brzine sfetlosti. Veliki crveni-pomaci se, neočekivano, pojavljuju kod vangalaktičkih izvora, pa je relativistička interpretacija bitna, što će biti razmatrano kasnije. Međutim, jedačina (11.31) obično je odgovarajuća za redukciju spektroskopskih merenja običnih zvezda. Napomenimo da je pravilo za radijalnu brzinu da se brzine udaljavanja smatraju pozitivnim.

Doplerovo merenje daje topocentričnu radijalnu brzinu zvezde. Ona mora da se svede na baricentar Sunčevog sistema pre ma koje moguće dinamičke interpretacije fenomena. Pretpostavimo da je zvezda u pravcu jediničnog vektora $\mathbf{s}$ i da je

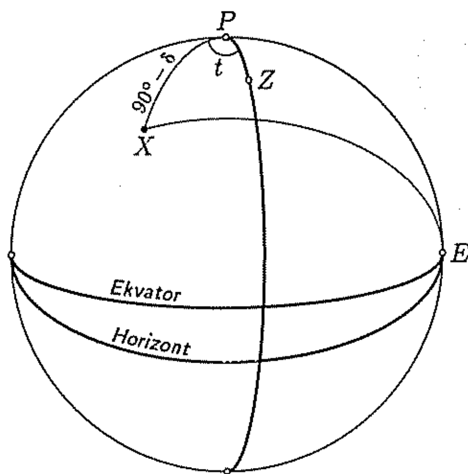
$\mathfrak{v}'$ posmatračeva brzina u odnosu na Zemljino središte, dok je $\mathfrak{v}$ brzina geocentra u odnosu na baricentar Sunčevog sistema. Tada su geocentrična i baricentrična radijalna brzina date sa

$$\begin{aligned} V_r' &= V_r'' + \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{s} \\ V_r &= V_r' + \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{s}. \end{aligned} \qquad (11.32)$$

Brzina $\mathfrak{v}'$ je bila razmatrana u §4.8 zajedno sa dnevnom aberacijom. Na sl. 11.4 ona je usmerena ka tački E, istočnoj tački horizonta. Ako je X položaj zvezde (t, δ) na nebeskoj sferi i P je severni nebeski pol, tada je $PE = 90°$, $PX = 90° - \delta$, a sferni ugao $XPE = 90° + t$. Veličina $\mathfrak{v}'$ je data u jednačini (4.67). S dovoljnom tačnošću, nalazimo da je

$$v' = 0{,}465 \cos\phi' \text{ km/s}, \qquad (11.33)$$

gde je ϕ' posmatračeva geocentrična latituda.



Слика 11.4

Sada, primenom kosinusnog obrasca na sferni trougao PXE dobijamo

$$\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{s} = v' \cos XE = -v' \cos\delta \sin t.$$

Sa jednačinama (11.32) i (11.33) imamo geocentričnu radijalnu brzinu izraženu u km/s kao

$$V_r' = V_r'' - 0{,}465 \cos\phi' \cos\delta \sin t. \qquad (11.34)$$

Ekvatorske komponente Zemljine brzine $\mathfrak{v}$ u odnosu na baricentar Sunčevog sistema utabličene su u *Astronomical Almanacu* kao $\mathfrak{v} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Jedinice u kojima su date ove komponente su AJ/dan. Primenjujući neophodni faktor konverzije, zbog čega je baricentrična radijalna brzina direktno data sa (11.32), u km/s, kao

$$V = V_r' + 1731{,}5(\dot{X} \cos\alpha \cos\delta + \dot{Y} \sin\alpha \cos\delta + \dot{Z} \sin\delta). \qquad (11.35)$$

Zemljina brzina se može razdvojiti na dve brzine, jednu transverzalnu i drugu paralelnu maloj osi njene putanje. Pišemo da je

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1; \qquad (11.36)$$

ove dve brzine su date jednačinom (8.23) u ekliptičkim koordinatama. Osim toga, veličine ovih dveju brzina mogu se izraziti preko konstante aberacije. Imamo da je

$$\begin{aligned} V_0 &= \varkappa c \\ V_1 &= e\varkappa c, \end{aligned} \qquad (11.37)$$

gde je e ekscentričnost Zemljine putanje.

Neka su (λ, β) ekliptičke koordinate zvezde. Tada je

$$\mathfrak{s} = (\cos\lambda \cos\beta, \sin\lambda \cos\beta, \sin\beta).$$

Baricentrična radijalna brzina sledi iz jednačina (11.32), (8.23) i (11.37). Rezultat je

$$V_r = V_r' + \varkappa c \cos\beta\left[\sin(\lambda_\odot - \lambda) + e \sin(\lambda - \varpi)\right]. \qquad (11.38)$$

U ovoj jednačini $\varkappa$ je, naravno, izraženo u lučnim jedinicama.

Kada se uvrste numeričke vrednosti za konstantu aberacije i putanjske elemente, formula data u km/s postaje

$$V_r = V_r' + 29{,}79\cos\beta\sin(\lambda_\odot - \lambda) + 0{,}50\cos\beta\sin(\lambda - \varpi). \quad (11.39)$$

Preciznost ove formule je manja od preciznosti formule (11.35), pošto nije rešena razlika između heliocentra i baricentra. Osim toga, ovo je za mnoge potrebe dovoljne tačnosti.

Mali poslednji član u (11.39) analogan je E-članu godišnje aberacije. On je zaista konstantan i nije izložen godišnjoj promeni. U nekim slučajevima može biti zanemaren. Na primer, kada izvodimo putanju spektroskopski dvojne zvezde (problem će biti razmatran u glavi 19), jedna od njih je primarno značajna za izvođenje radijalne brzine zvezde. Očigledno, godišnja promena mora biti otklonjena za otkrivanje prave putanjske promene i konstantni član je bez uticaja. On će uticati samo na izvođenje vrednosti radijalne brzine celog dvojnog sistema. Na drugoj strani, ako se radijalne brzine zvezda razmatraju u cilju izučavanja zvezdanih kretanja ili dinamike Galaksije, tada će izostavljanjem poslednjeg člana biti unete sistematske greške reda $\frac{1}{2}$km s^{-1} koje zavise od latitude i longitude. U ovakvim okolnostima biće uračunat i poslednji član.

§ **11.5. Pulsarski tajming.** Godišnju varijaciju u drugom članu (11.39) pokazaće radijalna brzina svake zvezde. Amplituda i faza ove varijacije zavise od položaja zvezde. Tako se u toku jedne godine ugao $(\lambda_\odot - \lambda)$ može naći u bilo kom kvadrantu, jer jednačina (11.39) pokazuje da posmatrana radijalna brzina zvezde, posle popravke za malo dnevno pomeranje, osciluje oko njene srednje vrednosti, čak sa amplitudom od $29{,}79\cos\beta$ km/s. Osim toga, maksimalna radijalna brzina dostiže se kada je longituda Sunca jednaka $\lambda + 90°$.

Godišnja varijacija u radijalnoj brzini se koristi kao sredstvo za određivanje koordinata položaja radio pulsara. Spektar radio izvora ne pokazuje spektralne linije kao takve, ali samo pulsiranje predstavlja periodični fenomen, i učestanost njegovog ponavljanja podleže Doplerovom efektu. Period pulsiranja ne može biti određen bez poznavanja brzine pulsara u odnosu na Sunce. Srednja vrednost $\bar{\nu}$, predstavlja frekvenciju koja bi bila merena iz heliocentra. Međutim, promene oko ove srednje vrednosti javljaju se zbog brzine Zemljinog putanjskog kretanja, tako da sa oznakama korišćenim u prethodnom paragrafu, možemo pisati da je

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu_0} - 1 = z = -\frac{\mathfrak{V}_0 \cdot \mathfrak{s}}{c}. \quad (11.40)$$

Ovde je ν_0 posmatrani period pulsiranja, a pretpostavlja se da je korigovano za dnevne efekte koji su već napravljeni. Efekt konstantne komponente V_1 Zemljinog putanjskog kretanja je, naravno, absorbovan unutar srednjeg $\bar{\nu}$. Iz (11.40) i (11.38) sledi da je

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu_0} = 1 - \varkappa\cos\beta\sin(\lambda_\odot - \lambda). \quad (11.41)$$

Tada amplituda promene dopušta da se odredi $\cos\beta$ a time i β, dok trenutak godine koji odgovara minimumu ν_0 ima longitudu Sunca $\lambda_\odot = \lambda + 90°$. Time je longituda određena. Određivanje latitude β ostaje neprecizno u okolini ekliptike. Položaj

pulsara može na ovaj način biti određen iz posmatranja sa jednostavnim antenskim sistemom bez korišćenja radio tehnika visoke razdvojne moći. Trenuci prostiranja pulsa mogu se izvesti toliko precizno da je moguće odrediti položaj sa tačnošću iznad jedne lučne sekunde. Ovakav metod je objašnjen na osnovu ekliptičkog kretanja Zemlje oko Sunca. Ipak, preciznost merenja uslovljava redukciju posmatranja zasnovanu na (11.35), a ne na (11.38). Značajna je razlika između baricentra i heliocentra.

Položaj pulsara može se odrediti bilo iz analize ponavljanja pulseva, kao što je objašnjeno gore, bilo iz proučavanja trenutaka prijema pulseva na Zemlji. U stvari, ova dva metoda su blisko povezana. Razlika u trenucima prijema pulsa na Zemlji i u baricentru može se odrediti iz jednačine (10.22). Upoređujući ovu jednačinu sa jednačinom (11.35) uočiće se velika sličnost. Formula za radijalnu brzinu je u osnovi izvod formule za vremensku razliku. Veza Doplerovog efekta sa vremenom biće jasnija kada se u sledećem paragrafu razmatranje izvrši sa relativističke tačke gledišta.

§ 11.6. Crveni-pomak u opštoj relativnosti. U opštoj teoriji relativnosti nije sasvim prirodno praviti razliku između Doplerovog efekta, usled relativnog kretanja izvora i posmatrača, i gravitacionog crvenog-pomaka, usled razlike grevitacionih potencijala između položaja emitovanja i prijema. Izvesno je da se ova razlika često uočava, ali ona je do određene granice proizvoljna. Za izvore, vrlo udaljene od posmatrača, relativna brzina nije jednoznačno definisana, već zavisi od koordinatnog sistema. Međutim, ono što je invarijantno, to je crveni-pomak.

Da bismo utvrdili gde se nalazi pulsar, razmotrimo emisiju niza pulseva sa frekvencijom ponavljanja ν, a ista analiza se može primeniti i na spektralnu liniju. Neka je ν_0 posmatrana frekvencija ponavljanja pulseva. Pretpostavimo da događaj emisije nekog posebnog pulsa ima koordinate (x_e, y_e, z_e, t_e), dok događaj posmatranja istog pulsa ima koordinate (x_0, y_0, z_0, t_0). Iako poseban izbor koordinatnog sistema ne bi trebalo da utiče na argumente, biće pogodno koristiti kvazi-Dekartove koordinate u Švarcšildovoj metrici, tako da će se argument odnositi na oznake posebnog koordinatnog sistema. Dva događaja, emitovanja i posmatranja, povezana su nultom geodezijskom linijom prostor-vremena. Stoga, sledi da njihove koordinate ne mogu biti proizvoljno označavane ili proizvoljno izabrane. Na primer, ako su četiri koordinate emitovanja navedene proizvoljno, mogu biti izabrane tri prostorne koordinate posmatrača, ali ne i vreme posmatranja, koje je određeno nultom geodezijskom. Još opštije, možemo reći da je nulta geodezijska funkcionalna veza između dva skupa koordinata, koja se može napisati u obliku

$$f(x_e, y_e, z_e, t_e, x_0, y_0, z_0, t_0) = 0. \tag{11.42}$$

Pretpostavimo, dalje, da su ove koordinate $(x_e+dx_e,\ y_e+dy_e,\ z_e+dz_e,\ t_e+dt_e)$ koordinate događaja emisije sledećeg pulsa u nizu, i da je taj puls isti posmatrač posmatrao u događaju $(x_0 + dx_0,\ y_0 + dy_0,\ z_0 + dz_0,\ t_0 + dt_0)$. Vreme između emisija dva pulsa onako kako je određeno na izvoru je jednostavno interval, ds_e, između dva događaja emisija. Slično tome, posmatrano vreme proteklo između prijema dva pulsa je ds_0, interval između dva događaja posmatranja, odakle sledi da su emitovana i posmatrana frekvencija date sa

$$\nu = \frac{1}{ds_e}, \qquad \nu_0 = \frac{1}{ds_0} \tag{11.43}$$

Neka su sada $\mathfrak{V}_e$ i $\mathfrak{V}_0$, redom, trovektori koji daju koordinate brzine izvora i posmatrača. Tada je

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_e &= \left(\frac{dx_e}{dt_e}, \frac{dy_e}{dt_e}, \frac{dz_e}{dt_e}\right) \\ \mathfrak{V}_0 &= \left(\frac{dx_0}{dt_0}, \frac{dy_0}{dt_0}, \frac{dz_0}{dt_0}\right) \end{aligned} \tag{11.44}$$

Osim toga, ako potražimo totalni diferencijal jednačine (11.42) u odnosu na t_e, dobija se sledeći rezultat, u kojem su korišćene oznake jasne,

$$\frac{\partial f}{\partial t_e} + \mathfrak{V}_e \cdot \operatorname{grad}_e f + \left(\frac{\partial f}{\partial t_0} + \mathfrak{V}_0 \cdot \operatorname{grad}_0 f\right)\frac{dt_0}{dt_e} = 0. \tag{11.45}$$

Ova poslednja jednačina dopušta određivanje odnosa $dt_0 : dt_e$, koji je odnos koordinatnog vremena između emisija i prijema pulseva. Međutim, pošto je zasnovano na sličnoj relaciji kao između intervala sopstvenog vremena, iz (11.30) i (11.43) sledi da je

$$1 + z = \frac{ds_0}{ds_e}. \tag{11.46}$$

Poslednja faza argumenta je povezivanje intervala sopstvenog vremena sa odgovarajućim intervalima koordinatnog vremena, što je direktno napravljeno kroz metriku. Na primer, ako je metrika Švarcšildova u njenoj izotropnoj kvazi-Dekartovoj formi, jednačina (3.53) je već jednom izvedena

$$\left(\frac{ds_e}{dt_e}\right)^2 = \frac{\left(1 - \dfrac{m}{2r_e}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{m}{2r_e}\right)^2} - \frac{V_e^2}{c^2}\left(1 + \frac{m}{2r_e}\right)^4, \tag{11.47}$$

sa sličnim izrazom za ds_0/dt_0. Korišćenje metrike u ovom slučaju biće, iz (11.46), ustanovljeno relacijom oblika

$$1 + z = h\frac{dt_0}{dt_e}, \tag{11.48}$$

gde je h funkcija koordinata položaja i koordinata brzina izvora i posmatrača. Crveni-pomak se tada može izvesti korišćenjem jednačine (11.45). Oblik (11.46) pokazuje da je to invarijantna veličina zavisna od koordinatnog sistema, koja sadrži i Doplerov i gravitacioni efekt.

Vratimo se sada posebnom slučaju Švarcšildovog prostor-vremena. Jednačina (11.47) dovoljno tačno daje

$$\frac{ds_e}{dt_e} = 1 - \frac{m}{r_e} - \frac{1}{2}\frac{V_e^2}{c^2}.$$

Stoga sledi da će jednačina (11.47) uzeti oblik

$$1 + z = \left[1 + \frac{m}{r_e} - \frac{m}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{(V_e^2 - V_0^2)}{c^2}\right]\frac{dt_0}{dt_e}. \tag{11.49}$$

Napomenimo da je zagrada na desnoj strani jednačine (11.49) različita od jedinice samo za veličine drugog reda, tako je Doplerov efekt veličina prvog reda sadržana u izvodu dt_0/dt_e.

Radijalna brzina izvora ne može se ubedljivo definisati na invarijantan način, ali je to moguće za koordinate radijalne brzine V_r. Stavljajući $\mathfrak{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$ i $\mathfrak{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, koordinata rastojanja ρ definisana je , kao u (10.46), sa

$$\rho s_0 = \mathfrak{r}_e - \mathfrak{r}_0, \tag{11.50}$$

gde je s_0 postojeći jedinični vektor. Tada koordinata radijalne brzine može biti uzeta kao

$$V_r = \frac{d\rho}{dt_e}. \tag{11.51}$$

Relacija (11.42) između koordinata emisije i posmatranja već je bila zastupljena u analizi §10.8. Sa nekim malim promenama, uglavnom u oznakama, jednačina (10.55) daje

$$t_0 = t_e + \frac{\rho}{c} + \frac{2m}{c}\ln\left(\frac{r_e + r_0 + \rho}{r_e + r_0 - \rho}\right). \tag{11.52}$$

Poslednji član u ovoj jednačini već je veličina drugog reda, tako da je njegov izvod veličina trećeg reda koja se zbog toga može zanemariti. Diferencijal

$$\frac{dt_0}{dt_e} = 1 + \frac{V_r}{c}, \tag{11.53}$$

je dovoljne tačnosti. Ovo je baš ono što bi očekivali u klasičnom pristupu. Konačno, kombinujući ovaj rezultat sa (11.49) dobićemo opšti relativistički crveni-pomak u Švarcšildovom prostor-vremenu kao

$$z = \frac{V_r}{c} + m\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_0}\right) + \frac{1}{2}\frac{(V_e^2 - V_0^2)}{c^2}. \tag{11.54}$$

Naravno, ova popravka brzine je veličina drugog reda, a ekvivalentna je veličini prvog reda u Švarcšildovom radijusu. Prvi član na desnoj strani (11.54) je klasični Doplerov efekt, drugi član je gravitacioni crveni-pomak, a treći je Doplerov efekt drugog reda.

Jednačina (11.54) bila je razvijena iz razmatranja niza pulseva i daje Doplerov pomak u periodu pulsacije. Ovo, takođe, može biti primenjeno na prirodnu spektralnu liniju ili radio frekvenciju (*a space-borne radio beacon*). Na kraju, svi članovi u nekim slučajevima mogu biti značajni.

Formula je bila zasnovana na Švarcšildovom prostor-vremenu i tako je neposredno primenjena na međuplanetarne stanice. U odnosu na vreme pulsiranja, napomenimo da gravitacioni crveni-pomak u sopstvenom gravitacionom polju pulsara nije uzet u obzir. Mora biti pretpostavljeno da je ono konstantno i da je absorbovano u frekvenciji emisije ν_e. Za ovakvo objašnjenje, jednačina (11.54) nije adekvatna za proučavanje dvojnog pulsara, pa je neophodno dalje modelovanje.

Kao krajnji primer, primenimo (11.54) na spektralnu liniju Sunca. Tada je r_e jedan Sunčev prečnik i $r_e \ll r_0$. U najmanjem stepenu, za jedan procenat tačnosti, možemo zanemariti član m/r_0 i dobićemo Doplerov član drugog reda

$$z = \frac{V_r}{c} + \frac{m}{r_e}. \tag{11.55}$$

Ova formula predviđa da spektralna linija Sunca ispoljava Doplerov pomak usled radijalne komponente putanjskog kretanja i sistematskog gravitacionog crvenog-pomaka. Doplerov pomak može imati i jedan i drugi znak, i ima amplitudu oko 0,5 km/s. Gravitacioni crveni-pomak jednak je brzini 0,64 km/s, koja se dobro uklapa u tradicionalna merenja spektroskopije Sunca. Ovo je treći klasični test opšte relativnosti. Ipak, merenja Sunca bila su manje ubedljiva od očekivanih. Podsećamo da je gravitacioni crveni-pomak u većoj meri neshvatljiv sa sistematskim efektima koji potiču od uslova u Sunčevoj atmosferi. Međutim, gravitacioni crveni-pomak je nedvosmisleno uveden u laboratorijska merenja (Pound & Snider, 1965). To je malo značajno za verodostojnost opšte teorije relativnosti *per se* nego drugi testovi, pošto skoro svaka post-Njutnova teorija predviđa identični gravitacioni crveni-pomak.

§ **11.7. Sistematski uticaji na sopstveno kretanje i radijalnu brzinu.** Jedini direktni nedvosmislen način za određivanje zvezdanih daljina je merenje godišnje paralakse zvezda i ono je temelj skale astronomskih rastojanja. Međutim, ova skala mora da se proteže i na rastojanja koja su daleko izvan paralaktičkih određivanja. Daljine zvezda izvan neposredne Sunčeve okoline bolje se utvrđuju statističkim zaključivanjem nego neposrednim merenjem, što je mnogo prefinjeniji i mnogo nepouzdaniji postupak. Raspon skale se zasniva na dugom i razrađenom lancu argumenata, u kojem neosporno svaka karika zavisi od svih prethodnih. Bilo koji argument mora da pruža koristan i pronicljiv dokaz koji se stavlja na raspolaganje, stoga sopstveno kretanje i radijalna brzina igraju značajne uloge. Sopstveno kretanje je važan indikator zvezdanih daljina u Sunčevoj okolini, ali izvan granica paralaktičkog merenja. Čak u ovom kontekstu radijalna brzina obezbeđuje koristan prilog. Za najudaljenije vangalaktičke izvore, praktično samo kvantitativni načini preostaju za ocenu daljine, koja ostaje neizvesna.

Celokupno zvezdano nebo može biti obuhvaćeno rutinskim merenjima sopstvenog kretanja iz malog broja fotoploča snimljenih u toku znatnog vremenskog intervala, dok paralaktička merenja zahtevaju još veći napor i često su neuspešna. Merenje radijalne brzine povlači sa sobom izučavanje pojedinačnih zvezda, tako da se spektar zvezde može upoređivati sa laboratorijskim standardima. Međutim, merenje sopstvenog kretanja je polazna tačka, čime se obezbeđuje prvi nagoveštaj za izbor zvezda koje bi mogle biti podesne za paralaktičko merenje.

Sve zvezde u Sunčevoj okolini, uključujući Sunce, su u putanjskom kretanju oko Galaktičkog centra. Sopstveno kretanje pojedinačne zvezde proizilazi iz njene *relativne* transverzalne brzine u odnosu na Sunce i ono je obično mnogo manje nego brzina zvezde ili Sunca u odnosu na središte Galaksije. Ono što se posmatra u suštini je diferencijalni efekt. Lokalni standardni sistem mirovanja (LSSM) bio je definisan u §3.2 kao sistem referencije koji se kreće oko Galaktičkog centra sa srednjom brzinom zvezda u Sunčevoj okolini. Pretpostavimo da Sunce ima brzinu U u odnosu na LSSM. U toku jedne godine ovo pomeranje iznosi nU km, sa oznakama §1.1, i ono se odražava u sopstvenom kretanju zvezde. Sada pomeranje od a kilometara (1 AJ) daje godišnju paralaksu zvezde π. Po analogiji sa (11.6), pomeranje nU km je uzeto u obzir za definiciju *sekularne paralakse h* date, u lučnim sekundama, sa

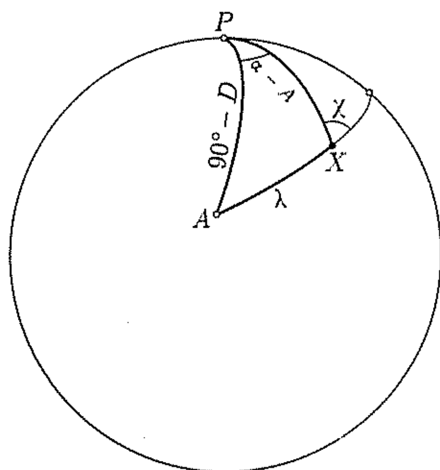
$$r = nUh^{-1} \csc 1''. \tag{11.56}$$

Usled kretanja Sunca, sekularna paralaksa daje godišnje pomeranje zvezde čiji je pravac normalan na pravac kretanja Sunca. Iz (11.6) i (11.56) izvodi se

$$h = \frac{nU}{a}\pi = \frac{U}{4{,}74}\pi. \tag{11.57}$$

Brzina onog dela sopstvenog kretanja koje proizilazi od Sunca u odnosu na LSSM, poznata je kao (sekularno) *paralaktičko kretanje*, pre nego njegov preostali deo. Označimo komponente paralaktičkog kretanja sa (P_α, P_δ), a ukupno paralaktičko kretanje sa μ_p. Tačka A na nebeskoj sferi (sl. 11.5) ka kojoj je usmereno kretanje Sunca naziva se *apeks Sunčevog kretanja*. Neka su (A, D) njene ekvatorske koordinate i neka su (α, δ) ekvatorske koordinate zvezde X. Paralaktičko kretanje zvezde biće duž velikog kruga AX. Ugao χ, prikazan na sl. 11.5, je njen položajni ugao; pa je iz (11.9)

$$P_\alpha = \tfrac{1}{15}\mu_p \sin\chi \sc\delta \qquad P_\delta = \mu_\delta \cos\chi. \tag{11.58}$$



Слика 11.5

Zanemarujući sopstveno kretanje zvezde u odnosu na LSSM, očigledno je da neka transverzalna brzina povezana sa Suncem jeste $U \sin AX$ ili $U \sin\lambda$, pa je sa (11.8)

$$\mu_p = \frac{U\pi \sin\lambda}{4{,}74}. \tag{11.59}$$

Koristeći ovo i (11.57), jednačina (11.58) može se izraziti sa

$$P_\alpha = \tfrac{1}{15} h \sin\lambda \sin\chi \sc\delta \qquad P_\delta = h \sin\lambda \cos\chi. \tag{11.60}$$

Na odgovarajući način, jednačina (11.60) može se izraziti preko rektascenzije i deklinacije apeksa Sunčevog kretanja. U sfernom trouglu APX, elementi su sledeći $PA = 90° - D$, $PX = 90° - \delta$, $AX = \lambda$, $A\hat{P}X = \alpha - A$, $P\hat{X}A = 180° - \chi$. Uglovi λ i χ se eliminišu iz (11.60) primenom sinusnog i sinusno-kosinusnog obrasca, dajući rezultate

$$P_\alpha = \tfrac{1}{15} h \sin(\alpha - A) \cos D \sc\delta \qquad P_\delta = h\left[\cos D \sin\delta \cos(\alpha - A) - \sin D \cos\delta\right]. \tag{11.61}$$

Komponente P_α i P_δ su sistematski efekti koji će biti prisutni u sopstvenom kretanju svake zvezde. Sličan sistematski efekt izražen je u radijalnoj brzini. Označimo onaj deo radijalne brzine koji proizilazi od kretanja Sunca sa V_p. Očigledno je $V_p = -U \cos\lambda$. Primena kosinusnog obrasca na sferni trougao PAX daje

$$V_p = -U\left[\sin D \sin\delta + \cos D \cos\delta \cos(\alpha - A)\right]. \tag{11.62}$$

Metode za određivanje brzine Sunca U i njegovog pravca (A, D) razmatrane su u glavi 14. Komponente paralaktičkog kretanja date su sa (11.61) preko sekularne paralakse zvezde h. Paralaktičko kretanje pojedinačne zvezde može se pomešati sa

sopstvenim kretanjem zvezde, ali statistička analiza homogenih grupa otkriva njihovo prisustvo u potpunosti. Ako se sekularna paralaksa može odrediti, tada se može iz (11.57) izvesti trigonometrijska paralaksa, a odatle daljina zvezde. Merenja radijalne brzine obezbeđuju nezavisnu informaciju preko (11.62), što uspostavlja, ako ne rigoroznu kontrolu, barem potvrdu koja smanjuje sumnjivost statističkog procesa.

§ 11.8. Kosmološki crveni-pomak.

U posmatračkoj kosmologiji merenja radijalne brzine postaju posebno značajna. Za vrlo udaljene vangalaktičke izvore, bilo da su normalne galaksije, neobične galaksije, ili kvazari, posmatrački podaci su uvek oskudni. Tri značajna posmatračka parametra koji se mogu pridružiti izvorima jesu crveni-pomak, prividna veličina i ugaoni prečnik. Svaki od njih se može iskoristiti kao indikator rastojanja. Prividni sjaj i ugaoni prečnik izvora treba da rastu na poznati način sa porastom rastojanja, pod pretpostavkom da su luminoznost i fizički prečnik izvora poznati. Međutim, i ovde postoje važne relativističke modifikacije interpretacije posmatranja. Crveni-pomak se objašnjava širenjem kosmosa i to mora biti tretirano relativistički. Kosmološki modeli kosmosa mogu da predvide kako su ova tri parametra povezana za identične izvore. Namera je da povežemo crveni-pomak osnovnim osobinama najjednostavnijih, ali najšire prihvaćenih kosmoloških modela.

Homogeni izotropni model u opštoj relativnosti je opisan metrikom koja se može izložiti kao

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{[R(t)]^2}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi\right). \tag{11.63}$$

Ova metrička forma je poznata kao Robertson-Valkerova (ROBERTSON-WALKER) metrika. Konstanta k označava krivinu prostora i bez umanjenja opštosti možemo ograničiti njene vrednosti na $k = \pm 1$ ili 0. Koordinatni sistem ima početak u topocentru (posmatraču). To je „ko-pokretni“ koordinatni sistem, koji se kreće usled širenja kosmosa, tako da su prostorne koordinate (r, θ, ϕ) konstantne za materijalnu tačku, a, stoga, za svaki izvor zračenja. Širenje kosmosa je sadržano u promeni *faktora razmere* R koji je funkcija samo vremena. Trenutak u prošlosti kada je R bilo nula odgovara trenutku velikog praska vasione. Funkcija $R(t)$ je definisana Ajnštajnovim jednačinama posle uključivanja parametara modela, kao što su prosečna gustina kosmosa i brzina njegovog širenja u današnje vreme.

Crveni-pomak z izveden je pomoću metoda koji je bio razvijen u §11.6. Razmotrimo zračenje emitovano iz tačke (r_e, θ_e, ϕ_e) u trenutku t_e i koje je primljeno u koordinatnom početku u sadašnje vreme t_0. Svetska linija ovog zračenja je radijalna nulta geodezijska, čija je diferencijalna jednačina izvedena iz (11.63)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{c(1-kr^2)^{1/2}}{R(t)}.$$

Stoga, sledi da su vremena emisije i posmatranja povezana sledećom integralnom jednačinom

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \frac{1}{c}\int_0^{r_e} \frac{\mathrm{d}r}{(1-kr^2)^{1/2}} \tag{11.64}$$

Sada je crveni-pomak preko (11.46) povezan sa intervalima sopstvenog vremena. Ali, kako izvor i posmatrač miruju u odnosu na koordinatni sistem, to jednačina (11.63) navodi da je

$$1+z=\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s_e}=\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t_e}. \tag{11.65}$$

Sada je desna strana jednačine (11.64) nezavisna od vremena, te diferenciranje po t_e daje

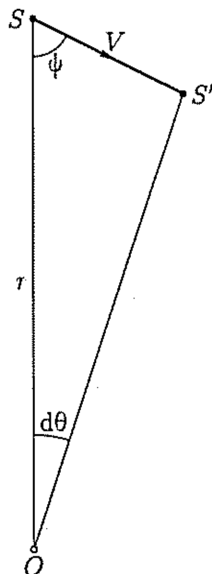
$$\frac{1}{R(t_0)}\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t_e}-\frac{1}{R(t_e)}=0.$$

Na kraju, smenjivanje ovog rezultata u (11.65) daće crveni-pomak kao

$$1+z=\frac{R(t_0)}{R(t_e)}. \tag{11.66}$$

Vidimo da crveni-pomak udaljenih izvora nastaje iz razlike faktora razmere kosmosa između trenutka emisije zračenja i trenutka njegovog prijema, što je prilično različito od običnog Doplerovog efekta. Verovatno je bolje, jednostavno, smatrati da je crveni-pomak osobina prostor-vremena, nego pokušavati pridružiti crveni-pomak kinematičkim ili, čak, gravitacijskim uzrocima. Udaljeniji izvori imaće veće crvene-pomake, jer je vreme za koje putuje zračenje duže, tako da je univerzalni faktor razmere imao manju vrednost kada je zračenje koje sada posmatramo bilo emitovano.

Sopstveno kretanje za vangalaktičke izvore nije merljivo. Specifičniji komentar ovog efekta već je dat na kraju §3.2. Ipak, postoje strukturne promene u okviru nekih vrlo udaljenih radio izvora koje su analogne sopstvenom kretanju, iako sopstveno kretanje izvora ne može biti detektovano direktno. Jedini način da se oceni rastojanje do izvora je smatrati ceo posmatrani crveni-pomak kosmološkog porekla i interpretirati ga preko širenja kosmosa. Kada je poznato rastojanje, strukturne promene se mogu smatrati transverzalnim brzinama ako se koristi standardna jednačina sopstvenog kretanja (11.8). Brzine izvedene na ovaj način mogu biti veoma velike, te se može sumnjati u ocenu rastojanja, pa čak i u sam princip kosmološke interpretacije crvenog-pomaka. U nekoliko slučajeva, brzine izvedene na ovaj način prelaze brzinu svetlosti. Iako je ove superluminozne brzine teško razumeti, one nisu u suprotnosti sa bilo kojim relativističkim principom, kao što će sledeći argumenti pokazati.



Слика 11.6

Posmatrajmo izvor S na rastojanju r od posmatrača O, kao što je prikazano na sl. 11.6. Pretpostavimo da se izvor kreće brzinom V u pravcu koji zaklapa ugao ψ sa obrnutim radijalnim pravcem SO. Tada je radijalna brzina $-V\cos\psi$. Neka S bude položaj izvora u trenutku t i neka S' bude njegov položaj posle kratkog vremenskog intervala $\mathrm{d}t$. Tada je $SS'=V\,\mathrm{d}t$. Konačno, neka je $\mathrm{d}\theta$ ugao pod kojim posmatrač vidi duž SS'. Tada je

$$r\,\mathrm{d}\theta=V\sin\psi\,\mathrm{d}t. \tag{11.67}$$

Neka je sada t_0 trenutak u kojem je zračenje emitovano iz S posmatrano u O. Prava transverzalna brzina je $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ili $V\sin\psi$ iz (11.67). Ono što se odmah izvodi kao transverzalna brzina iz sopstvenog kretanja, ili strukturna promena, nije $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, nego $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t_0$. Kako je $r = c(t - t_0)$, posle diferenciranja sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -V\cos\psi = c\left(\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t} - 1\right).$$

Odavde je izvedena transverzalna brzina

$$V_T = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t_0} = \frac{V\sin\psi}{1 - V\cos\psi/c} \qquad (11.68)$$

Ovo može biti superluminalnom čak i kada je prava brzina manja od brzine svetlosti. Za fiksiranu vrednost V maksimalna vrednost V_T koja se nalazi iz (11.68) odgovara, ne $\psi = 90°$, nego $\psi = \arccos V/c$. Za ovu maksimalnu vrednost V_T nalazimo tada da je γV, što postaje superluminalno ako V prelazi $c/\sqrt{2}$.

Zadaci

11.1. Pokazati da ako je brzina zvezde u odnosu na Sunce konstantna, to da znači da se njena radijalna brzina mora stalno povećavati u algebarskom smislu. Pokazati, u konvencionalnim jedinicama, da je brzina promene data sa

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 4{,}74\frac{\mu^2}{\pi}\sin 1''.$$

11.2. Dati podaci se odnose na Bernardovu zvezdu za epohu 1950,0:

$$\alpha = 17^h55^m40^s \qquad \delta = 4°33'$$
$$\mu = 10'',25 \qquad \phi = 356°$$
$$\rho = -108\,\mathrm{km/s} \qquad \pi = 0'',546.$$

Odrediti epohu kada će radijalna brzina zvezde biti nula. Izračunati položaj zvezde (u odnosu na ekvator i ekvinokcij 1950), njeno sopstveno kretanje i paralaksu za ovu epohu.

11.3. Zvezda ima za standardnu epohu vektor položaja (x_0, y_0, z_0). Pokazati da zanemarivanjem sopstvenog ubrzanja, njen vektor položaja posle t godina ima komponente date sa

$$x = x_0 + \mu_x t - \frac{1}{2}(\mu t)^2 x_0, \text{ itd.},$$

gde su komponente vektora μ i njegova veličina izražene u lučnim jedinicama. Pod kojim uslovima bi ovo bila dobra aproksimacija?

11.4. Zvezda ima ekvatorske koordinate (α, δ), a njeno sopstveno kretanje ima položajni ugao ϕ; sve se odnosi na srednji ekvator i ekvinokcij datuma. Pokazati da je položajni ugao u odnosu na standardni ekvator i ekvinokcij ϕ_0, tačno dat jednačinom

$$\mathrm{tg}(\phi - \phi_0) = \frac{\sin(\alpha - z_A)\sin\theta_A}{\cos\delta\cos\theta_A + \sin\delta\sin\theta_A\cos(\alpha - z_A)},$$

gde su z_A i θ_A precesioni uglovi definisani u §9.5.

11.5. Izračunati gravitacioni crveni-pomak za liniju natrijuma 5896 Å u Sunčevom spektru, uzimajući da je radijus Sunca $6{,}96 \cdot 10^5$ km.

11.6. Nađeno je da period pulsiranja varira u toku godine u granicama $0^s{,}714\,460\,0$ i $0^s{,}714\,577\,4$. Maksimalni period se javlja kada je longituda Sunca 335°. Izračunati rektascenziju i deklinaciju pulsara. [Uzeti $\varepsilon = 23°26',5$; $\varkappa = 20'',496$.]

11.7. Dokazati da je uvek moguće uskladiti radijalne koordinate i faktor skale R u Robertson-Valkerovoj metrici, tako da to uzima formu (11.63) sa $k = \pm 1$ ili 0.

11.8. U homogenom izotropnom modelu vasione, „horizont" je određen pod uslovom da crveni-pomak teži beskonačnosti. Ovo se normalno pojavljuje na graničnoj vrednosti radijalne koordinate r. Pokazati da ovo implicira da ugaoni dijametar izvora, istog fizičkog rastojanja, ima minimalnu vrednost za granični crveni-pomak.

11.9. Potkrepiti iskaz koji je bio napravljen u zadnjem pasusu §11.8.

Глава Дванаеста

Srednje i prividne koordinate

§ **12.1. Pojmovi.** Mnoge pojave uzrokuju promene koordinata zvezda. Najznačajnije su sopstveno kretanje, precesija i nutacija, aberacija i paralaksa. Ove pojave su bile pojedinačno razmatrane u glavama 11, 9 i 8. Cilj ove glave je da izvede obrasce koji obuhvataju sve ove različite promene u smislu pogodnom za praktično korišćenje.

Pretpostavimo da su rektascenzija i deklinacija koordinate date zvezde. Da bi ova informacija bila nedvosmislena, neophodno je imati ili barem poznavati još neke podatke. Moramo postaviti sledeća pitanja:

(i) Na koji *datum* se ove koordinate odnose?
(ii) Šta je centar nebeske sfere na koju se ove koordinate odnose?
(iii) Koji *ekvator* i *ekvinokcij* nebeske sfere su izabrani?

Datum koji je spomenut u prvom pitanju odnosi se na datum posmatranja ili na datum efemeride. Dok ovo nije poznato, ne može se uzeti u obzir sopstveno kretanje zvezde.

Centar nebeske sfere koji se koristi definiše početak koordinatnog sistema. Postoji nekoliko mogućnosti, od kojih su najznačajnije baricentar Sunčevog sistema i geocentar. Prelaz sa jednog na drugi vrši se obračunavanjem iznosa godišnje aberacije i godišnje paralakse. U mnogim ovim paragrafima izostavljene su manje popravke za relativističko savijanje svetlosti i aberacioni članovi drugog reda.

Praktično, za istu epohu, mogu se izabrati i jedan i drugi ekvator i ekvinokcij, ※ kao *srednji ekvator* i *srednji ekvinokcij* ili kao *pravi ekvator* i *pravi ekvinokcij*. U prvom slučaju, obračunava se samo iznos precesije, dok se u drugom slučaju dodaje i iznos nutacije. U oba slučaja epoha može, a ne mora, biti ista kao datum posmatranja koji se odnosi na pitanje (i).

Jasno je da su mogućnosti za definisanje koordinatnog sistema mnogostruke. Standardizacija je poželjna, a to je konvencionalni prikaz definicija i oznaka navedenih niže.

※ **(a) Srednji položaj.** Srednje koordinate zvezde (α_1, δ_1) su njene koordinate na baricentričnoj nebeskoj sferi u odnosu na srednji ekvator i srednji ekvinokcij datuma. (Ovo podrazumeva da je epoha ekvatora i ekvinokcija ista kao epoha datuma posmatranja.)

Srednje koordinate zvezde menjaju se samo usled precesije i sopstvenog kretanja, dok su sve ostale popravke isključene definicijom.

(b) Pravi položaj. Prave koordinate zvezde (α_2, δ_2) su njene koordinate na baricentričnoj nebeskoj sferi u odnosu na pravi ekvator i pravi ekvinokcij datuma.

Prave koordinate unose popravke za nutaciju, ali se retko koriste, jer ne predstavljaju ništa više nego kariku pri prelasku sa srednjeg na prividni položaj zvezde koji je definisan niže.

(c) Prividni položaj. Prividne koordinate zvezde (α, δ) su njene koordinate na geocentričnoj nebeskoj sferi u odnosu na pravi ekvator i pravi ekvinokcij datuma.

Prividni položaj povlači za sobom još i popravke za godišnju aberaciju i godišnju paralaksu. On se razlikuje od posmatranog položaja samo za popravke lokalne refrakcije i dnevne aberacije koji nisu obračunati.

Naravno, definisanje srednjeg, pravog i prividnog položaja zvezde ne iscrpljuje sve mogućnosti definisanja koordinata zvezde, ali ovi su dovoljni za mnoge potrebe. Međutim, potpunosti radi, dodajemo još jednu formalnu definiciju.

(d) Standardni srednji položaj. Standardne srednje koordinate zvezde (α_0, δ_0) su njene srednje koordinate za datum standardne epohe.

Standardna epoha biće po pravilu Beselova B1950,0 ili Julijanska J2000,0. Kataloški položaj zvezde je standardni srednji položaj, što ćemo uzeti kao naše polazište i ispitati kako se sa koordinata (α_0, δ_0) prelazi na prividne koordinate (α, δ). Ovde podsećamo čitaoca da je, u glavi 5, dat postupak kako se meridijanska posmatranja mogu svesti na prividne koordinate. Sadašnje razmatranje će kompletirati niz argumenata koji dopuštaju da standardni položaji budu uporedivi sa aktuelnim posmatranjima. Obrnut postupak se koristi pri računu zvezdanih kataloga.

Astronomical Almanac preporučuje i daje podatke za dva različita metoda redukcije. Prvi metod, razmatran u sledeća tri paragrafa, direktno radi sa rektascenzijom i deklinacijom. On kombinuje popravke različitih pojava preko podataka datih u almanasima, poznatih kao *Beselovi dnevni brojevi*. Drugi metod koristi vektorsku aproksimaciju i radi sa pravouglim koordinatama. On će biti opisan u §12.5.

§ 12.2. Godišnje i vekovne promene.

Pretpostavimo da su nam potrebne prividne koordinate zvezde za datum koji je $(t + \tau)$ godina posle standardne epohe, pri čemu je $(t - \frac{1}{2})$ celobrojna veličina odabrana tako da je preostali deo τ u intervalu $-\frac{1}{2} < \tau \leq \frac{1}{2}$. Tada se, kao prvi korak, računaju srednje koordinate za vreme od t godina posle standardne epohe. Te srednje koordinate (α_1, δ_1) mogu se napisati u obliku Tejlorovog reda za standardnu (katalošku) epohu. Zadržavajući se samo na prva tri člana, imamo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2 \\ \delta_1 &= \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 t^2. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Naravno, indeks 0 označava da se koordinata ili izvod odnose na katalošku epohu.

Detaljan zvezdani katalog daje standardne srednje koordinate (α_0, δ_0) a, takođe, i njihova prva dva izvoda. Prvi izvodi u (12.1) odnose se na *godišnje promene u rektascenziji i deklinaciji*. Pošto se obračunavaju samo precesija i sopstveno kretanje, godišnje promene mogu da se, sa (9.13), izraze kao

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 &= m + \frac{1}{15} n \sin\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0 + \mu_\alpha \\ \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 &= n\cos\alpha_0 + \mu_\delta . \end{aligned} \tag{12.2}$$

Naravno, razumljivo je da se komponente sopstvenog kretanja i komponente precesije odnose na standardnu epohu. U katalozima će iznosi godišnjih promena u rektascenziji i godišnjih promena u deklinaciji biti, redom, u vremenskim i lučnim sekundama po godini. Pretpostavka je da se ove jedinice koriste na desnim stranama jednačina (12.2); n je izraženo u lučnim sekundama.

Drugi izvodi u (12.1) su vrlo male veličine. Međutim, iznosi u katalozima su sporo promenljivi, a drugi izvodi su dati u obliku *sekularnih promena* (S_α, S_δ) *u rektascenziji i deklinaciji*. Oni su definisani kao iznosi vekovnih promena koordinata, i odgovaraju godišnjim promenama pomnoženim sa 100, tj.

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 100\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 \\ S_\delta &= 100\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 . \end{aligned} \tag{12.3}$$

Račun sekularnih promena je komplikovaniji, ali se on izvodi pri pravljenju zvezdanog kataloga. Diferencijalne jednačine (12.2) date su u odgovarajućim jedinicama,

$$\begin{aligned} S_\alpha = 100 \Bigg[&\frac{dm}{dt} + \frac{1}{15}\frac{dn}{dt}\sin\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0 + \frac{d\mu_\alpha}{dt} + n\cos\alpha_0 \operatorname{tg}\delta_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 \sin 1'' \\ &+ \frac{1}{15} n \sin\alpha_0 \sec^2\delta_0 \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 \sin 1'' \Bigg] \\ S_\delta = 100 \Bigg[&\frac{dn}{dt}\cos\alpha_0 + \frac{d\mu_\delta}{dt} - 15 n \sin\alpha_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 \sin 1'' \Bigg] . \end{aligned} \tag{12.4}$$

U ovim jednačinama se ne vidi obim računa, jer iznosi promena komponenata sopstvenog kretanja sadrže mnogo pojedinačnih članova. Kao što je objašnjeno u glavi 11, komponente sopstvenog kretanja imaju unutrašnje precesione promene. One su neophodne u jednačinama (12.4), tako bi izvodi od μ_α i μ_δ u ovim jednačinama bili zamenjeni zbirom desnih strana jednačina (11.17) i (11.29). Sam račun sekularnih promena je obeshrabrujuće veliki posao.

S druge strane, ustaljeni šablon korišćenja podataka zvezdanog kataloga je otvoren. Jednačine (12.1) mogu biti napisane preko izraza za vekovne promene kao

$$\alpha_1 = \alpha_0 + t\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 + \frac{S_\alpha t}{200}\right]$$
$$\delta_1 = \delta_0 + t\left[\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 + \frac{S_\delta t}{200}\right]. \tag{12.5}$$

Ove se jednačine mogu poboljšati uključivanjem članova trećeg reda, i neki zvezdani katalozi sadrže takve članove. Uz to, formalno izraženi, treći izvodi su vrlo komplikovani, ali jednom procenjeni, oni se lako koriste u Tejlorovim izrazima.

§ 12.3. Pravi položaj zvezde.

Koordinate (α_1, δ_1), izvedene u prošlom paragrafu, daju srednji položaj zvezde za sredinu godine u kojoj se nalazi traženi datum. Sledeći korak je računanje pravog položaja zvezde (α_2, δ_2) za taj traženi datum. Ovo izračunavanje zahteva dalje popravke i za precesiju i za sopstveno kretanje, ali samo za kratak vremenski interval τ, kao i dodavanje popravke za nutaciju, što možemo napisati kao

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_1$$
$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_1. \tag{12.6}$$

Zatim, koristeći jednačine (9.53), (9.57) i (12.2), očigledno je

$$\Delta\alpha_1 = \frac{1}{15}m\tau + \frac{1}{15}n\tau\sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1 + \mu_\alpha\tau$$
$$+ \frac{\Delta\psi}{15}(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha_1\operatorname{tg}\delta_1) - \frac{\Delta\varepsilon}{15}\cos\alpha_1\operatorname{tg}\delta_1, \tag{12.7}$$
$$\Delta\delta_1 = n\tau\cos\alpha_1 + \mu_\delta\tau + \Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha_1 + \Delta\varepsilon\sin\alpha_1.$$

Ovde su $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$ nutacija u longitudi i nutacija u nagibu za traženi datum. Činilac $\frac{1}{15}$ nalazi se u izrazima za $\Delta\alpha_1$, jer su obe nutacije date u lučnim sekundama, i pojednostavljujući objašnjenje, sada su i m i n izraženi u lučnim sekundama.

Ovo je pogodno za grupisanje članova u (12.7) i izvođenje iz njih jednačina koje su pogodnije za račun. Praktično, ovo je opisano da bi se odvojili oni delovi koji zavise od vremena, τ, $\Delta\psi$ i $\Delta\varepsilon$, od onih koji zavise od koordinata zvezde. U tom cilju, prvo ćemo eliminisati nagib ekliptike. Iz definicija za m i n (9.14), možemo napisati da je

$$\cos\varepsilon = \frac{m + \lambda'}{\psi}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{n}{\psi}. \tag{12.8}$$

Smenom ovih izraza u (12.7) dobijamo, posle malih pojednostavljenja, sledeće rezultate

$$\Delta\alpha_1 = n\left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\psi}\right)\frac{1}{15}\left(\frac{m}{n} + \sin\alpha_1\operatorname{tg}\delta_1\right) - \frac{\Delta\varepsilon}{15}\cos\alpha_1\operatorname{tg}\delta_1 + \frac{\lambda'\Delta\psi}{15\psi} + \tau\mu_\alpha$$
$$\Delta\delta_1 = n\left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\psi}\right)\cos\alpha_1 + \Delta\varepsilon\sin\alpha_1 + \tau\mu_\delta. \tag{12.9}$$

Uvedimo smene koje imaju kratke oznake:

$$A = n\left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\psi}\right), \qquad B = -\Delta\varepsilon, \qquad E = \frac{\lambda'\Delta\psi}{\psi} \tag{12.10}$$

$$a = \frac{1}{15}\left(\frac{m}{n} + \sin\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1\right), \qquad b = \frac{1}{15}\cos\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_1$$
$$a' = \cos\alpha_1, \qquad b' = -\sin\alpha_1. \tag{12.11}$$

Sada se priraštaji u rektascenziji i deklinaciji mogu napisati u mnogo jednostavnijem obliku. Prave koordinate zvezde sa (12.6) date su kao

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + Aa + Bb + E$$
$$\delta_2 = \delta_1 + \tau\mu_\delta + Aa' + Bb'. \tag{12.12}$$

❊ Veličine A, B i E su poznate kao *Beselovi dnevni brojevi*. Oni ne zavise od koordinata zvezde, ali se vrlo brzo menjaju sa datumom. U *Astronomical Almanacu* su ove veličine utabličene na dnevnim intervalima zajedno sa τ. Iz definicija se vidi da su A i B izraženi u lučnim sekundama, dok je E dato u vremenskim jedinicama. Vrednosti Beselovih dnevnih brojeva i delovi godine τ dati su za sredinu tražene godine.

❊ Veličine a, b, a', b' nazivaju se *Beselove zvezdane konstante*. One nisu strogo konstantne, pošto se koordinate zvezde, kao i m i n, menjaju sporo sa vremenom. Ako se ove promene zanemare, one bi se mogle jednom izračunati za svaku upotrebu kataloškog srednjeg položaja zvezde, te bi tako bile uključene unutar zvezdanog kataloga. U praksi je nađeno da ovo ne daje zadovoljavajuću tačnost i one se moraju ponovo računati za svaku traženu godinu. Međutim, one su konstantne samo u smislu da ne zavise od τ, a kako je τ deo godine, to znači da se one ne menjaju u toku tog kratkog intervala.

Jednačine (12.12) mogu se napisati u odgovarajućem obliku koji ne koristi zvezdane konstante. Umesto njih, rektascenzija i deklinacija se koriste direktno. Korišćenjem (12.10) za pojednostavljenje jednačina (12.9) imamo

$$\Delta\alpha_1 = \frac{1}{15}\frac{mA}{n} + E + \frac{1}{15}(A\sin\alpha_1 + B\cos\alpha_1)\operatorname{tg}\delta_1 + \tau\mu_\alpha$$
$$\Delta\delta_1 = A\cos\alpha_1 - B\sin\alpha_1 + \tau\mu_\delta. \tag{12.13}$$

Sada ćemo uvesti veličine f, g i G definisane na sledeći način:

$$f = \frac{1}{15}\frac{mA}{n} + E, \qquad g\sin G = B, \qquad g\cos G = A. \tag{12.14}$$

Prava rektascenzija i prava deklinacija zvezde biće date kao

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + f + \tfrac{1}{15}g\sin(G + \alpha_1)\operatorname{tg}\delta_1$$
$$\delta_2 = \delta_1 + \tau\mu_\alpha + g\cos(G + \alpha_1). \tag{12.15}$$

❊ Veličine f, g i G su poznate kao *nezavisni dnevni brojevi*. Iz njihovih definicija može se videti da će f biti izraženo u vremenskim, g u lučnim sekundama, dok je ugao G pogodnije izraziti u vremenskim jedinicama. Nezavisni dnevni brojevi su na prvi pogled jednostavniji za korišćenje od Beselovih dnevnih brojeva, pošto ne

zahtevaju izračunavanje zvezdanih konstanti. Međutim, ako imamo na raspolaganju Beselove dnevne brojeve, onda oni imaju prednost, jer je račun sa njima jednostavniji. U *Astronomical Almanacu* je od 1981. prekinuto publikovanje nezavisnih dnevnih brojeva, mada se još daju u nekim drugim nacionalnim efemeridama.

§ 12.4. Prividni položaj zvezde.

Prividne koordinate zvezde (α, δ) razlikuju se od pravih koordinata, pravilno izvedenih, za iznos godišnje aberacije i godišnje paralakse. Označimo priraštaje koordinata sa $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$, tj. sa

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha - \alpha_2 \\ \Delta\delta &= \delta - \delta_2. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Ovi priraštaji su povezani sa komponentama Zemljinog vektora položaja i vektora brzine jednačinama (8.15) i (8.17). U stvari je

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{15}\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right)\cos\alpha\sec\delta - \frac{1}{15}\left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right)\sin\alpha\sec\delta \\ \Delta\delta &= -\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right)\sin\alpha\sin\delta - \left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right)\cos\alpha\sin\delta + \left(\frac{\dot{Z}}{c} - \pi Z\right)\cos\delta. \end{aligned} \tag{12.17}$$

U ovim jednačinama π je paralaksa zvezde, a komponente brzine, kao i brzina svetlosti, moraju se izraziti u istim jedinicama; tako razlomci izraženi u radijanima postaju izraženi u lučnim sekundama. Ako se koristi astronomski sistem jedinica, u skladu sa utabličenim $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ u *Astronomical Almanacu*, tada je vrednost c data jednačinom (8.18).

Izrazićemo jednačine (12.7) preko dnevnih brojeva i zvezdanih konstanti definisanih niže, pošto se, na osnovu jednačina, naslućuje sličan postupak kao u prethodnom paragrafu. Već smo uveli neophodne definicije, ali postoji nekoliko momenata koje treba naglasiti. Pre svega, koordinate zvezde na desnoj strani jednačina (12.7) ne mogu biti uzete kao prividne koordinate (α, δ), kako je navedeno, pošto ove još nisu određene. Bilo bi najprirodnije staviti prave koordinate (α_2, δ_2). Međutim, ovo je nemoguće, jer se ove koordinate nalaze u zvezdanim konstantama koje ne zavise od datuma. Zaista, pomenuti izrazi biće dovoljne tačnosti ako se koriste srednje koordinate (α_1, δ_1) koje se odnose na sredinu godine.

Slična razmatranja primenjena su na komponente Zemljinog vektora položaja i vektora brzine. U idealnom slučaju, oni se odnose na pravi ekvator i pravi ekvinokcij za traženi datum, ali ponovo mogu biti adekvatni srednji ekvator i srednji ekvinokcij za sredinu godine. Ove konstante se nalaze u novim dnevnim brojevima koji su utabličeni u *Astronomical Almanacu* na dnevnim intervalima. U principu, ne postoji razlog zbog čega se pravi ekvator i pravi ekvinokcij ne bi koristili. Međutim, u praksi je popravka za paralaksu i aberaciju napravljena istovremeno sa popravkama razmatranim u §12.3 i stoga je pravilnije koristiti srednji ekvator i srednji ekvinokcij. Osim ovoga, razlika će biti mala popravka drugog reda koja je obuhvaćena dnevnim brojevima drugog reda, koji će biti kasnije pomenuti u ovom paragrafu.

Popravka za paralaksu u (12.17) je različita za svaku zvezdu i zato se ne može uključiti unutar dnevnih brojeva. Komponente (X, Y, Z) Zemljinog vektora polo-

žaja utabličene su u *Astronomical Almanacu* i odnose se na katološki srednji ekvator i ekvinokcij. Pošto je popravka za paralaksu mnogo manja od one za aberaciju, to su za korišćenje dovoljno tačni ovi utabličeni podaci.

Jednačine (12.17) mogu biti pojednostavljene eliminisanjem z-komponenti Zemljinog vektora položaja i brzine. Ako pretpostavimo da Zemlja leži tačno u ravni ekliptike na longitudi λ, onda se njen vektor položaja može napisati kao

$$\mathfrak{R} = R(\cos\lambda, \sin\lambda\cos\varepsilon, \sin\lambda\sin\varepsilon),$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} Z &= Y\operatorname{tg}\varepsilon \\ \dot{Z} &= \dot{Y}\operatorname{tg}\varepsilon. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Ove jednačine nisu potpuno zadovoljavajuće, pošto se koordinate odnose na baricentar, a ne na središte Sunca, pa je pravilnije koristiti srednje a ne prave koordinate. Međutim, greška koja je sadržana u (12.18) je beznačajna, pa ova jednačina dopušta redukciju dnevnih brojeva sa tri na dva. Uvrstivši sve ovo u jednačine (12.17), i koristeći (α_1, δ_1) na desnim stranama ovih jednačina, dobićemo sledeće rezultate

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{15}\cos\alpha_1 \operatorname{sc}\delta_1\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right) - \frac{1}{15}\sin\alpha_1 \operatorname{sc}\delta_1\left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right) \\ \Delta\delta &= (\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta_1)\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right) - \cos\alpha_1\sin\delta_1\left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right). \end{aligned} \tag{12.19}$$

Uvedimo sada sledeće definicije

$$C = \frac{\dot{Y}}{c}, \qquad D = -\frac{\dot{X}}{c} \tag{12.20}$$

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{15}\cos\alpha_1 \operatorname{sc}\delta_1, & d &= \tfrac{1}{15}\sin\alpha_1 \operatorname{sc}\delta_1 \\ c' &= \operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta_1, & d' &= \cos\alpha_1\sin\delta_1. \end{aligned} \tag{12.21}$$

Veličine C i D su novi Beselovi dnevni brojevi, koji su izraženi u lučnim sekundama i utabličeni na dnevnim intervalima u *Astronomical Almanacu*. Veličine c, d, c', d' su i dalje Beselove zvezdane konstante. Jednačine (12.19) mogu se sada napisati u mnogo, za upotrebu, jednostavnijem obliku

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= (C - \pi Y)c + (D + \pi X)d \\ \Delta\delta &= (C - \pi Y)c' + (D + \pi X)d'. \end{aligned} \tag{12.22}$$

Ponovo je moguć odgovarajući oblik ovih jednačina preko nezavisnih dnevnih brojeva. Uvodeći ih imamo da je

$$\begin{aligned} h\sin H &= C \\ h\cos H &= D \\ i &= C\operatorname{tg}\varepsilon. \end{aligned} \tag{12.23}$$

Sa jednačinama (12.21) biće

$$\begin{aligned} Cc + Dd &= \tfrac{1}{15}h\sin(H + \alpha_1)\operatorname{sc}\delta_1 \\ Cc' + Dd' &= h\cos(H + \alpha_1)\sin\delta_1 + i\cos\delta_1. \end{aligned} \tag{12.24}$$

Mada ove jednačine izgledaju jednostavnije, one ne uključuju paralaktičku popravku za koju je neophodno korišćenje zvezdanih konstanti. Kao što je već pomenuto, sada je praktično bolje koristiti Beselove dnevne brojeve umesto nezavisnih dnevnih brojeva.

Kada je paralaksa zvezde dovoljno mala, tada ju je moguće uneti u zvezdane konstante, čime se Zemljina putanja aproksimira kružnicom. Zemljin vektor položaja i vektor brzine mogu se tada napisati kao

$$\mathfrak{R} = (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot, 0)$$
$$\dot{\mathfrak{R}} = \varkappa c(\sin\lambda_\odot, -\cos\lambda_\odot, 0),$$

gde je $\varkappa$ konstanta aberacije.

Vektori su ovde izraženi u ekliptičkim, a ne u ekvatorskim, koordinatama. Rotaciju osa oko ose x za ugao ε izrazićemo sa dva vektora u traženom ekvatorskom sistemu koordinata kao

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon, -\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon)\\ \dot{\mathfrak{R}} &= \varkappa c(\sin\lambda_\odot, -\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon, -\cos\lambda_\odot\sin\varepsilon).\end{aligned} \qquad (12.25)$$

Važno je napomenuti da, iako je aproksimacija napravljena za brzinu Zemlje, ova aproksimacija sadrži samo jednostavnu popravku za paralaksu. Spomenuto je tačno određivanje aberacije; ona se može obračunati pregledanjem komponenata u (12.25) koje su

$$\begin{aligned}X &= \frac{\dot{Y}\,\mathrm{sc}\,\varepsilon}{\varkappa c} = \frac{C\,\mathrm{sc}\,\varepsilon}{\varkappa}\\ Y &= \frac{-\dot{X}\cos\varepsilon}{\varkappa c} = \frac{D\cos\varepsilon}{\varkappa}\end{aligned} \qquad (12.26)$$

kada se koriste definicije Beselovih dnevnih brojeva (12.20). Smenom X i Y u (12.22), ove se jednačine mogu napisati kao

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= C\left(c + \frac{\pi d\,\mathrm{sc}\,\varepsilon}{\varkappa}\right) + D\left(d - \frac{\pi c\cos\varepsilon}{\varkappa}\right)\\ \Delta\delta &= C\left(c' + \frac{\pi d'\,\mathrm{sc}\,\varepsilon}{\varkappa}\right) + D\left(d' - \frac{\pi c'\cos\varepsilon}{\varkappa}\right).\end{aligned} \qquad (12.27)$$

Očigledno je da su jedačine (12.27) oblika

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= Cc_1 + Dd_1\\ \Delta\delta &= Cc_1' + Dd_1',\end{aligned} \qquad (12.28)$$

gde su c_1, d_1, c_1', d_1' zvezdane konstante predefinisane tako da uključuju popravku za paralaksu zvezde. Stavljajući brojne vrednosti za nagib ekliptike i konstantu aberacije, one su date sa

$$\begin{aligned}c_1 &= c + 0{,}0532 d\pi\\ d_1 &= d - 0{,}0448 c\pi\\ c_1' &= c' + 0{,}0532 d'\pi\\ d_1' &= d' - 0{,}0448 c'\pi.\end{aligned} \qquad (12.29)$$

Ovako predefinisane zvezdane konstante jednom se računaju za sva korišćenja u (12.28). Rad sa ovim jednačinama je brži račun od rada sa tačnijim jednačinama (12.22). Greška aproksimacije može biti zanemarena ako je $\pi < 0'',2$.

Pri izvođenju prividnog položaja zvezde nije potrebno eksplicitno izvesti pravi položaj. Popravke koje su razmatrane u ovom i prethodnom paragrafu mogu se primeniti u jednom koraku—na taj način se dovodi u direktnu vezu prividni položaj zvezde sa njenim srednjim položajem (α_1, δ_1) za sredinu godine. Prema tome, kombinovani rezultati jednačina (12.22) i (12.12) daju prividni položaj zvezde kao

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + Aa + Bb + (C - \pi Y)c + (D + \pi X)d + E \\ \delta &= \delta_1 + \tau\mu_\delta + Aa' + Bb' + (C - \pi Y)c' + (D + \pi X)d'. \end{aligned} \tag{12.30}$$

Ove jednačine se koriste u praksi, pri čemu se podrazumeva da pravi položaj nije ni izveden.

Jednačine (12.30) su formule prvog reda koje su dovoljno tačne za većinu zadataka. Dnevni brojevi mogu, čak, da obuhvate uključivanje nekih popravki drugog reda, koje su neophodne za izrazito visoke deklinacije. Ovde nećemo razrađivati popravke drugog reda; jer su one detaljno date na str. 320 (Woolard & Clemence, 1966), i manje detaljno u *Explanatory Supplementu*. Praktična preporuka u *Astronomical Almanacu* je da se u jednačinama (12.30) doda član $J\,\mathrm{tg}^2\,\delta_1$ za rektascenziju i član $J'\,\mathrm{tg}\,\delta_1$ za deklinaciju. Male veličine J i J' su nazvane dnevni brojevi drugog reda. Za razliku od dnevnih brojeva prvog reda, oni su nezavisni od koordinata zvezde, ali su utabličeni u *Astronomical Almanacu* kao funkcije datuma i rektascenzije. Oni ne daju sve članove drugog reda, već samo podesnu aproksimaciju za one koji su najizrazitiji. Priroda aproksimacije je takva da je potrebno razdvajanje tablica za J i za J' na posebne delove za zvezde sa severnim deklinacijama i za zvezde sa južnim deklinacijama.

Korišćenje dnevnih brojeva drugog reda je zaista pokušaj smanjivanja sistematskih grešaka koje postaju znatne za velike deklinacije. Ovo je uslovljeno pojedinostima u desnom koordinatnom sistemu rektascenzije i deklinacije nebeskih polova. Teškoće mogu da se izbegnu vektorskim pristupom celom problemu, sličnim onom datom u sledećem paragrafu. Ukratko, ovakav postupak je preporučljiv kad god formule prvog reda (12.30) nisu odgovarajuće.

U §8.5 bili su razmatrani E-članovi u godišnjoj aberaciji. Iz praktičnih razloga, oni su ubačeni u kataloške položaje zvezda; konstantna brzina koja im odgovara bila je, do 1984., izdvojena iz $\dot{X}$ i $\dot{Y}$ za izračunavanje aberacijskih dnevnih brojeva. Ovakav postupak je sada prekinut, a C i D su sada strogo definisani preko komponenata Zemljine baricentrične brzine. Definicije u (12.20) odgovaraju sadašnjoj praksi.

§ 12.5. Vektorsko izvođenje prividnog položaja zvezde.

Poslednja tri paragrafa predstavljaju pregled onoga što se može nazvati metodom dnevnih brojeva, za prelazak sa standardnog srednjeg položaja zvezde na njen prividni položaj. Ovaj metod posredno koristi srednji položaj zvezde za sredinu najbliže godine. Dnevni brojevi obezbeđuju značajne popravke prvog reda tog srednjeg položaja. Sada ćemo razmatrati alternativni postupak koji daje neophodne popravke na drugačiji i možda logičniji način. Metod je tačan, uopšteno govoreći

bolji, mada povlači sa sobom detaljniji račun; glavni posao je programiranje računa *Astronomical Almanac* opisuje ovaj metod kao sistem matrice rotacije i to ilustruje urađenim primerom. Pri uvođenju formule na kojoj se ovaj sistem zasniva, biće očigledna udobnost korišćenja kompatibilnih oznaka i sličnih jedinica kao u *Astronomical Almanacu*.

Polazna tačka je, kao i pre, standardni (kataloški) srednji položaj zvezde (α_0, δ_0) a traži se prividni položaj (α, δ) za određeni datum t godina kasnije. Međutim, sav rad između, prikazan je u pravouglim koordinatama koje koristi sistem zasnovan na srednjem ekvatoru i ekvinokciju standardne epohe. Za sopstveno kretanje, paralaksu i aberaciju napravljeno je da su izvedene geocentrične pravougle koordinate zvezde za traženi datum, ali još uvek u odnosu na početne koordinatne ose. Poslednji korak je prelazak na koordinate koje se odnose na pravi ekvator i pravi ekvinokcij datuma, obračunavajući time precesiju i nutaciju.

Neka je $\mathfrak{s}_0$ jedinični vektor određen standardnim srednjim položajem, tj.

$$\mathfrak{s}_0 = (\cos\alpha_0 \cos\delta_0, \sin\alpha_0 \cos\delta_0, \sin\delta_0). \tag{12.31}$$

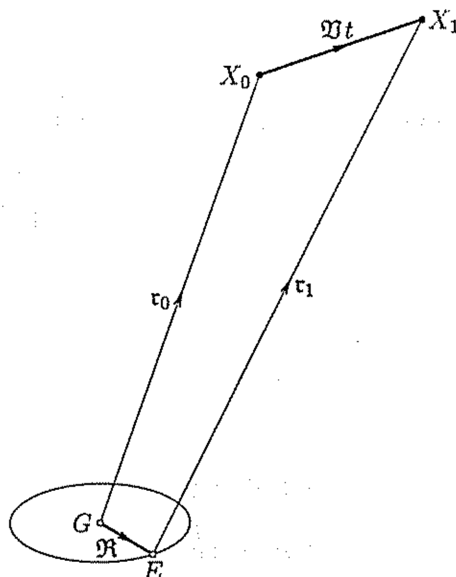
Ovaj će se vektor prvi modifikovati kada se uzmu u obzir čisto geometrijske popravke sopstvenog kretanja i paralakse. Na sl. 12.1, G predstavlja baricentar Sunčevog sistema, a E položaj Zemlje za datum posmatranja. Tačke X_0 i X_1 su, redom, kvazi-geometrijski položaji zvezde (nije izvršena popravka za iznos vekovne aberacije) za standardnu epohu i datum posmatranja. U opštem slučaju, četiri tačke neće biti koplanarne, a dijagram to i ne sugeriše. Neka $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{R}$ i $\mathfrak{R}$ budu baricentrični vektori položaja tačaka X_0, X_1 i E. Tada možemo pisati da je

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_0 &= r_0 \mathfrak{s}_0 \\ \mathfrak{r}_1 &= r_1 \mathfrak{s}_1 \\ \mathfrak{R} &= (X, Y, Z). \end{aligned} \tag{12.32}$$

Komponente vektora $\mathfrak{R}$ mogu se uzeti iz *Astronomical Almanaca*.

Sada pretpostavimo da zvezda ima brzinu $\mathfrak{V}$ u odnosu na baricentar. Sa sl. 12.1 sledi da je

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{V}t - \mathfrak{R}. \tag{12.33}$$



Слика 12.1

Na osnovu objašnjenja u §11.1, možemo uzeti da je brzina $\mathfrak{V}$ konstantna.

Katalozi obezbeđuju sledeće informacije: standardni srednji položaj (α_0, δ_0), komponente sopstvenog kretanja (μ_α, μ_δ), paralaksu π i radijalnu brzinu V_r (u km/s), sve za standardnu (katalošku) epohu. Pogodno je izraziti rastojanja u astronomskim jedinicama, pošto su komponente $\mathfrak{R}$ utabličene u tim jedinicama. Ako je π izraženo u radijanima, tada je $r_0 = \pi^{-1}$, pa se jednačina (12.33) može napisati kao

$$r_1 \pi \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{m}t - \pi\mathfrak{R}, \tag{12.34}$$

gde je $\mathfrak{m}$ prostorni vektor kretanja zvezde dat sa $\mathfrak{m} = \pi\mathfrak{V}$ i mora se izraziti u radijanima po godini. Da bi se ovo postiglo, brzina $\mathfrak{V}$, koja je data u km/s jednačinom (11.22), biće u AJ/god. Praveći neophodnu konverziju, nalazimo da je

$$\mathfrak{m} = \mu + \frac{\pi}{4{,}74} V_r \mathfrak{s}, \tag{12.35}$$

gde je μ izraženo u radijanima po godini.

Na drugoj strani, ako uskladimo praktične jedinice koje su korišćene za μ_α, μ_δ i π, tražene komponente $\mathfrak{m}$ date su sa

$$\begin{aligned} m_x &= \left(-15\mu_\alpha \sin\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \cos\alpha_0 \sin\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4{,}74} \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \right) \sin 1'' \\ m_y &= \left(15\mu_\alpha \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \sin\alpha_0 \sin\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4{,}74} \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \right) \sin 1'' \\ m_z &= \left(\mu_\delta \cos\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4{,}74} \sin\delta_0 \right) \sin 1''. \end{aligned} \tag{12.36}$$

Sa ovim nađenim komponentama možemo oceniti, isključivo, desnu stranu jednačine (12.34). Normalno, rezultat će dati vektor $\mathfrak{s}_1$, što je kvazi-geometrijski pravac zvezde za datum posmatranja. Time su popravke za sopstveno kretanje i paralaksu kompletne.

Sledeći korak je popravka za aberaciju. Kako je ova napravljena zavisnom, da li je klasični postupak adekvatno uzima u obzir? Ako je tako, argument je vrlo jednostavan. Posmatrano zračenje ima vektor brzine $\mathfrak{V}_1$ u odnosu na baricentar, dat sa

$$\mathfrak{V}_1 = -c\mathfrak{s}_1.$$

U odnosu na Zemlju brzina radijacije je $\mathfrak{V}_2$, gde je

$$\mathfrak{V}_2 = -c\mathfrak{s}_1 - \dot{\mathfrak{R}}.$$

Komponente vektora $\dot{\mathfrak{R}}$ mogu se uzeti iz *Astronomical Almanaca*, gde su utabličene u AJ/dan. Izražavajući brzinu svetlosti u ovim jedinicama—[v. (8.18)]—pravac zvezde koji se popravlja za aberaciju dat je u jedinicama vektora $\mathfrak{s}_2$, gde je

$$\frac{V_2}{c} \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1 + 0{,}005\,775\,6\,\dot{\mathfrak{R}}. \tag{12.37}$$

Desna strana (12.37) nije jedinični vektor, ali se može normalizovati množenjem sa $\mathfrak{s}_2$.

Iako je položaj u katalogu već popravljen za aberacijske E-članove, potrebna je mala modifikacija. Brzina, $\mathfrak{V}_E$, koja odgovara ovim članovima mora se oduzeti od $\dot{\mathfrak{R}}$ pre primene (12.37). U odnosu na srednji ekvator i srednji ekvinokcij za 1950,0, ova brzina ima komponente date sa

$$\mathfrak{V}_E = (-0{,}000\,281;\ -0{,}000\,055;\ -0{,}000\,024). \tag{12.38}$$

Ova modifikacija nije potrebna za novije zvezdane kataloge koji se baziraju na epohu J2000,0.

Sada je potrebno da se vektor $\mathfrak{s}_2$ odnosi na ose koje odgovaraju pravom ekvatoru i pravom ekvinokciju datuma. Pomenuto je da matrica rotacije $\mathfrak{R}_M$, definisana

u §9.9, objedinjuje precesiju i nutaciju i njeni elementi su utablični na dnevnim intervalima u *Astronomical Almanacu*. Jedinični vektor $\mathfrak{s}$ dat je jednostavno sa

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{R}_M \mathfrak{s}_2. \tag{12.39}$$

I na kraju, prividni položaj (α, δ) lako se izvodi iz ovog vektora, pošto je

$$\mathfrak{s} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta). \tag{12.40}$$

Metod je upravo opisan pojmovima koji traže klasične pretpostavke. Klasični način obračunavanja aberacije nije opravdan za članove iznad prvog reda po $|\dot{\mathfrak{R}}|/c$. Tačnost metoda se može još povećati korišćenjem relativističke formule koja je izvedena u §8.9. Popravka za paralaksu zvezde je već, za sadašnji postupak, data odgovarajućim izrazima, tako da je možemo isključiti iz (8.71). Preostali članovi daju relativističke efekte aberacije i savijanja svetlosti. Umesto (12.37) korišćena je jednačina (8.71). Sa pogodnim promenama oznaka, imamo da je

$$\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1 - \frac{2m}{R(R + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_1)}\mathfrak{s}_1 \times (\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{R}) - \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{s}_1}{c}\right)\mathfrak{s}_1 \times (\mathfrak{s}_1 \times \dot{\mathfrak{R}}) + \frac{1}{2c^2}\dot{\mathfrak{R}} \times (\dot{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{s}_1). \tag{12.41}$$

Ovo je tražena promena u gornjem vektorskom postupku da bi se obuhvatili relativistički efekti. Za dobijanje prividnog položaja, izveden je, kao i pre, jedinični vektor $\mathfrak{s}_1$, i primenjena je matrica rotacije za $\mathfrak{s}_2$.

U ovakvom stanju jednačina (12.41) predstavlja komplikovanu formulu, pa je neophodno pojednostavljenje. Pre svega, izrazimo m i c u istim jedinicama kao što su utabličene komponente $\mathfrak{R}$ i $\dot{\mathfrak{R}}$, odnosno u AJ i u AJ po godini, redom. Tada je

$$m = 9{,}87\cdot 10^{-9}, \qquad c^{-1} = 0{,}005\,775\,6 \tag{12.42}$$

Usled izrazito male vrednosti za m, dovoljno je staviti da je $R = 1$ u imeniocu drugog člana na desnoj strani (12.41). Razvijanjem svih trostrukih vektorskih proizvoda i grupisanjem članova, (12.41) se može napisati kao

$$\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1\left[1 - \frac{2m(\mathfrak{s}_1\cdot\mathfrak{R})}{1 + \mathfrak{s}_1\cdot\mathfrak{R}} - \frac{\mathfrak{s}_1\cdot\dot{\mathfrak{R}}}{c} + \frac{(\mathfrak{s}_1\cdot\dot{\mathfrak{R}})^2}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{|\dot{\mathfrak{R}}|^2}{c^2}\right] + \frac{\dot{\mathfrak{R}}}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{s}_1}{c}\right) + \frac{2m}{1 + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_1}\mathfrak{R} \tag{12.43}$$

Ova jednačina je samo malo jednostavnija od (12.41). Ipak, treba podeliti (12.43) sa koeficijentom uz $\mathfrak{s}_1$, u ovoj jednačini, koji ćemo označiti sa γ. Tada se, zadržavanjem članova do drugog reda, desna strana bitno pojednostavljuje i jednačina (12.43) se svodi na

$$\gamma^{-1}\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1 + \frac{\dot{\mathfrak{R}}}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{s}_1}{c}\right) + \frac{2m}{1 + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_1}\mathfrak{R}.$$

Korišćenjem (12.42), ovo se može numerički izraziti kao

$$\gamma^{-1}\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_1 + 5{,}7756\cdot 10^{-3}\dot{\mathfrak{R}}(1 + 2{,}9\cdot 10^{-3}\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{s}_1) + \frac{1{,}974\cdot 10^{-8}}{(1 + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}_1)}\mathfrak{R}. \tag{12.44}$$

Desna strana jednačine (12.44) može se izračunati i može se normalizovati izvođenje vektora $\mathfrak{s}_2$. Tada se dodavanjem popravki za precesiju i nutaciju prelazi na prividni položaj.

Postupak opisan u ovom paragrafu ima prednost nad postupkom dnevnih brojeva, uvek kada je potrebna velika preciznost. Neophodno je koristiti vektorski metod da bi se uključili relativistički efekti, pošto prilagođavanje postupka dnevnih brojeva povlači sa sobom nove definicije i neutabličene Beselove dnevne brojeve.

§ 12.6. Prividni položaj planete.

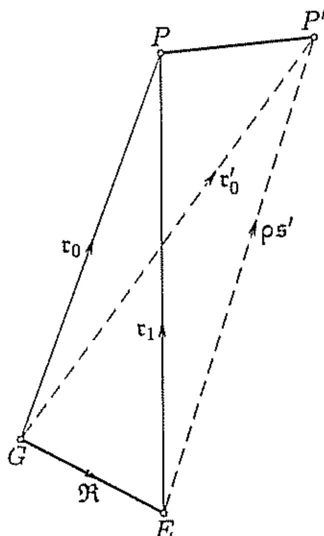
Izvođenje prividnog položaja tela u Sunčevom sistemu razlikuje se od upravo razmatranog metoda. Sopstveno kretanje je zamenjeno sa putanjskim kretanjem i brzina izvora ne može se duže vreme uzimati konstantnom.

Razmatraćemo sledeći problem: date su baricentrične efemeride planete za neki trenutak t; izračunati prividni položaj planete u tom trenutku.

Pretpostavimo da su baricentrične efemeride date u obliku pravouglih koordinata (x_0, y_0, z_0) u odnosu na standardni srednji ekvator i ekvinokcij, tako da baricentrični vektor položaja planete u trenutku t bude

$$\mathfrak{r}_0 = r_0\mathfrak{s}_0 = (x_0, y_0, z_0). \tag{12.45}$$

Ovaj vektor je na sl. 12.2 prikazan kao $\overrightarrow{GP}$. Neka je E položaj Zemlje u tom trenutku i neka je $\mathfrak{R}$ njen baricentrični vektor položaja. Na kraju, neka je P' položaj planete u trenutku emitovane radijacije, i označimo vektor $\overrightarrow{EP'}$ sa $\rho\mathfrak{s}'$.



Слика 12.2

Klasičan način je vrlo jednostavan—sastoji se u transformaciji na geocentrične koordinate koje se odnose na trenutni ekvator i ekvinokcij datuma, vodeći računa o popravci za aberaciju planete koja se prethodno obračunava.

Prvo je izveden geocentrični vektor položaja P kao

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{R}. \tag{12.46}$$

Naravno, ovo je tačno. Međutim, za aberacijsku popravku planete, neophodno je znati svetlosno-zakašnjenje τ. Strogo uzevši, ovo bi se računalo kao ρ/c, i dovoljne je tačnosti za korišćenje klasične aproksimacije

$$\tau = \frac{|\mathfrak{r}_1|}{c}. \tag{12.47}$$

Efekti planetske aberacije bili su razmatrani u §8.6, gde je pokazano da su prividne koordinate u trenutku t jednake geometrijskim koordinatama u trenutku $t-\tau$. Ove popravke daju potpun uticaj do prvog reda koji proizilazi iz obeju brzina, Zemljine i planetine. Nije potrebno, na ovom nivou, svoditi $\mathfrak{r}_1$ na jedinični vektor, ali vektor prividnog geocentričnog položaja planete može se definisati kao

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 - \tau\dot{\mathfrak{r}}_1. \tag{12.48}$$

Komponente vektora $\dot{\mathfrak{r}}_1$ dobijaju se diferenciranjem jednačine (12.46). Posle svega, možemo se osloniti na dinamičku analizu gravitacije koja daje početne baricentrične efemeride $\mathfrak{r}_0$ (i $\mathfrak{R}$) i njihove izvode. Ako se koristi astronomski sistem jedinica, tako da su brzine izražene u AJ/dan, jednačina (12.48) može se sa (12.42) i (12.47) izraziti kao

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 - 0{,}005\,775\,6\, r_1(\dot{\mathfrak{r}}_0 - \dot{\mathfrak{R}}). \tag{12.49}$$

Prividni položaj smo dobili, ako se ovaj vektor $\mathfrak{r}_2$ odnosi na trenutni ekvator i ekvinokcij datuma. Primenjujući matricu rotacije R_M, imamo da prividnom položaju odgovara jedinični vektor $\mathfrak{s}$, gde je

$$r\,\mathfrak{s} = \mathfrak{r} = \mathfrak{R}_M \mathfrak{r}_2. \tag{12.50}$$

Međutim, komponente vektora $\mathfrak{r}$ su računate iz (12.50) i normiranjem ovaj vektor daje traženi prividni položaj planete u trenutku t. Transformacija na polarne koordinate izvedena je na uobičajen način.

Kada se uzimaju u obzir relativistički efekti neophodna je značajna modifikacija ove metode. Planetskoj aberaciji više nije potrebna popravka. Razmotrimo posebno dva njena dela, naime onaj koji pripada planetskoj i onaj koji pripada Zemljinoj brzini. To znači da će vektor $\overrightarrow{EP'}$ biti korišćen umesto vektora $\overrightarrow{EP}$, a time je godišnja aberacija već ranije bila obračunata. Pre svega, moramo izvesti položaj P'.

Analiza je dobra za jednačinu (12.46); prvu, ali neodgovarajuću, aproksimaciju za τ daje jednačina (12.47). Nazivajući ovo aproksimacijom τ_0, baricentrični vektor položaja tačke P' dat je sa

$$\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 - \tau_0 \dot{\mathfrak{r}}_0.$$

Zato možemo izračunati poboljšanu vrednost τ kao

$$\tau_1 = \frac{|\mathfrak{r}_0 - \tau_0 \dot{\mathfrak{r}}_0 - \mathfrak{R}|}{c} \tag{12.51}$$

Ovo je dovoljno dobra aproksimacija za stvarno vreme putovanja svetlosti, koje je samo klasično definisano i možda iznenađuje da relativistička popravka vremenskog-kašnjenja nije neophodna. Ipak, kao što je pokazano u §10.8, relativistička popravka je m/c—[v. jednačinu (10.55)]—i ona može da raste do aberacione popravke trećeg reda.

Sada se ova vrednost vremenskog-kašnjenja može koristiti za preračunavanje vektora položaja P', ali sledeći član Tejlorovog reda mora biti uključen da bi se postigla tačnost drugog reda. Odavde je

$$\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 - \tau_1 \dot{\mathfrak{r}}_0 + \frac{1}{2}\tau_1^2 \ddot{\mathfrak{r}}_0.$$

Drugi izvod se može smatrati kao ubrzanje planete izazvano Sunčevim gravitacijskim dejstvom, koje je dovoljno tačno dato sa

$$\ddot{\mathfrak{r}}_0 = -\frac{GM_\odot}{r_0^3}\mathfrak{r}_0.$$

Tako je vektor položaja tačke P' određen sa

$$\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 - \tau_1 \dot{\mathfrak{r}}_0 + \frac{1}{2}\frac{mc^2\tau_1^2}{r_0^3}\mathfrak{r}_0. \tag{12.52}$$

Lako je videti da će veličina poslednjeg člana (12.52) biti istog reda kao m, što znači da je član drugog reda uključen u relativistički postupak. Očigledno da se geocentrični vektor položaja P' može napisati kao

$$\rho \mathfrak{s}' = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{R} - \tau_1 \dot{\mathfrak{r}}_0 + \frac{1}{2} \frac{mc^2 \tau_1^2}{r_0^3} \mathfrak{r}_0. \quad (12.53)$$

Korišćenjem (12.51) mogu se izračunati komponente ovog vektora, a normiranjem i sam vektor $\mathfrak{s}'$. Veličina ρ se, takođe, može odrediti.

Sve do sada, ovaj postupak nije bio specijalno relativistički, ali, ipak, ima zadovoljavajuću tačnost jer omogućava identifikovanje $\mathfrak{s}'$ sa kvazi-geometrijskim pravcem ($\mathfrak{s}_0$), koji je korišćen u §8.8, slučaj (a). Ovaj vektor je prvo definisan u (8.55).

Koristeći (8.72), moramo sada uzeti u obzir relativističke popravke za godišnju aberaciju i savijanje svetlosti. Primenom odgovarajućih oznaka, imamo sledeći rezultat

$$\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}' + \frac{2m}{[R^2 - (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}')^2]} \left(\frac{\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}'}{R} - \frac{(r_0' - R)}{\rho} \right) \mathfrak{s}' \times (\mathfrak{s}' \times \mathfrak{R})$$
$$- \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\dot{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{s}'}{c} \right) [\mathfrak{s}' \times (\mathfrak{s}' \times \dot{\mathfrak{R}})] + \frac{1}{2c^2} \dot{\mathfrak{R}} \times (\dot{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{s}'). \quad (12.54)$$

Ova se jednačina može pojednostaviti metodom redukcije koji je primenjen na jednačinu (12.41). Množenjem tri trostruka vektorska proizvoda i stavljanjem $r = 1$, izvodimo vektor $\gamma^{-1}\mathfrak{s}_2$ dat sa

$$\gamma^{-1}\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}' + 5{,}7756 \cdot 10^{-3} \dot{\mathfrak{R}}(1 + 2{,}9 \cdot 10^{-3} \dot{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{s}')$$
$$+ \frac{1{,}974 \cdot 10^{-8}}{1 - (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}')^2} \left[\frac{(r_0' - R)}{\rho} - \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s}' \right] \mathfrak{R}. \quad (12.55)$$

Ova jednačina nam omogućava izračunavanje komponenata $\gamma^{-1}\mathfrak{s}_2$, a odatle normiranjem i sâmo $\mathfrak{s}_2$. Ovo daje prividni pravac planete, ali još uvek u odnosu na početnu osu koja odgovara standardnom srednjem ekvatoru i ekvinokciju. Posle množenja sa matricom rotacije, ovaj će se vektor odnositi na trenutni ekvator i trenutni ekvinokcij datuma. Sa prelaskom na sferne koordinate, prividni položaj planete se dobija kao rektascenzija i deklinacija.

§ 12.7. Zvezdani katalozi.

U glavi 5 je pokazano da meridijanski krug može da meri koordinate zvezde potpuno nezavisno od svake pretpostavke ili prethodnih merenja drugih zvezdanih položaja. Termin „fundamentalan" se upotrebljava za takva merenja, nasuprot manje tačnim relativnim merenjima. Katalozi u kojima su dati rezultati takvih merenja nazvani su fundamentalni katalozi. Ipak, moramo razlikovati dve vrste fundamentalnih kataloga. Posmatrački katalozi daju položaje zvezda određene na jednoj opservatoriji za, uglavnom, kratak vremenski period. U suštini, oni daju položaje koji se odnose na jednu epohu. Na drugoj strani, opšti fundamentalni katalog je nastao kombinovanjem većeg broja posmatračkih kataloga sačinjenih na mnogim opservatorijama, obuhvatajući duži vremenski period.

Fundamentalni (opšti) katalog daje srednje položaje izabranih zvezda zajedno sa iznosima promena koordinata zvezda usled precesije i sopstvenog kretanja—godišnje i sekularne promene. Katalog definiše koordinatni sistem. Iako često govorimo o koordinatama zvezde u odnosu na poseban ekvator i ekvinokcij, kao da su, na neki način, ovaj veliki krug i ♈ tačka bili prepoznatljivi na nebu, jedino zvezde možemo posmatrati. Jer, tek katalog zvezdanih položaja definiše ekvator i ekvinokcij. Srednji ekvator i srednji ekvinokcij standardne epohe su implicitno definisani sa rektascenzijama i deklinacijama zvezda u fundamentalnom katalogu, a kataloške godišnje i vekovne promene koordinata omogućavaju definisanje za druge daleke epohe.

Osnovni referentni sistem je, u ovom slučaju, rotirajući referentni sistem—rotacija se vrši usled precesije. Ekvinokcij ovog sistema se pomera u odnosu na *ekvinokcij kataloga*, čime je ekvinokcij implicitno definisan kao nulta tačka ekvatora za rektascenziju. U principu, ova je tačka mogla biti proizvoljno izabrana, ali ona ima tradicionalni izbor, da se što je moguće bolje poklapa sa tačkom preseka Zemljine trenutne putanje i nebeskog ekvatora. Kasnije se spominje kao *dinamički ekvinokcij*. Razlika se mora napraviti između idealizovanog dinamičkog ekvinokcija i njegove praktične realizacije kao nulte tačke fundamentalnog referentnog sistema. Razlika između dve rektascenzije nazvana je *popravka ekvinokcija*. U svakom slučaju, konstantna popravka ekvinokcija ne čini nevažećim kataloški referentni sistem, ali promenljiva popravka podrazumeva da je precesija ili neki drugi dinamički efekt neprecizno uračunat.

Nerotirajući referentni sistem mora se zasnivati na stalnom ekvatoru i ekvinokciju standardne epohe. Ovo je definisano samo za datum standardne epohe sa kataloškim položajima, ali ovo je definicija i za druge datume, ako su data sopstvena kretanja zvezda. Ispetljavanje iz ovakvih teškoća je moguće dodavanjem popravki za sopstveno kretanje i precesiju preko godišnjih i vekovnih promena koordinata, što povlači sa sobom i preuzimanje iznosa precesije. Sve ovo je obuhvaćeno fundamentalnim katalogom, kao da je fundamentalni referentni sistem definisan i kao pokretni koordinatni sistem i kao nepokretni referentni sistem za sve datume.

Nepokretni koordinatni sistem definisan fundamentalnim katalogom nazvan je *zvezdani referentni sistem*. Ne uzimajući u obzir ostale nepreciznosti u katalogu, ovo je određeno fundamentalnim katalogom na potpuno samo-konzistentan način. Idealno, zvezdani referentni sistem treba da bude inercijalan, ali stepen u kojem se ovaj ideal dostiže mora biti uporediv sa referentnim sistemima zasnovanim na druge načine, bilo da se koristi ova ili ona dinamika Sunčevog sistema, ili Galaksije, ili, alternativno, vangalaktički objekti. Takav alternativni referentni sistem biće dat u kasnijim glavama.

Pod pokroviteljstvom IAU, međunarodnim sporazumom definisan je fundamentalni referentni sistem, koji je u upotrebi od 1963., sa četvrtim fundamentalnim katalogom (*FK4*—Fricke i Kopff, 1963). Ovaj katalog je urađen u Astronomskom računarskom institutu (*Astronomisches Rechen-Institut*) u Hajdelbergu i sadrži 1535 zvezda. To je osnova zvezdanih položaja za *Astronomical Almanac*. Isti Institut je publikovao godišnji almanah nazvan *Prividni položaji fundamentalnih zvezda* (*The Apparent Places of the Fundamental Stars*), koji daje prividne koordinate svih 1535 zvezda na deseto dnevnim intervalima.

Posmatranja na kojima se zasniva katalog FK4 bila su kompletirana 1950. Standardna epoha kataloga je B1950,0. Naredna posmatranja su obezbedila osnovu za novi fundamentalni katalog (Fricke, 1980), katalog *FK5*, koji je, takođe, pripremljen u Institutu u Hajdelbergu i odnosi se na standardnu epohu J2000,0. Revizija položaja zvezda FK4 bila je završena u 1983., a cilj je bio dodavanje položaja većeg broja slabih zvezda. Nađeno je da značajna revizija ekvatora FK4 nije bila neophodna, ali je ekvinokcij u dva fundamentalna kataloga neprecizno određen. Sledstveno tome, rektascenzije izvedene iz dva sistema razlikovaće se sistematski za

$$\alpha_{\mathrm{FK5}} = \alpha_{\mathrm{FK4}} + 0^{\mathrm{s}},0775 + 0^{\mathrm{s}},085\,T, \tag{12.56}$$

gde je T interval u julijanskim stolećima od J2000,0. Ovo podrazumeva da se sopstvena kretanja u dva sistema, takođe, razlikuju. U stvari, imamo da je

$$(\mu_\alpha)_{\mathrm{FK5}} = (\mu_\alpha)_{\mathrm{FK4}} + 0^{\mathrm{s}},00085. \tag{12.57}$$

Ove razlike iznose samo $1'',275$ po veku. Sistem FK5 koji je na raspolaganju koristi se u godišnjim almanasima od 1984.

Zvezde iz fundamentalnih kataloga mogu se koristiti kao osnovne za relativna merenja klasičnim metodama u astrometriji. Merenje rektascenzije i deklinacije zvezde u fundamentalnom sistemu je, na primer, mnogo jednostavnije pomoću meridijanskog kruga. Publikovani su opšti katalozi, nefundamentalne prirode, koji daju položaje i sopstvena kretanja velikog broja (10^4–10^5) zvezda, idući ka mnogo slabijim veličinama. Ove zvezde obezbeđuju sekundarni referentni sistem. One su razmeštene po nebeskoj sferi sa takvom gustinom da se može očekivati da će ih nekoliko takvih uvek biti na fotografskoj ploči snimljenoj za ma koji region neba. Poznavanje koordinata ovih zvezda može se koristiti za određivanje položaja drugih zvezda na ploči sa potpuno relativnim merenjima. Novi sferni principi koji su sadržani u postupku merenja fotografske ploče, predmet su razmatranja sledeće glave.

Zadaci

12.1. Pokazati da su tačke na nebeskoj sferi pomerene od pola ekliptike za ugao $(\lambda' \sin\varepsilon)/\psi$, ako im se godišnje promene u rektascenziji i deklinaciji svode na komponente sopstvenog kretanja.

12.2. Pokazati da se godišnja promena u pravouglim koordinatama može napisati kao

$$\frac{dx}{dt} = -my - nz + \mu_x, \qquad \frac{dy}{dt} = mx + \mu_y, \qquad \frac{dz}{dt} = nx + \mu_z.$$

12.3. (Fiktivna) zvezda ima rektascenziju 6^{h} i deklinaciju nula za standardnu epohu. Nema poznatu radijalnu brzinu i njeno godišnje sopstveno kretanje za tu epohu je $6''$ sa položajnim uglom jednakim nuli. Pokazati da se u ovakvim okolnostima vekovne promene koordinata svode na

$$S_\alpha = 100\left(\frac{dm}{dt} + 0{,}4n\sin 1''\right)$$

$$S_\delta = -1500mn\sin 1'',$$

gde su m i n izraženi u vremenskim i lučnim sekundama po godini, redom.

12.4. Izračunati ekvatorske koordinate zvezde, iz prethodnog zadatka, za 25 godina pre standardne epohe [Koristiti vrednosti za m i n date u jednači (9.18).]

12.5. Zvezda γ *Ursae Minoris* ima srednje ekvatorske koordinate ($15^h20^m44^s,7$; $71°53'21''$) za epohu 1984,5. Izračunati njene Beselove zvezdane konstante za 1984. godinu [Za podatke vidi (9.12) i (9.18).]

12.6. Pokazati da, ako je zanemarena razlika između baricentra Sunčevog sistema i središta Sunca i izostavljeni E-članovi, tada Beselove zvezdane konstante, za korišćenje u 1984. godini [v. (9.12) i (9.18)], zadovoljavaju jednačinu

$$C^2 \operatorname{sc}^2 \varepsilon + D^2 = \varkappa^2,$$

gde je $\varkappa$ konstanta aberacije.

12.7. Srednje koordinate reperne zvezde (α_1, δ_1) su poznate za sredinu godine za epohu na koju se odnose. Za datum posmatranja se pokazuje da je prividni položaj druge zvezde pomeren od reperne zvezde za iznos $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$. Pokazati da se srednji položaj ove zvezde, pod uslovom da su zanemareni sopstveno kretanje i paralaksa, može napisati preko nezavisnih dnevnih brojeva kao

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* &= \alpha_1 + \Delta\alpha \sin 1''\left[1 - g\cos(G+\alpha_1)\operatorname{tg}\delta_1 - h\cos(H+\alpha_1)\operatorname{sc}\delta_1\right] \\
&\quad - \frac{\Delta\delta}{15}\sin 1''\left[g\sin(G+\alpha_1)\operatorname{sc}^2\delta_1 + h\sin(H+\alpha_1)\operatorname{sc}\delta_1\operatorname{tg}\delta_1\right], \\
\delta_1^* &= \delta_1 + 15\,\Delta\alpha \sin 1''\left[g\sin(G+\alpha_1) + h\sin(H+\alpha_1)\sin\delta_1\right] \\
&\quad + \Delta\delta\sin 1''\left[1 - h\cos(H+\alpha_1)\cos\delta_1 + i\sin\delta_1\right].
\end{aligned}$$

12.8. Proveriti da li se jednačina (12.41) može svesti na praktičniji oblik (12.44).

12.9. Pokazati da gravitacijsko savijanje svetlosti, odvojeno od drugih efekata, može biti aproksimativno napisano kao

$$\Delta\alpha = 0^s,136 \cdot 10^{-3}\cos\delta_\odot \operatorname{sc}\delta\sin(\alpha-\alpha_\odot)\csc^2\frac{1}{2}E,$$

$$\Delta\delta = 2'',04 \cdot 10^{-3}\left[\sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot) - \cos\delta\sin\delta_\odot\right]\csc^2\frac{1}{2}E,$$

gde je E elongacija objekta od Sunca. Pokazati da je

$$\cos E = \sin\delta\sin\delta_\odot + \cos\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot).$$

12.10. Izvesti jednačinu (12.55) iz jednačine (8.72) za prividni pravac tela Sunčevog sistema.

ГЛАВА ТРИНАЕСТА

Astrofotografija

§ **13.1. Centralna projekcija.** Mada detaljno razmatranje posmatračkih tehnika ne spada u ovu knjigu, važno je upoznati se sa osnovnim principima koji će istaći najznačajnije posmatračke metode. Tako se glava 5 odnosi na neposredna i fundamentalna merenja zvezdanih koordinata. U ovoj glavi se razmatra fotografski metod određivanja zvezdanih položaja. To može biti samo relativni položaj, jer zahteva pretpostavku o *a priori* poznavanju nebeskih koordinata nekih zvezda na fotoploči. Astrofotografska merenja moraju biti oslonjena na zadovoljavajući sistem uporišnih zvezda. U najmanju ruku, usvojene koordinate uporišnih zvezda, zavise od merenja koja su razmotrena u glavi 5.

Kao i u ranijoj glavi, usmerićemo razmatranje na geometrijski aspekt posmatračkog procesa, dok su potpuni tehnički problemi dati samo površno. Centralni geometrijski problem koji će biti razmotren u astronomskoj fotografiji jeste predstavljanje nebeske sfere na ravni fotografske ploče. Sa visokim stepenom aproksimacije ovo se može smatrati centralnom projekcijom, prikazanom na sl. 13.1. Slika ilustruje osnovne mogućnosti astronomskog refraktora ukoliko se koristi za fotografiju. Slična razmatranja biće primenjena na teleskope reflektore. Detalji optičkog sistema biće različiti, ali će nebeska sfera biti prikazana na fotoploči matematički identično kao kada bi žižna površ teleskopa bila ravan. Najznačajnije razlike se javljaju kod Šmitovih (SCHMIDT) reflektora, kod kojih fotosloj mora biti savijen da bi se poklopio sa krivinom žižne površi. Međutim, čak i u ovom slučaju, analiza koja sledi može da se koristi posle primene pogodnih popravki. Jednostavnu geometriju idealizovanog refraktora na sl. 13.1 smatraćemo predstavnikom mnogo složenijih sistema.

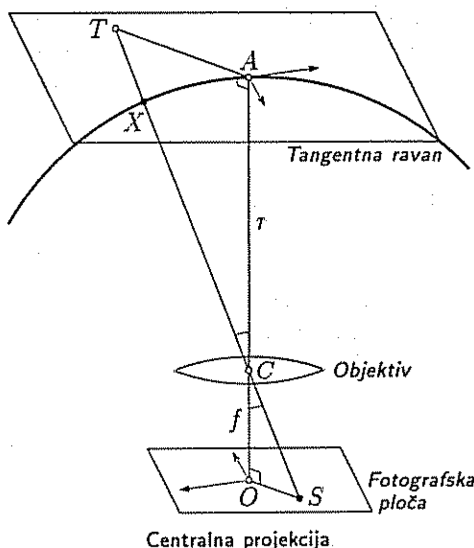
Na sl. 13.1 linija CO je optička osa teleskopa; C je centar objektiva, a O je prodorna tačka ose kroz fotoploču. Fotoploča je smeštena u žižnoj ravni teleskopa i zato je CO normalna na fotoploču.

Zgodno je uzeti da je C formalno centar nebeske sfere. Produžimo optičku osu OC do prodora kroz nebesku sferu u tački A. Jasno je da će zvezda u pravcu A biti preslikana na fotoploči u O. U stvarnosti, ova tačka nije označena ni na koji način, ali su koordinate tačke A potrebne za redukciju merenja fotoploče. Iz razloga
❊ koji će biti jasni sa sl. 13.1, tačka A je nazvana *tangencijalna tačka* nebeske sfere.

Neka je X položaj zvezde na nebeskoj sferi. Povucimo liniju CX i produžimo je u oba smera. Neka CX prodire fotoploču u S; na drugoj strani prodiraće tan-

gentnu ravan, koja je povučena kroz dodirnu tačku A nebeske sfere, u tački T. Kako je C centar objektiva, svaki svetlosni zrak kroz ovu tačku, pa i CX, nije savijen. Lik zvezde X pada u tačku S.

Razmotrimo sledeća dva trougla, OCS i ACT. Kako linija AT leži u tangentnoj ravni, $\sphericalangle TAC = 90°$, a kako SO leži u žižnoj ravni, $\sphericalangle SOC$ je, takođe, prav ugao. Šta više, $\sphericalangle TCA = \sphericalangle SCO$, te su trouglovi OCS i ACT slični. Vidimo da je proces predstavljanja (preslikavanja) zvezda na fotoploču sličan centralnoj projekciji zvezda na tangentnu ravan nebeske sfere u tački A. Ova geometrijska sličnost može da se predstavi u konkretnijem obliku kao što sledi.



Centralna projekcija

Слика 13.1

Neka je r poluprečnik nebeske sfere i f žižna daljina teleskopa, tj. $CA = r$, $OC = f$. Kako su trouglovi ACT i OCS slični, sledi da je

$$AT = \frac{r}{f} OS. \qquad (13.1)$$

Dalje, kako je AT paralelno sa SO, ovaj rezultat može da se proširi i da dâ vektorski ekvivalent

$$\overrightarrow{AT} = -\frac{r}{f}\overrightarrow{OS}. \qquad (13.2)$$

U sfernoj astronomiji se poluprečnik nebeske sfere obično uzima za jedinicu. Stavićemo da je $r = 1$, ili, što je ekvivalentno, merimo dužine u tangentnoj ravni u jedinicama poluprečnika nebeske sfere. Neka su (ξ, η) koordinate tačke T koje se odnose na pogodno izabrane ortogonalne ose u tangentnoj ravni sa početkom u tački A. Jasno je da se ove ose preslikavaju u antiparalelne ose kroz O na fotoploči. Dijagram ilustruje ponašanje osa posmatranih sa strane emulzije, strane bliže objektivu, koje će biti isto kao ponašanje ekvivalentnih osa kako se vide izvan (sa spoljne strane) nebeske sfere. Gledano ovako, što je normalna praksa u merenju fotoploča, negativ će dati inverznu sliku neba, ali će odgovarati normalnim dijagramima nebeske sfere.

Na kraju krajeva, ose na ploči mogu da se realizuju i tačka O može da se identifikuje. Koordinate zvezdanog lika mogu da se mere u odnosu na te ose. Neka su (X, Y) koordinate tačke S. Prvo će biti izražene u proizvoljnim mernim jedinicama, ali pretpostavimo da su i X i Y izražene u jedinicama žižne daljine teleskopa. Onda će, uz implicitnu idealizaciju iz ovog paragrafa, jednačina (13.2) uzeti jednostavan oblik

$$\begin{aligned} \xi &= X \\ \eta &= Y. \end{aligned} \qquad (13.3)$$

Koordinate (ξ, η) su često navođene kao *tangencijalne koordinate* zvezde. One zavise od izbora tangencijalne tačke A i njenih sfernih koordinata. Ako je ovo pri-

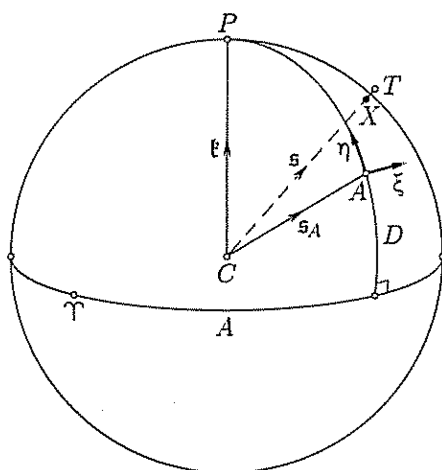
hvaćeno, definicija tangencijalnih koordinata je potpuno formalna i nedvosmislena. U praksi će usvojeni položaj tačke A biti pogrešan i to će uzrokovati sistematsku razliku između računatih tangencijalnih koordinata i koordinata merenih na fotoploči. Postupak merenja fotoploča biće podložan sistematskim greškama, koje potpuno proističu iz posmatračkih grešaka kakve se sreću u svim merenjima. Na sledećem nivou biće neophodno da se razmotre sistematski uzroci razlika tangentnih i merenih koordinata, posebno onih geometrijske prirode. Međutim, pre nego što to učinimo hoćemo da popravimo definiciju tangentnih koordinata i izvedemo relaciju između njih i ekvatorskih koordinata zvezde.

❄ § 13.2. Standardne koordinate.

Standardne koordinate zvezde su definisane kao tangentne koordinate (ξ, η) u odnosu na ose u smeru rasta rektascenzija i deklinacija, redom. Ovi pravci su izabrani sa orijentacijom u odnosu na srednji ekvator standardne epohe. Svodeći sve koordinate zvezda na standardni ekvator i ekvinokcij, učešće precesije i nutacije je izbegnuto.

Ose ξ i η su prikazane na sl. 13.2 za tangencijalnu tačku A. Neka je ta tačka u pravcu jediničnog vektora $\mathfrak{s}_A$ i ima rektascenziju i deklinaciju (A, D) u odnosu na standardni ekvator i ekvinokcij. Onda se

$$\mathfrak{s}_A = (\cos D \cos A, \cos D \sin A, \sin D), \tag{13.4}$$



Standardne koordinate (ξ, η).

Слика 13.2

odnose na uobičajene pravougle ekvatorske ose kroz centar C nebeske sfere.

Označimo jedinični vektor u pravcu svetskog pola P sa $\mathfrak{k}$, tj.

$$\mathfrak{k} = (0, 0, 1). \tag{13.5}$$

Neka su $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$ jedinični vektori paralelni, redom, sa osama ξ i η. Onda tri jedinična vektora $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ i $\mathfrak{s}_A$ čine desni sistem osa. Prelaz sa ekvatorskih na standardne koordinate zahteva rotaciju koordinatnih osa, koja može da se izvede primenom matrice rotacije (v. zadatak 13.4). Međutim, za sada je jednostavnije raditi preko ugaonih koordinata.

Vektor $\mathfrak{I}$ je normalan na oba vektora $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{s}_A$; tako je on u pravcu $\mathfrak{k} \times \mathfrak{s}_A$. Kako taj vektor ima intenzitet $\cos D$, izvodimo da je

$$\mathfrak{I} = \operatorname{sc} D\, \mathfrak{k} \times \mathfrak{s}_A$$

i

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{s}_A \times \mathfrak{I} = \operatorname{sc} D \big[\mathfrak{k} - (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{s}_A)\mathfrak{s}_A\big]. \tag{13.6}$$

Ova dva vektora mogu korišćenjem (13.4) i (13.5) biti izražena preko komponenti

$$\mathfrak{I} = (-\sin A, \cos A, 0)$$
$$\mathfrak{J} = (-\sin D \cos A, -\sin D \sin A, \cos D). \tag{13.7}$$

Sada se standardne koordinate zvezde X ne odnose na njen položaj na nebeskoj sferi, već na tačku T u kojoj linija CX prodire tangentnu ravan. Uzmimo da zvezda ima rektascenziju i deklinaciju (α, δ) i pruža se u pravcu jediničnog vektora $\mathfrak{s}$, tako da

$$\mathfrak{s} = (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta). \tag{13.8}$$

Vektor položaja za T je oblika $\lambda\mathfrak{s}$, gde je λ skalar, i njena vrednost se lako izvodi iz zahteva da T leži u tangentnoj ravni. To znači da je TA normalno na CA ili, u vektorskom obliku,

$$(\lambda\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_A)\cdot\mathfrak{s}_A = 0,$$

odakle je

$$\lambda^{-1} = \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}_A. \tag{13.9}$$

Iz (13.4) i (13.8) imamo da je

$$\lambda^{-1} = \sin D\sin\delta + \cos D\cos\delta\cos(\alpha - A). \tag{13.10}$$

Standardne koordinate zvezde (ξ, η) izvedene su uzimanjem skalarnog proizvoda vektora položaja tačke T sa $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$, dakle,

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda\mathfrak{I}\cdot\mathfrak{s}\\ \eta &= \lambda\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s}.\end{aligned} \tag{13.11}$$

Smenjujući (13.7), (13.8) i (13.10), izvešćemo konačni rezultat kao

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin D\sin\delta + \cos D\cos\delta\cos(\alpha - A)}\\ \eta &= \frac{\cos D\sin\delta - \sin D\cos\delta\cos(\alpha - A)}{\sin D\sin\delta + \cos D\cos\delta\cos(\alpha - A)}\end{aligned} \tag{13.12}$$

Jednačine (13.12) omogućavaju da se za zvezdu poznatog položaja (α, δ) izračunaju standardne koordinate za usvojeni položaj tangentne tačke A. Fotoploča će imati nekoliko uporišnih zvezda čiji je položaj poznat *a priori*. Standardne koordinate svake od njih mogu da se izvedu iz gornjih jednačina. Zatim se uspostavlja veza standardnih koordinata i merenih na ploči—pod idealnim uslovima one će biti identične. Merene koordinate objekta na ploči nepoznatog položaja mogu se transformisati u standardne koordinate. Konačni korak je transformacija tih standardnih koordinata u rektascenziju i deklinaciju za svaki objekt nepoznatog položaja. To zahteva inverziju (13.12), koja će biti učinjena.

Posle nekih preuređenja, druga od jednačina (13.12) može da se napiše kao

$$\operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha - A) = \frac{\cos D - \eta\sin D}{\eta\cos D + \sin D}.$$

Kada se ovo smeni u prvu jednačinu, malo uprošćavanje će dati

$$\operatorname{ctg}\delta\sin(\alpha - A) = \frac{\xi}{\eta\cos D + \sin D}.$$

Ova dva rezultata omogućavaju da se posebno izvedu $(\alpha - A)$ i δ. Eksplicitno važi da je

$$\operatorname{tg}(\alpha - A) = \frac{\xi}{\cos D - \eta \sin D}$$
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin D + \eta\cos D}{\cos D - \eta \sin D}\cos(\alpha - A). \tag{13.13}$$

U odnosu na standardne koordinate biće naglašeno nekoliko tačaka.

(i) Standardne koordinate su formalno definisane preko pojmova nebeske sfere. One zavise samo od položaja zvezde i usvojene tangentne tačke.

(ii) Koordinate zvezde (α, δ) odnose se na standardnu srednju epohu. Razlikuju se od standardnog srednjeg položaja samo za uzimanje u obzir godišnje paralakse i sopstvenog kretanja.

(iii) Rektascenzija i deklinacija koordinatnog početka (A, D) odnose se na standardni ekvator i ekvinokcij i ose ξ i η su korektno poravnate sa standardnim ekvatorom.

(iv) Idealno, standardne koordinate se mogu realizovati kao merene koordinate na ploči, dok u praksi postoji sistematska razlika. Kako ploča zahvata samo nekoliko stepeni neba, očekujemo da i ξ i η budu mali.

§ **13.3. Greška centrisanja.** Položaj tangentne tačke na nebeskoj sferi određen je pravcem optičke ose teleskopa. Da bi se izračunale standardne koordinate, neophodno je da se proceni taj položaj, bilo iz postavke teleskopa, bilo iz, što je verovatnije, pregledom preliminarnih merenja fotoploče. Greška ※ u usvojenoj poziciji tangentne tačke zvaće se *greška centrisanja*.

Pretpostavimo da su (A, D) rektascenzija i deklinacija prave tangentne tačke i napravljena je greška $(\mathrm{d}A, \mathrm{d}D)$ u oceni koordinata ove tačke. Namera je da se izvedu odgovarajuće promene $(\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta)$ u koordinatama zvezde, koje će zavisiti od položaja zvezde, tj. od njenih standardnih koordinata. Mada je preporuka da se zanemare članovi drugog reda u $(\mathrm{d}A, \mathrm{d}D)$, razmatranje nije ograničeno samo na članove prvog reda po (ξ, η).

Koristeći oznake poslednjeg paragrafa, tangentna tačka je definisana vektorom $\mathfrak{s}_A$, a pravci ξ i η vektorima $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$. Svi su oni jedinični vektori i svaki je ortogonalan na svoj izvod. Iz (13.4) dobija se da su promene u $\mathfrak{s}_A$

$$\mathrm{d}\mathfrak{s}_A = \mathrm{d}A(-\cos D \sin A, \cos D\cos A, 0) + \mathrm{d}D(-\sin D\cos A, -\sin D \sin A, \cos D).$$

Koristeći (13.7) ovo se pojednostavljuje na

$$\mathrm{d}\mathfrak{s}_A = \cos D\,\mathrm{d}A\,\mathfrak{I} + \mathrm{d}D\,\mathfrak{J}. \tag{13.14}$$

Isti proces je primenljiv na dve jednačine u (13.7), dovodeći do rezultata

$$\mathrm{d}\mathfrak{I} = \sin D\,\mathrm{d}A\,\mathfrak{J} - \cos D\,\mathrm{d}A\,\mathfrak{s}_A$$
$$\mathrm{d}\mathfrak{J} = -\sin D\,\mathrm{d}A\,\mathfrak{I} - \mathrm{d}D\,\mathfrak{s}_A. \tag{13.15}$$

Razmotrimo sledeći parametar λ dat jednačinom (13.9). Diferenciranje daje

$$\mathrm{d}\lambda = -\lambda^2 \mathfrak{s}\cdot \mathrm{d}\mathfrak{s}_A.$$

Smene iz (13.14) i (13.11) daće

$$\mathrm{d}\lambda = -\lambda(\cos D\,\mathrm{d}A\,\xi + \mathrm{d}D\,\eta). \tag{13.16}$$

Sa ovim preliminarnim rezultatima sada možemo da odredimo tražene promene u ξ i η. Diferenciranje jednačina (13.11) daće

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\lambda\,\mathfrak{I}\cdot\mathfrak{s} + \lambda\,\mathrm{d}\mathfrak{I}\cdot\mathfrak{s}$$
$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\lambda\,\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s} + \lambda\,\mathrm{d}\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s}.$$

Smenjujući diferencijale na desnoj strani iz (13.15) i (13.16) i uzimajući (13.11) i (13.9), dolazimo do rezultata

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi &= -\cos D\,\mathrm{d}A + \sin D\,\mathrm{d}A\,\eta - \cos D\,\mathrm{d}A\,\xi^2 - \mathrm{d}D\,\xi\eta \\ \mathrm{d}\eta &= -\mathrm{d}D - \sin D\,\mathrm{d}A\,\xi - \mathrm{d}D\,\eta^2 - \cos D\,\mathrm{d}A\,\xi\eta. \end{aligned} \qquad (13.17)$$

Greške $(\mathrm{d}A, \mathrm{d}D)$ usvojene tangentne tačke su nepoznate i moraju uslovno da budu određene iz upoređenja računatih standardnih koordinata sa merenim za uporišne zvezde. Prisustvo ostalih uticaja koje treba izračunati biće komplikovano, za ovo upoređivanje, sve dok se ne obračuna. Za sada, zabeležimo jednačine (13.17) u obliku

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi &= c_1 + b_1\eta + \xi(c_1\xi + f_1\eta) \\ \mathrm{d}\eta &= f_1 - b_1\xi + \eta(c_1\xi + f_1\eta), \end{aligned} \qquad (13.18)$$

gde su b_1, c_1 i f_1 konstante.

Članovi (c_1, f_1) koji ne zavise od zvezde, predstavljaju promene početka koordinatnog sistema. Članovi prvog reda u (ξ, η), koji imaju koeficijent b_1, predstavljaju malu rotaciju koordinatnih osa. Redukcija merenja fotoploče je znatno pojednostavljena ako se članovi drugog reda, ponekad poznati kao *greška nagiba*, u standardnim koordinatama mogu zanemariti. To važi u okolini centra ploče. Greška od jedne lučne minute u tangentnoj tački daće rast grešaka drugog reda u standardnim koordinatama od oko 0″,02 na rastojanju 1° od optičke ose. U mnogim situacijama takva greška može da se prihvati i članovi drugog reda su tada izostavljeni. Oni će, ipak, biti uzeti u obzir u astrometriji visoke preciznosti, posebno za široka vidna polja. Jasno je iz (13.17) da je maksimalna vrednost članova drugog reda direktno proporcionalna rastojanju prave tangentne tačke od njenog usvojenog položaja i kvadratu ugaonog poluprečnika vidnog polja.

§ 13.4. Refrakcija i godišnja aberacija.

Uticaj precesije i nutacije u potpunosti je eliminisan definisanjem standardnih koordinata u odnosu na standardni ekvator i ekvinokcij, dok sa ostalim uticajima na položaj ne možemo tako jednostavno da postupamo. Sopstveno kretanje i paralaksa ne mogu da se eliminišu. Standardna srednja mesta uporišnih zvezda moraju da se usklade unošenjem ova dva uticaja. Izgleda da je najbezbedniji način nastavljanje sa uključivanjem sličnih popravki za refrakciju i aberaciju. Međutim, proces je veoma naporan i dovešće do određivanja koordinata traženih objekata koje su podložne ovim uticajima, pa je bolje pokušati apsorbovati ove popravke u procesu redukcije merenja fotoploče.

Ni refrakcija, a ni aberacija, ne potiču od kretanja samih zvezda, već od posmatrača i njegovog okruženja. Sve zvezde iste zone neba trpe skoro iste uticaje. Dakle, može da se očekuje da efekti refrakcije i aberacije mogu da se uklone na isti način kao precesija i nutacija. Ovo je samo delimično tačno. Precesione i nutacione

promene koordinata odgovaraju rotacijama nebeske sfere. Isto tako, ako refrakcija ili aberacija mogu da se aproksimiraju malim rotacijama nebeske sfere, one mogu da se uklone i neće uticati na relativni položaj zvezda na fotoploči. U stvarnosti, međutim, i rafrakcija i aberacija su promene položaja duž velikih krugova i mada se mala rotacija može uzeti za glavni deo uticaja, male razlike položaja diferencijalne prirode će ostati. Pre razmatranja pojedinačnih uticaja atmosferske refrakcije i godišnje aberacije, izvešćemo promene standardnih koordinata zvezde proistekle iz opšte promene položaja.

Kao i ranije, neka je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor koji određuje pravac ka zvezdi. Kako je pokazano u § 1.7, opšta promena položaja na nebeskoj sferi može da se predstavi sa

$$d\mathfrak{s} = k\mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}_0), \tag{13.19}$$

gde je $\mathfrak{s}_0$ verteks pomeranja, tj. zenit za refrakciju i apeks kretanja Zemlje za aberaciju. Parametar k može da se smatra konstantnim u našem razmatranju aberacije i omogućava veoma korisna pojednostavljenja. Ovo nije moguće za refrakciju, jer je promena položaja proporcionalna tangensu, a ne sinusu udaljenosti zvezde od verteksa. Mnogo je pogodnije koristiti (13.19) u razvijenom obliku, koji daje

$$d\mathfrak{s} = k\big[(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_0)\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0\big]. \tag{13.20}$$

Diferenciranje jednačina (13.11) daće promene u standardnim koordinatama zvezde, kao

$$d\xi = d\lambda\, \mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s} + \lambda\, \mathfrak{I} \cdot d\mathfrak{s}$$
$$d\eta = d\lambda\, \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{s} + \lambda\, \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Smenjujući $d\mathfrak{s}$ iz (13.20), zabeležimo iz (13.9) da je

$$d\lambda = -\lambda^2 \mathfrak{s}_A \cdot d\mathfrak{s}.$$

Ovo daje

$$d\xi = -k\lambda^2(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s})\big[(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_0)(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_A) - (\mathfrak{s}_A \cdot \mathfrak{s}_0)\big] + k\lambda\big[(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_0)(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s}) - \mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s}_0\big],$$

sa sličnim izrazom za $d\eta$. Koristeći (13.11) i (13.9), ova dva izraza se svode na

$$\begin{aligned} d\xi &= k\lambda\big[-(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s}_0) + \xi(\mathfrak{s}_A \cdot \mathfrak{s}_0)\big] \\ d\eta &= k\lambda\big[-(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{s}_0) + \eta(\mathfrak{s}_A \cdot \mathfrak{s}_0)\big]. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Skalarni proizvodi koji se pojavljuju u (13.21) su konstante, nezavisne od pojedinih zvezda. Međutim, parametar λ bio je u početku definisan kao intenzitet vektora položaja tačke T na slikama 13.1 i 13.2. U odnosu na skup osa definisan jediničnim vektorima $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{s}_A$, tačka T ima koordinate $(\xi, \eta, 1)$, pa je

$$\lambda = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{1/2}. \tag{13.22}$$

Smenjujući ovo u (13.21), dok zadržavamo tačnost samo drugog reda u standardnim koordinatama, dobiće se sledeći rezultati

$$\begin{aligned} d\xi &= -k(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s}_0) + k(\mathfrak{s}_A \cdot \mathfrak{s}_0)\xi - \frac{k}{2}(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{s}_0)(\xi^2 + \eta^2) \\ d\eta &= -k(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{s}_0) + k(\mathfrak{s}_A \cdot \mathfrak{s}_0)\eta - \frac{k}{2}(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{s}_0)(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \tag{13.23}$$

Sada ćemo nastaviti sa retroaktivnom primenom ovih formula na godišnju aberaciju i refrakciju.

(i) Godišnja aberacija. Usvojeni oblik za ds u (13.19) znači da su uzeti u obzir samo članovi prvog reda (klasične) aberacije; nije se nastojalo da se unesu aberacione popravke u redukciju fotoploča, što je cilj date analize. Umesto da se ekvatorske koordinate za svaku uporišnu zvezdu oslobode uticaja aberacije—i savijanja svetlosti—može se primeniti metoda §12.5, koja koristi matricu rotacije. U klasičnoj obradi, parametar k je konstanta određena brzinom Zemlje.

Onda jednačine (13.23) imaju oblik

$$d\xi = c_2 + a_2\xi + \frac{1}{2}c_2(\xi^2 + \eta^2)$$
$$d\eta = f_2 + a_2\eta + \frac{1}{2}f_2(\xi^2 + \eta^2), \qquad (13.24)$$

gde su a_2, c_2 i f_2 konstante. Postoji očigledna namerna sličnost oznaka u ovoj jednačini i (13.18), ali za razliku od konstanti u toj jednačini, svaki od koeficijenata u (13.24) može da se izračuna, što, ipak, nije neophodno. Članovi nultog i prvog reda biće apsorbovani sličnim članovima koji proističu iz drugih položajnih i instrumentalnih efekata. Totalni koeficijenti za članove ovih redova određeni su empirijski najboljim usaglašavanjem (fitovanjem) merenih i standardnih koordinata uporišnih zvezda, dok se pojedini uticaji ne traže.

Situacija je neznatno različita za članove drugog reda. Njihov prilog, koji je veoma mali, lako se ocenjuje ako primetimo da je k, zapravo, konstanta aberacije ($\sim 20''$). Pokazano je da je, na jedan stepen od optičke ose, maksimalna vrednost aberacionih članova drugog reda samo oko $0'',006$. Prema tome, ovi članovi se često zanemaruju, posebno ako merenje fotoploče zahvata suženo polje. Ako se oni uzimaju u obzir, najbolje ih je dati kao popravku standardnih koordinata, prethodno upoređenih sa merenim položajima. Moraju da se izvedu koeficijenti c_2 i f_2, ali to ne traži bilo kakvu veliku preciznost koju imaju ekstremno male popravke drugog reda.

Iz (13.24) se vidi da su (c_2, f_2) promene nultog reda u standardnim koordinatama, tj. pomeranja $(d\alpha\cos\delta, d\delta)$ usled godišnje aberacije u centru fotoploče. Onda se iz (8.17) vidi da je

$$c_2 = \frac{1}{c}(\dot{Y}\cos A - \dot{X}\sin A)$$
$$f_2 = \frac{1}{c}(\dot{Z}\cos D - \dot{X}\sin D\cos A - \dot{Y}\sin D\sin A). \qquad (13.25)$$

Dnevna aberacija se slično razmatra. To vodi popravci istog oblika kao (13.24). Međutim, kako je dnevni efekt mnogo manji, članovi drugog reda su obično zanemareni i ceo efekt je apsorbovan u redukciju merenja fotoploče.

(ii) Atmosferska refrakcija. Jedinični vektor $\mathfrak{s}_0$ sada prolazi kroz zenit i njegove ekvatorske koordinate su date u obliku

$$\mathfrak{s}_0 = (\cos\varphi\cos T, \cos\varphi\sin T, \sin\varphi). \qquad (13.26)$$

Ovde je φ geografska širina posmatrača, a T je zvezdano vreme posmatranja. Zgodno je uvesti sledeće oznake:

$$\xi_0 = \frac{\mathfrak{I}\cdot\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_A\cdot\mathfrak{s}_0}, \qquad \eta_0 = \frac{\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_A\cdot\mathfrak{s}_0}. \qquad (13.27)$$

Tako (ξ_0, η_0) mogu da se izračunaju. Formalno, to su standardne koordinate tačke zenita, a kako su one reda jedinice—one nisu male veličine. Dalje, uvodeći $\lambda_0 = (\mathfrak{s}_0 \cdot \mathfrak{s}_A)^{-1}$, jednačine (13.21) mogu da se predstave u obliku

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{k\lambda}{\lambda_0}(-\xi_0 + \xi) \\ d\eta &= \frac{k\lambda}{\lambda_0}(-\eta_0 + \eta). \end{aligned} \tag{13.28}$$

Najjednostavnije predstavljanje refrakcije, koje je dato u §4.1, razmatra tu pojavu kao smanjenje zenitne daljine proporcinalno sa $\operatorname{tg} z$. Kada bi to bilo proporcionalno sa $\sin z$, parametar k bi bio smatran konstantom. Dakle, sada to može da se napiše kao

$$k = -k_0 \operatorname{sc} z = -k_0(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_0)^{-1}, \tag{13.29}$$

gde je k_0 konstanta koja neznatno zavisi od atmosferskih uslova. Ovo jednostavno razmatranje je korisno za male zenitne daljine. Blizu horizonta potrebna je mnogo detaljnija teorija refrakcije, koja je praćena dodatnim algebarskim komplikacijama. Ovde ćemo pretpostaviti da k_0 može da se smatra konstantom na celoj ploči.

Pravac ka zvezdi $\mathfrak{s}$ može da se predstavi kao

$$\mathfrak{s} = \lambda^{-1}(\mathfrak{s}_A + \xi\mathfrak{I} + \eta\mathfrak{J})^{-1},$$

tako da je, pomoću (13.21), parametar k sada dat sa

$$k = -k_0\lambda\lambda_0(1 + \xi\xi_0 + \eta\eta_0)^{-1}. \tag{13.30}$$

Pomoću (13.22) jednačina (13.28) se svodi na

$$\begin{aligned} d\xi &= k_0\frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + \xi\xi_0 + \eta\eta_0}(\xi_0 - \xi) \\ d\eta &= k_0\frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + \xi\xi_0 + \eta\eta_0}(\eta_0 - \eta). \end{aligned} \tag{13.31}$$

Da bi se dobila praktična vrednost ovih formula, neophodno ih je razviti u stepeni red po standardnim koordinatama. Primena binomne teoreme daje sledeće rezultate, sa tačnošću do članova drugog reda,

$$\begin{aligned} d\xi = k_0\big[&\xi_0 - (1 + \xi_0^2)\xi - \xi_0\eta_0\eta + \xi_0(2 + \xi_0^2)\xi^2 \\ &+ \eta_0(1 + 2\xi_0^2)\xi\eta + \xi_0(1 + \eta_0^2)\eta^2\big] \\ d\eta = k_0\big[&\eta_0 - \xi_0\eta_0\xi - (1 + \eta_0^2)\eta + \eta_0(1 + \xi_0^2)\xi^2 \\ &+ \xi_0(1 + 2\eta_0^2)\xi\eta + \eta_0(2 + \eta_0^2)\eta^2\big]. \end{aligned} \tag{13.32}$$

Članovi nultog i prvog reda su uključeni u redukciju merenja fotoploče i ne moraju eksplicitno da se izvedu. Međutim, popravke drugog reda moraju da se urade za svaku uporišnu zvezdu posebno. Koordinate (ξ_0, η_0) dobijene su iz (13.12) kao

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\cos\varphi \sin t}{\sin D \sin\varphi + \cos D \cos\varphi \cos t} \\ \eta_0 &= \frac{\cos D \sin\varphi - \sin D \cos\varphi \cos t}{\sin D \sin\varphi + \cos D \cos\varphi \cos t}, \end{aligned} \tag{13.33}$$

gde je t časovni ugao tangentne tačke. Veličine ovih članova drugog reda kao da su neznatno veće od ekvivalentnih članova aberacije, jer je $k_0 \sim 60''$. Međutim, one će vrlo brzo rasti na velikim zenitnim daljinama jer (ξ_0, η_0) formalno teže beskonačnosti na horizontu. U takvim situacijama mogu da se uključe članovi trećeg reda, ali, pri tome, mora da se koristi mnogo realniji zakon refrakcije. To povlači za sobom mogućnost da parametar k_0 zavisi od (ξ, η). Tada algebra postaje nadasve komplikovana i nećemo vršiti dalja istraživanja. Za srednje zenitne daljine, formula (13.32) drugog reda je sasvim adekvatna.

§ 13.5. Pločne konstante.

Određivanje položaja objekta iz astrofotografskih merenja postaje moguće kada se uspostavi veza između standardnih i merenih koordinata. Ta veza je zasnovana na merenjima položaja uporišnih zvezda poznatih koordinata. Pretpostavka je da su mereni položaji dati pravouglim koordinatama (x, y) u jedinicama žižne daljine teleskopa. Ipak, radi potpune preciznosti, upoređenje se vrši između merenih i računatih koordinata, koje su protivstavljene tačnim, standardnim koordinatama.

Razlike računatih i tačnih standardnih koordinata bile su izučene u dva prethodna paragrafa. One potiču od greške centrisanja, godišnje i dnevne aberacije i atmosferske refrakcije. Kombinujući popravke koje proističu od svih pojava, ukupna razlika pravih i računatih standardnih koordinata dobiće oblik

$$\begin{aligned} d\xi &= a_1\xi + b_1\eta + c_1 \\ d\eta &= d_1\xi + e_1\eta + f_1, \end{aligned} \tag{13.34}$$

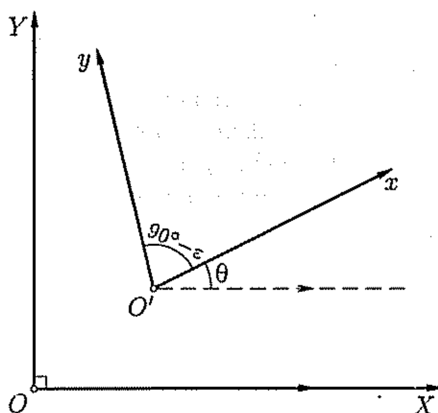
gde je svaki od koeficijenata $a_1, \ldots, f_1$ konstantan ali nepoznat. Jednačine (13.34) ignorišu članove drugog reda. Oni su zaista mali i biće izostavljeni iz argumenata u ovom paragrafu, radi jednostavnosti i jasnoće. Ako ovo zanemarivanje ne zadovoljava, članovi drugog reda za aberaciju i refrakciju mogu da se unesu u računate standardne koordinate, dok samo popravka za nagib ostaje nepoznata. Njihovo dodavanje desnoj strani (13.34) zahteva dva dodatna parametra, kao što pokazuje oblik (13.18). Oni komplikuju problem, ali ga ne čine nerešivim. Potreban je veći broj uporišnih zvezda.

Kako su koeficijenti u (13.34) mali (reda $1'$ ili manji), nema značaja da li se na desnoj strani koriste prave ili računate koordinate. Radi definisanosti, označimo računate standardne koordinate sa (ξ, η) i njihove prave vrednosti sa (X, Y).

Možemo da napišemo jednačine (13.34) kao

$$\begin{aligned} \xi - X &= a_1X + b_1Y + c_1 \\ \eta - Y &= d_1X + e_1Y + f_1. \end{aligned} \tag{13.35}$$

Merene koordinate (x, y) takođe će se razlikovati od (X, Y) zbog brojnih instrumentalnih grešaka. Nabrajaćemo i komentarisati jedino geometrijske greške, ali ćemo pretpostaviti da je na drugoj strani proces snimanja idealan. Na sl. 13.3 tačka O je presek optičke ose i fotoploče. To je koordinatni početak sistema koordinata (X, Y), koji se identifikuje sa pravim standardnim koordinatama. Osnovne instrumentske greške su sledeće:



Слика 13 3

(a) *Nepoklapanje početaka.* Ovo će jasno dovesti do konstantnih razlika (x_0, y_0) između merenih i pravih koordinata

(b) *Greška orijentisanja.* Po definiciji, prave ose OX, OY su korektno postavljene za standardnu epohu. Međutim, x- i y-osa mernog koordinatnog sistema biće nagnuta za mali ugao θ u odnosu na željene pravce.

(c) *Neortogonalnost osa.* Prave ose su strogo ortogonalne, ali ose mernog koordinatnog sistema biće nagnute usled malog nepoklapanja ε jedne ose u odnosu na drugu

(d) *Merna greška.* Merene koordinate bi bile izražene u jedinicama žižne daljine teleskopa. To ukazuje na kalibraciju sa neizbežnom greškom jedinice mere. Verovatno će postojati razdvojene merne greške po x- i y-koordinati.

Kada se svaka od gornjih grešaka ispita odvojeno, dobiće se razilaženje pravih i merenih koordinata u linearnom obliku. Odatle, njihov zbirni iznos može da se predstavi formom

$$\begin{aligned} x - X &= a_2 X + b_2 Y + c_2 \\ y - Y &= d_2 X + e_2 Y + f_2, \end{aligned} \tag{13.36}$$

gde su koeficijenti $a_2, \ldots, f_2$ konstante. Ipak, postoji jedna instrumentalna greška koja treba da se razmotri; to je

(e) *Greška nagiba.* Samo u idealnom slučaju površina fotoploče je upravna na optičku osu. U praksi će postojati mali nagibni ugao između normale na ploču i optičke ose. Ova greška ne proizvodi razilaženje oblika (13.36), ali proizvodi kvadratne razlike koje imaju potpuno isti oblik kao popravka nagiba—[v. (13.18)]. Dakle, ukoliko je njihovo uzimanje u obzir bitno, mogu da se kombinuju dve grupe nagibnih članova. Za sada to nije slučaj i smatramo da je jednačina (13.36) odgovarajuća.

Sada ćemo videti koji je odnos računatih standardnih koordinata (ξ, η) i merenih (x, y). Kombinacija jednačina (13.35) i (13.36) daće

$$\begin{aligned} \xi - x &= aX + bY + c \\ \eta - y &= dX + eY + f, \end{aligned} \tag{13.37}$$

gde je $a = a_1 - a_2$, itd. Veličine a, b, c, d, e, f poznate su kao *pločne konstante*. One potiču iz kombinacije uticaja koji su razmotreni u ovom i prethodna dva paragrafa. Pojedinačni uticaji nisu stvarni predmet razmatranja. Relacija između standardnih i merenih koordinata u obliku (13.37) je postavljena i onda su pločne konstante empirijski određene upoređenjem standardnih i merenih koordinata za uporišne zvezde. Individualni doprinosi pločnim konstantama se nikad ne istražuju.

Sve pločne konstante su male veličine—reda jedne lučne minute, i razmatrane su do tačnosti prvog reda. Dok zanemarivanje članova $O(aX^2)$ može da se stavi pod upitnik, članovi $O(a^2X)$ biće u podmilisekundnoj oblasti i zaista mogu da se

zanemare. Zamena (X, Y) na desnoj strani ili sa računatim standardnim koordinatama ili merenim koordinatama, uneće razlike nižeg reda. Slobodni smo da koristimo pogodnije, normalno merene koordinate, jer su one dostupne i za uporišnu i za traženu zvezdu. Dakle, prepisaćemo (13.37) koristeći merene koordinate na desnoj strani i dobiti

$$\begin{aligned} \xi - x &= ax + by + c \\ \eta - y &= dx + ey + f. \end{aligned} \tag{13.38}$$

§ 13.6. Osnove redukcije fotoploča.

U ovom paragrafu se razmatra procedura određivanja rektascenzije i deklinacije jednog traženog objekta nepoznatog položaja. Namera je da se opišu principi, a ne praksa. Smene, izvođenja i skraćivanja biće podeljene na posebne zadatke. Metod je zasnovan na jednostavnoj linearnoj relaciji između merenih i standardnih koordinata datih u jednačini (13.38).

Pretpostavimo da postoji N uporišnih zvezda na fotoploči čija srednja mesta mogu da se dobiju iz zvezdanog kataloga. Popravke za sopstveno kretanje i godišnju paralaksu, svedene na datum posmatranja, primenjene su na ova srednja mesta, što daje rektascenziju i deklinaciju za svaku uporišnu zvezdu, koje označavamo sa (α_i, δ_i), $i = 1, \ldots, N$.

Usvojeno je da prethodno poznavanje parametara sistema omogućava da se položaj optičke ose na fotoploči odredi, barem, približno. Ta tačka je usvojena kao uporište koordinatnog sistema merenja. Dalje ćemo pretpostaviti da je željena orijentacija koordinatnih osa poznata *a priori* sa zadovoljavajućom tačnošću. Ukoliko to nije slučaj, položaji uporišnih zvezda mogu da se koriste za popravljanje koordinatnih osa.

Kada je merni koordinatni sistem jednom postavljen, rade se merenja svih relevantnih objekata na fotoploči. Neka su (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, merene koordinate uporišnih zvezda i (x, y) koordinate traženog objekta.

Mora da se dâ ocena ekvatorskih koordinata (A, D) tangentne tačke. Koristeći merene koordinate nekih uporišnih zvezda, moguće je, na primer, učiniti inverznu linearnu interpolaciju da se izvedu ekvatorske koordinate početka. Ako to nije zadovoljavajuće tačnosti, rezultujuća greška centrisanja može da izazove znatan nagibni član, a ako je neophodno, ocena može da se izvede u kasnijem stadijumu. Pretpostavimo, u stvari, da je učinjena dobra ocena. Koristeći ove koordinate (A, D) i ekvatorske koordinate uporišnih zvezda, standardne koordinate (ξ_i, η_i), $i = 1, \ldots, N$, sada se računaju za svaku uporišnu zvezdu iz jednačina (13.12).

Sada mogu da se dobiju i standardne i merene koordinate za uporišne zvezde. Dalje, jednačine (13.38) daju $2N$ uslovnih jednačina za pločne konstante, naime

$$\begin{aligned} ax_i + by_i + c &= \xi_i - x_i \\ dx_i + ey_i + f &= \eta_i - y_i. \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{13.39}$$

Jasno je da je najmanje tri uporišne zvezde potrebno za dobijanje pločnih konstanti. U praksi je dostupno mnogo više i da bi se koristili svi podaci, problem se rešava metodom najmanjih kvadrata.

Iz (13.39) sledi da je rešenje za a, b i c odovojeno od onog za d, e, f. Rešenje za a, b, c se dobija iz normalnih jednačina, datih metodom najmanjih kvadrata, i to

$$\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_i y_i + c\sum x_i &= \sum x_i(\xi - x_i) \\ a\sum x_i y_i + b\sum y_i^2 + c\sum y_i &= \sum y_i(\xi_i - x_i) \\ a\sum x_i + b\sum y_i + cN &= \sum(\xi_i - x_i). \end{aligned} \tag{13.40}$$

Sumiranje se obavlja na N uporišnih zvezda. Ovaj oblik normalnih jednačina daje jednake težine svakoj uporišnoj zvezdi. Sličan skup normalnih jednačina daje rešenja za d, e i f; u stvari, koeficijenti na levoj strani su identični.

Ako su rešenja za (c, f) neprihvatljivo velika, to je, verovatno, pokazatelj velike greške centrisanja. Koordinate tangentne tačke mogu da se doteraju tako da mnogo bolje odgovaraju početku mernog koordinatnog sistema. Onda standardne koordinate uporišnih zvezda mogu ponovo da se izračunaju i ceo proces određivanja pločnih konstanti se ponavlja. Takav iterativni postupak je samo pogodnost ako smo sasvim sigurni u usvojeni položaj optičke ose fotoploče.

Ako bi nagibni član bio uključen u analizu, pored pločnih konstanti traže se dodatni parametri. Minimalni broj uporišnih zvezda potrebnih za definitivno rešenje, pre je četiri nego tri. Ponovo, u praksi se koristi metod najmanjih kvadrata. Problem je komplikovan ne samo prisustvom dodatnih parametara, koji traže dalje normalne jednačine, već i činjenicom da dva skupa normalnih jednačina nisu više razdvojena.

Ostavljajući po strani ove komplikacije, pretpostavimo da je linearno razmatranje adekvatno i da su pločne konstante određene zadovoljavajuće. Standardne koordinate ciljnog objekta sada se izvode iz njegovih merenih koordinata pomoću jednačine (13.38). Onda njegove ekvatorske koordinate (α, δ) slede iz primene jednačina (13.13). Značaj ovih koordinata je malo drugačiji, zavisno od toga da li je traženi objekt u Sunčevom sistemu ili ne. Razmotrimo posebno reprezentativan slučaj zvezde i planete. U svakom slučaju, (α, δ) znači koordinate izvedene iz merenja ploča upravo po razmotrenoj proceduri.

(i) Zvezda. Geocentrična paralaksa je sasvim zanemarljiva za sve zvezde. Redukcijom merenja fotoploče automatski se unose popravke za aberaciju i refrakciju. Njihovi uticaji prvog reda su uključeni u pločne konstante. Istina je da, ako popravke drugog reda ne mogu da se zanemare, njihov uticaj mora da se računa za izvedeni položaj ciljne zvezde. Međutim, ako je ploča bila približno centrirana na taj objekt, popravke drugog reda mogu bez opasnosti da se zanemare. Dalje, korišćenje standardnih koordinata obezbeđuje da se izvedene koordinate odnose na standardni ekvator i ekvinokcij. Odatle će se (α, δ) razlikovati od standardnog srednjeg mesta (α_0, δ_0) samo za prisustvo godišnje paralakse i sopstvenog kretanja.

Ako je posmatranje obavljeno t godina posle standardne epohe, onda sledi, iz (8.15), da je izveden i standardni srednji položaj u relaciji

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha t + \frac{\pi}{15}\,\mathrm{sc}\,\delta(X\sin\alpha - Y\cos\alpha) \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta t + \pi(X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta - Z\cos\delta). \end{aligned} \tag{13.41}$$

Ove jednačine su predstavljene u praktičnim jedinicama—zvezdane paralakse su u lučnim sekundama.

(ii) Planeta. Koordinate se prvo popravljaju za geocentričnu paralaksu, jer je to lokalni uticaj. Neka je r geocentrična daljina planete i neka su (ρ, φ') geocentrična daljina i širina posmatrača. Onda, koristeći (4.59), uvodimo popravljene koordinate (α_1, δ_1) date sa

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha + \frac{\rho}{r}\cos\varphi' \sin t \sec\delta \\ \delta_1 &= \delta - \frac{\rho}{r}(\cos\varphi' \cos t \sin\delta - \sin\varphi' \cos\delta).\end{aligned} \tag{13.42}$$

Koordinate (α_1, δ_1) daju, takozvane, *astrometrijske položaje* planeta. ❄

Astrometrijske koordinate su očigledna standardizacija položaja planeta određenih iz merenja astrografskih ploča. U postupku redukcije ploča, unete su popravke za godišnju aberaciju ali nisu uzeta u obzir sopstvena (orbitalna) kretanja planete. Najjednostavniji put da se ovo popravi je da se ponovo uvede planetska aberacija, koja je posebno jednostavna.

Pretpostavimo da je posmatranje obavljeno u trenutku t i da je τ procenjeno svetlosno vreme. Radi jednostavnosti, planetska aberacija se uzima za trenutak koji prethodi trenutku posmatranja za vreme τ. Popravka za godišnju aberaciju data je jednačinom (8.17). Možemo, dalje, da pređemo sa astrometrijskog položaja (α_1, δ_1) na geometrijski položaj (α_2, δ_2), gde je

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + \sec\delta \frac{\dot{Y}\cos\alpha - \dot{X}\sin\alpha}{c} \\ \delta_2 &= \delta_1 + \frac{\dot{Z}\cos\delta - \dot{X}\cos\alpha\sin\delta - \dot{Y}\sin\alpha\sin\delta}{c}.\end{aligned} \tag{13.43}$$

Geometrijski položaj je, u stvari, onaj koji će se tražiti za bilo koju dinamičku analizu i odnosi se na standardni, dakle stalni, ekvator i ekvinokcij. Mora se zapamtiti da se ovaj geometrijski položaj ne odnosi na trenutak posmatranja već na trenutak $(t - \tau)$ ranije.

§ 13.7. Metod veznika.

§13.6 se detaljno osvrće na tradicionalne metode redukcije fotoploča. Mada je sada svrstano u posmatračke metode, korišćenje standardnih koordinata ilustruje važne principe. Šta više, metod opisan u poslednjem paragrafu je veoma primenljiv i zahteva samo skromnu računsku pomoć. Međutim, moderne metode za rutinsku redukciju fotoploča, koriste iterativne postupke koji zahtevaju kompjutere velikih brzina. Osnove ovih metoda opisane su u §13.8. Ovde smo dalje razvili tradicionalne metode, razmatrajući metodu veznika, koja je namenjena pojednostavljenju redukcije fotoploče kada se ista zona neba snima više puta.

Metod veznika je prvenstveno razvijen za određivanje zvezdanih paralaksi. Mada on ima mnogo opštiju primenu, idealan je za te probleme. Određivanje paralaksi zahteva ponovljeno snimanje istog dela neba u raznim trenucima u godini. Paralaktičko pomeranje tražene zvezde je traženo u odnosu na polje okolnih zvezda koje

se smatra nepokretnim. Ako je za sve ploče usvojena ista tangentna tačka, uporišne zvezde imaju stalne standardne koordinate, a one kod tražene zvezde menjaće se za mali iznos. Metod daje i koristi skup konstanti—veznika—koji kvantitativno određuju stepen u kojem položaj tražene zvezde zavisi od svake uporišne zvezde.

Pojednostavljujući diskusiju, usvojimo da postoje samo tri uporišne zvezde čije su standardne koordinate (ξ_i, η_i), $i = 1, 2, 3$. Dok će merene koordinate (x_i, y_i) varirati od ploče do ploče, standardne koordinate su stalne i poznate su a *priori*. Neka su (X_0, Y_0) *ocena* standardnih koordinata tražene zvezde, koje mogu da se izvedu redukcijom jedne izabrane ploče metodama §13.6. Međutim, ovo nije bitno jer merene koordinate uzete sa izabrane ploče verovatno daju sasvim tačnu ocenu.

Na svaku ploču se sada primenjuje sledeća analiza. Dovoljno je da se detaljno razmotri merenje x-koordinate. Neka je x_i merena koordinata i-te uporišne zvezde, a x odgovarajuća koordinata za traženu zvezdu; dalje, neka je ξ standardna koordinata tražene zvezde—sve na razmatranoj ploči. Jednačina (13.38) daje dovoljnu tačnost

$$\xi_i - x_i = a\xi_i + b\eta_i + c, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{13.44}$$

$$\xi - x = aX_0 + bY_0 + c. \tag{13.45}$$

Razmotrimo desnu stranu ovih jednačina. Bile su tako napisane jer standardne koordinate ne zavise od ploče u nizu. Međutim, pločne konstante će varirati od ploče do ploče, ali one mogu da se eliminišu na sledeći način.

Uvedimo konstantni množilac D_i za jednačine (13.44) i kombinujmo je sa jednačinom (13.45) da se dobije, u nemom indeksiranju, jednačina

$$D_i(\xi_i - x_i) - (\xi - x) = a(D_i\xi_i - X_0) + b(D_i\eta_i - Y_0) + c(D_1 + D_2 + D_3 - 1). \tag{13.46}$$

Sada množioci D_i mogu biti izabrani tako da su koeficijenti a, b, c nule. Tada, ispisujući u potpunosti, D_1, D_2 i D_3 su određeni jednačinama

$$\begin{aligned} D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3 &= X_0 \\ D_1\eta_1 + D_2\eta_2 + D_3\eta_3 &= Y_0 \\ D_1 + D_2 + D_3 &= 1. \end{aligned} \tag{13.47}$$

Rešenja jednačina (13.47) nazvana su *veznicima*. Napomenimo da su oni isti za sve ploče u seriji. Veznici su dobijeni rešavanjem sistema od tri jednačine (13.47), recimo, pomoću determinanti.

Sa ovim izborom množioca jednačina (13.46) se mnogo pojednostavljuje. Desna strana iščezava i jednačina se svodi na jednostavan izraz za standardnu koordinatu ξ ciljne zvezde. Slična jednačina ostaje i za η. U stvari, u školskoj notaciji, biće

$$\begin{aligned} \xi &= x + X_0 - D_i x_i \\ \eta &= y + Y_0 - D_i y_i. \end{aligned} \tag{13.48}$$

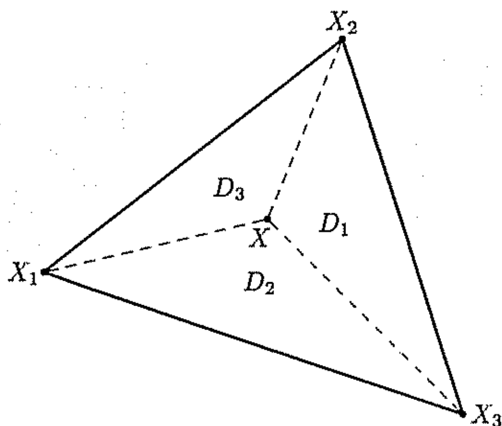
Ove jednačine omogućavaju da se standardne koordinate ciljne zvezde dobiju direktno iz njenih merenih koordinata i koordinata triju uporišnih zvezda. Posao je manji jer pločne konstante ne moraju da se određuju za svaku ploču.

Postoji geometrijska interpretacija triju veznika. Neka su X_1, X_2, X_3 na sl. 13.4 položaji tri zvezde nacrtane u ravni ξ–η, dobijenoj korišćenjem standardnih koordinata. Neka je X tačka (X_0, Y_0), ocenjeni položaj tražene zvezde. Tada može biti

pokazano (v. zadatak 13.8) da veznici mogu da se izraze kao delovi površine trougla na slici. U stvari je

$$D_1 = \frac{\Delta X X_2 X_3}{\Delta X_1 X_2 X_3}, \quad \text{itd.}, \tag{13.49}$$

što omogućava grafičko određivanje veznika. Oni su, u stvari, određeni sa dovoljnom tačnošću ako su merene koordinate (sa bilo koje ploče) korišćene umesto standardnih koordinata u jednačini (13.47), ili jednako crtajući dijagram sa slike 13.4. Metod je najbolji kada je tražena zvezda blizu težišta trougla $X_1X_2X_3$. U svakom slučaju, tri uporišne zvezde treba da se izaberu tako da se u trouglu koji one definišu nađe tražena zvezda—inače, najmanje jedan od veznika je negativan.



Zavisne veličine za tri uporišne zvezde

Слика 13.4

Metod veznika može da se proširi na korišćenje dodatnih uporišnih zvezda. Tada je analiza mnogo komplikovanija. Koristeći standardne umesto merenih koordinata u (13.40), pločne konstante su rešenja normalnih jednačina

$$\begin{aligned} a\sum \xi_i^2 + b\sum \xi_i\eta_i + c\sum \xi_i &= \sum \xi_i(\xi_i - x_i) \\ a\sum \xi_i\eta_i + b\sum \eta_i^2 + c\sum \eta_i &= \sum \eta_i(\xi_i - x_i) \\ a\sum \xi_i + b\sum \eta_i + cN &= \sum (\xi_i - x_i), \end{aligned} \tag{13.50}$$

gde je N ukupni broj zvezda. Ove jednačine se kombinuju sa (13.45) u cilju anuliranja koeficijenata pločnih konstanti. Stvar će možda biti ispitana u zadacima 13.9 i 13.10, gde su date rezultujuće formule za veznike D_i. Standardne koordinate ciljne zvezde ponovo su date sa (13.48), ali je sumiranje sada prošireno na svih N uporišnih zvezda.

§ 13.8. Neposredno korišćenje pravouglih koordinata.

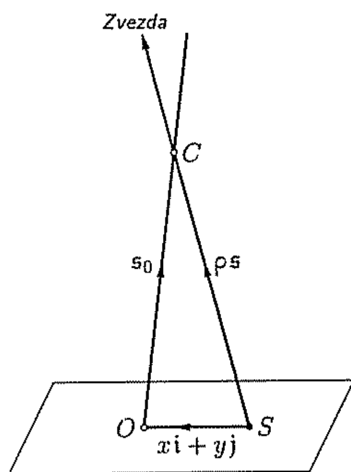
Standardne koordinate su detaljno razmatrane u ovoj glavi. One su bez sumnje važan teorijski koncept i ilustruju idealizovani oblik procesa stvaranja likova na fotoploči. Međutim, u poslednje vreme one su bile i više od toga. Pre kompjutera za složene iterativne metode, standardne koordinate su bile esencijalna sredina između onog što je mereno na ploči i zvezdanih koordinata na nebu. Međutim, one više ne moraju da ispunjavaju ovu ulogu jer mogu da se izdvoje metode koje redukuju fotografska merenja direktno u pravougle koordinate.

Posle svega, standardne koordinate su ekvivalentne specijalnom izboru koordinatnih osa, sa jednom osom usmerenom ka tangentnoj tački. Redukcija fotoploča zasnovana na vektorskim metodama ne zavisi od izbora koordinatnog sistema i

time može da se formuliše tako da daje pravougle koordinate direktno u obliku koji će se eventualno tražiti. Tradicionalni metod redukcije fotoploča, razmatran u §13.6 je, u stvari, mnogo jednostavniji nego što bi se očekivalo. Danas on može da se obradi džepnim kalkulatorom. Međutim, tradicionalni metod je dobar samo ako su članovi drugog reda, posebno nagib, zanemarljivi. Redukcija visoke preciznosti, čak koristeći standardne koordinate, još uvek zahteva iterativne računske metode. Dakle, prednosti ranijih metoda su izgubljene. Prema tome, moderne metode nastoje da se sasvim odvoje od standardnih koordinata.

Dat je kratak pregled i za direktne metode redukcije ploča. Ovo je zasnovano na idealizaciji centralne projekcije, već uvedene u §13.1. Kako metod mora da ide preko članova prvog reda, verovatno je najzgodnije uključiti sve uticaje na koordinate zvezda. Prema tome, koordinate korišćenih uporišnih zvezda su posmatrane koordinate, u koje su uključene promene položaja zbog refrakcije i aberacije i, ako je potrebno, defleksije svetlosti. Koordinate izvedene za svaki drugi objekt, takođe će imati obračunate ove uticaje. Međutim, položaji svih zvezda još uvek se odnose na standardni ekvator i ekvinokcij.

Na sl. 13.5 tačka C predstavlja centar projekcije. Zvezda u pravcu $\mathfrak{s}$ preslikana je u tačku S na ploči. Vektor $\overrightarrow{SC}$ je u tom pravcu. Pretpostavimo da zvezda ima merene koordinate (x, y) u odnosu na početak O. Ove koordinate bi idealno mogle da se predstave u jedinicama žižne daljine. Definisaćemo CO kao jedinicu dužine, tako da je $\overrightarrow{OC}$ strogo jedinični vektor, recimo $\mathfrak{s}_0$. Sada vektor $\overrightarrow{SO}$ na ploči može da se napiše kao



Слика 13.5

$$\overrightarrow{SO} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}. \quad (13.51)$$

U idealnim okolnostima, vektori $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ poistovetiće se sa ortogonalnim jediničnim vektorima $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$, uvedenim u §13.2. Sve što može da se kaže o instrumentskim greškama pobrojanim u §13.5 je da su bliske jediničnim vektorima. Oni nisu neophodno upravni jedan na drugi ili na jedinični vektor $\mathfrak{s}_0$.

Sada, neka je $\rho = CS/CO$. Onda, sa gornjim definicijama, imamo strogo

$$\mathfrak{s} = \rho^{-1}(\mathfrak{s}_0 + x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}). \quad (13.52)$$

Ova jednačina mora da se primeni na uporišne zvezde radi izvođenja položajnog vektora bilo kog objekta na fotoploči, jer je ρ eliminisano uslovom da je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor. Formalno,

$$\rho^2 = (\mathfrak{s}_0 + x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j})^2. \quad (13.53)$$

Pretpostavimo da ima N uporišnih zvezda sa položajnim vektorima $\mathfrak{s}_k$ i merenim koordinatama (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, N$. Za svaku uporišnu zvezdu definišemo rezidualni vektor dat sa

$$\mathfrak{v}_k = \rho_k^{-1}(\mathfrak{s}_0 + x_k\mathfrak{i} + y_k\mathfrak{j}) - \mathfrak{s}_k. \quad (13.54)$$

Sada se, na prvi pogled, vidi da ima devet veličina koje se izvode, to su komponente tri nepoznata vektora. U stvari, ima samo osam nepoznatih, jer je s_0, po definiciji, jedinični vektor. Dakle, veličina koja će se minimizirati nije suma kvadrata odstupanja već funkcija ϕ definisana kao

$$\phi = \sum_{k=1}^{N} v_k^2 + \lambda(s_0^2 - 1). \tag{13.55}$$

Ovde je λ neodređeni Lagranžov množilac, a funkcija ϕ se tretira kao funkcija svih devet komponenti tri nepoznata vektora. Uslov minimuma funkcije ϕ vodi ka devet skalarnih normalnih jednačina, koje, zajedno sa uslovom $s_0^2 = 1$, omogućavaju u osnovi kompletno rešenje.

Jasno je da je problem veoma komplikovan. Mada znatne pojednostavljujuće aproksimacije mogu da se učine, normalne jednačine su stvarno nelinearne i mogu da se reše samo iterativno. Teškoće nastaju jer vrednosti veličina ρ_k zavise od rešenja za tri vektora i, j i s_0, koji su potrebni za uspostavljanje ovih rešenja. Zadovoljavajuće početne vrednosti za ρ_k omogućene su početnim aproksimacijama da tri tražena vektora čine ortonormalni set, što je, kao prva aproksimacija,

$$\rho_k^2 = 1 + x_k^2 + y_k^2. \tag{13.56}$$

Onda normalne jednačine daju tri vektora i, j, s_0, eksplicitno, inicirajući iteraciju između (13.53) i normalnih jednačina. Proces konvergira brzo.

Gornji argumenti daju kratak pregled direktnih metoda redukcije fotoploča. Detaljno razmatranje je izvan opsega ove knjige i mora da se pogleda u detaljnijoj analizi [v. Murray, 1983; glava 8].

Zadaci

13.1. Pokazati da je, u prvoj aproksimaciji, trag zvezde deklinacije δ na fotoploči dat sa

$$y = \text{const.} + \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{tg}\delta$$

i da projekcija meridijanskog rastojanja $\Delta\alpha$ od centralnog meridijana gradi sa poslednjim ugao $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\Delta\alpha \sin D)$, gde je D deklinacija centra ploče. [Smart (1977)]

13.2. Dokazati da su ekvatorske koordinate (α, δ) zvezde date preko standardnih koordinata (ξ, η) sa

$$\alpha = A + \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\cos D - \eta \sin D}\right),$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin D + \eta\cos D}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{1/2}}\right),$$

gde su (A, D) ekvatorske koordinate tangentne tačke.

13.3. Dokazati da su standardne koordinate zvezde (α, δ) date sa

$$\xi = \cos q \operatorname{sc}(q - D) \operatorname{tg}(\alpha - A),$$

$$\eta = \operatorname{tg}(q - D),$$

gde su (A, D) ekvatorske koordinate tangentne tačke i $q = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\delta \operatorname{sc}(\alpha - A)\right]$.

13.4. Jedinični vektori s i s_A definišu pravce ka zvezdi i tangentnoj tački u pravouglom sistemu koordinata. Pokazati da standardne koordinate zvezde mogu da se dobiju primenom matrice rotacije $\mathfrak{R}$ na vektor $(s\ s_A)^{-1}s$, gde je

$$\mathfrak{R} = \begin{Vmatrix} -\sin A & \cos A & 0 \\ -\cos A \sin D & -\sin A \sin D & \cos D \\ \cos A \cos D & \sin A \cos D & \sin D \end{Vmatrix}.$$

13.5. Tri zvezde u jatu Plejade imaju ekvatorske koordin. $(3^h45^m12^s,5;\ 24°28'03'')$, $(3^h46^m19^s,5;\ 23°56'55'')$ i $(3^h49^m09^s,7;\ 24°03'13'')$. Izračunati njihove standardne koordinate za ploču sa centrom u $(3^h47^m;\ 24°00')$.

13.6. Koristeći rezultate prethodnog zadatka, izračunati veznike zvezde sa ocenom standardnih koordinata (0,0002; 0,0018) iz tri zvezde čije su koordinate bile date.

13.7. Nastavljajući istraživanja iz prethodna dva zadatka, merene koordinate tri uporišne zvezde su (−0,007 12; 0,008 34), (−0,002 71; −0,000 72) i (0,008 56; 0,001 12), dok traženi objekt ima merene koordinate (0,000 19; 0,001 96). Izračunati rektascenziju i deklinaciju traženog objekta.

13.8. Dokazati da veznici mogu da se izraze u jednačini (13.49) kao odnos površi trouglova koje čine tri uporišne zvezde i traženi objekt.

13.9. Ako imamo n uporišnih zvezda na fotoploči sa standardnim koordinatama (ξ_i, η_i) i merenim koordinatama (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, pokazati da su pločne konstante a, b, c rešenja normalnih jednačina

$$a\sum \xi_i^2 + b\sum \xi_i\eta_i + c\sum \xi_i = \sum \xi_i(\xi_i - x_i)$$

$$a\sum \xi_i\eta_i + b\sum \eta_i^2 + c\sum \eta_i = \sum \eta_i(\xi_i - x_i)$$

$$a\sum \xi_i + b\sum \eta_i + nc = \sum(\xi_i - x_i)$$

sa sličnim jednačinama za d, e, i f. Ovde je sumiranje svih n zvezda.

13.10. Traženi objekt ima ocenjene standardne koordinate (X_0, Y_0) na ploči sa n uporišnih zvezda. Pokazati da prave standardne koordinate mogu da se dobiju iz jednačine (13.48) koristeći veznike D_i određene sa

$$D_i = P\xi_i + Q\eta_i + R,$$

gde su P, Q, i R rešenja sistema jednačina

$$P\sum \xi_i^2 + Q\sum \xi_i\eta_i + R\sum \xi_i = X_0$$

$$P\sum \xi_i\eta_i + Q\sum \eta_i^2 + R\sum \eta_i = Y_0$$

$$P\sum \xi_i + Q\sum \eta_i + nR = 1.$$

Глава Четрнаеста

Daljine i kretanja zvezda

§ **14.1. Astrofizički osvrt.** Od svih detaljno razmotrenih promena položaja zvezde, samo sopstveno kretanje i paralaksa imaju direktni odnos sa fizičkim karakteristikama same zvezde. Trigonometrijska analiza zvezdanih paralaksi određuje daljine zvezda. Kada je to poznato, sopstveno kretanje omogućava informaciju o kretanju zvezde upravno na vizuru. Ova informacija se povezuje jednostavno sa onom izvedenom iz spektroskopskih određivanja radijalne brzine.

Primena metoda za određivanje položaja (položajna metoda, pp.) je značajna u izučavanju zvezda i njihove ukupne raspodele u Galaksiji, ali je ograničena činjenicom da promene položaja opadaju sa rastom rastojanja. Za većinu zvezda, paralaksa je jednostavno nemerljiva. Trigonometrijske paralakse postaju samo prva veza u lancu argumenata koji se odnose na daljine zvezda. Dakle, to je suštinska prva veza i tačno je reći da su sva merenja daljina zasnovana na ograničenom broju merljivih trigonometrijskih paralaksi. Mnogi zaključci koji se tiču daljina zvezda izvedeni su iz nepoložajnih posmatranja, korišćenjem u osnovi tehnike spektroskopije i fotometrije. Namera je da se u ovoj glavi odredi doprinos položajne astronomije u širem kontekstu izučavanja strukture i dinamike Galaksije. Kako sopstvena kretanja imaju značajan udeo, i fotografske tehnike su opšte prihvaćene, prethodna razmatranja u glavama 11 i 13 biće od posebnog značaja. Na mestima gde želimo mnogo detaljnije da razmotrimo položajne metode, problemi su ponekad zgodno formulisani preko standardnih koordinata.

Metode spektroskopije daju radijalne brzine, neophodne komplemente sopstvenih kretanja. Međutim, spektralna analiza omogućava mnogo više informacija od ovog. Detaljna spektralna klasifikacija zvezda je moguća i osnovni spektralni tipovi su nabrojani u tabeli 14.1. Kao što tabela pokazuje, spektralni tip je tesno vezan sa temperaturom. To je površinska temperatura zvezde koja u osnovi određuje koja će spektralna linija biti istaknuta. Finije razlike u spektrima daju podelu zvezda na različite klase sjaja, nabrojane u tabeli 14.2. Većina zvezda su klase V —glavni niz. Međutim, posebno su važne najsjajnije zvezde, jer su one vidljive na većim daljinama. Na primer, sve zvezde koje su bile pojedinačno izučavane u drugim galaksijama, neminovno su izuzetne sjajnosti.

Zvezda se svrstava u spektralni tip korišćenjem posmatračkih kriterijuma zasnovanih na relativnom intenzitetu linija njenog spektra. Svaki spektralni tip podeljen

Tabela 14.1. Osnovni spektralni tipovi zvezda

Klasa	Značajne spektralne linije	Temperatura [K] (glavni niz)
O	HeII, HeI	>30 000
B	HeI, H	10 000–30 000
A	H linije najveće snage	7 500–10 000
F	H. metali (jonizovani i neutralni)	6 000– 7 500
G	CaII, H, neutralni metali	4 800– 6 000
K	Dominirajuće neutralne linije, neke molekularne linije	3 500– 4 800
M	Široki molekularni opsezi (TiO)	2 500– 3 500

Tabela 14.2. Spektralne klase luminoznosti

I	Super džinovi
II	Sjajni džinovi
III	Džinovi
IV	Poddžinovi
V	Glavni niz (patuljci)
VI	Podpatuljci
VII	Beli patuljci

je u deset podklasa, na primer A0, A1, ..., A9, poslednja se dodiruje sa F0. Navedene temperature se odnose na oblast *efektivnih temperatura* zvezda glavnog niza u svakoj od osnovnih spektralnih klasa. Efektivne temperature su definisane preko kontinualnog zračenja zvezde, kao temperatura ekvivalentnog perfektnog izvora—crnog tela iste površine.

Intenzitet pojedinih spektralnih linija veoma je osetljiv na temperaturu, ali je on, takođe, pod dejstvom obilja prisutnih hemijskih elemenata i okolnog pritiska elektrona. Ovo poslednje je znatno različito kod džinova i patuljastih zvezda i uzrokuje razlike u spektrima, pomenute ranije. Znači, postoje vidne temperaturne razlike između džinova i zvezda patuljaka istog spektralnog tipa.

Tople zvezde O- i B-tipa često se navode kao zvezde *ranog tipa*, dok se one na hladnom kraju spektralnog niza navode kao zvezde *kasnog tipa*. Ovi pojmovi, koji su opstali do danas, uglavnom su napuštena ideja o zvezdanoj evoluciji. Trenutno ne treba davati značaj spektralnim pojmovima „rani“ i „kasni“.

Površinska temperatura zvezda ne utiče samo na apsorpcione linije spektra već i na spektralnu raspodelu osnovnog kontinualnog zračenja. Boja zvezde ukazuje na njenu površinsku temperaturu; najtoplije zvezde su plavo-bele, a najhladnije narandžaste ili čak crvene. Merenje boje može da se kvantifikuje poređenjem prividnog sjaja zvezde u raznim zonama spektra.

Prividna veličina zvezde je logaritamska mera fluksa F energije koju prima posmatrač. Sistem veličina potiče, u stvari, iz antičke Grčke, još kada je Hiparhos podelio zvezde vidljive golim okom na šest prividnih zvezdanih veličina. Kako je osetljivost oka približno logaritamska, sistem je tačno napravljen, tako da se prividne veličine dve zvezde m_1 i m_2 odnose prema njihovim fluksovima F_1 i F_2 kao

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{F_1}{F_2}. \tag{14.1}$$

Nula prividnih veličina je izabrana tako da najsjajnije zvezde (severnog neba? pp.) imaju veličinu blizu nule. Rast od pet veličina odgovara opadanju fluksa za faktor 100. Stavimo, tehnički, da je jedna veličina –4 decibela. Najslabije zvezde koje

mogu da se vide golim okom imaju veličinu 6, a najslabiji objekti koji mogu da se vide najmoćnijim teleskopima imaju veličine daleko preko 20.

Fluksevi iz (14.1) treba da budu integralni fluksevi preko celog elektromagnetskog spektra. Odgovarajuće veličine se nazivaju *bolometrijske veličine*. One, svakako, ne mogu da se mere direktno, jer mora da se uzme u obzir ekstinkcija u atmosferi Zemlje i ograničen spektralni odziv fotometra. Razni sistemi veličina bili su definisani i standardizovani na raznim talasnim dužinama. Najznačajniji od njih je U–B–V sistem ultraljubičastih, plavih i vizuelnih veličina. Ove i posebno vizuelne veličine su češće korišćene od teorijskih bolometrijskih veličina. Veličine U, B i V su sve merene na isti način—korišćenjem fotomultiplikatora sa odgovarajućim filtrom. Vizuelne veličine se odnose na talasnu oblast na koju je čovekovo oko najosetljivije. Zbog ovoga je termin „vizuelni" preživeo, mada su merenja postala „bezlična", kao i u nekom drugom sistemu.

Jednačina (14.1) može da se koristi za svođenje veličina dveju zvezda na bilo koji sistem, pazeći samo da su F_1 i F_2 shvaćeni kao (sa odgovarajućim težinama) fluksovi u korektnim talasnim oblastima. Jednačina još omogućava proizvoljan izbor nulte tačke. Sistem U–B–V je izabran tako da su sve tri veličine jednake za zvezde glavnog niza i spektralnog tipa A0.

Razlike veličina $(U–B)$ i $(B–V)$ poznate su kao *kolor indeksi*. Oni daju informaciju o kontinualnom spektru zvezde i, čak, o njenoj temperaturi. Kolor indeks $(B–V)$ je važniji. On je korelisan veoma dobro sa spektralnim tipom i omogućava posmatrački pristupačnije alternative.

Efekt međuzvezdane apsorpcije na česticama prašine pocrvenjuje svetlost dalekih zvezda. Detaljno izučavanje zvezdanog spektra i dalje će pokazivati isti spektralni tip, ali će kolor indeks biti promenjen, jer čvrste čestice apsorbuju više u plavoj oblasti spektra nego u crvenoj. Korišćenje dva kolor indeksa omogućava da se prisustvo međuzvezdanog pocrvenjenja (izbegavati pojam: crveni-pomak!? pp.) identifikuje i ukloni.

Dosadašnje razmatranje se odnosilo na prividne veličine zvezda, koje je povezano sa fluksom zračenja od zvezde do posmatrača. Ako se zanemari međuzvezdana apsorpcija, ovaj fluks je direktno proporcionalan sopstvenom sjaju zvezde i obrnuto je proporcionalan kvadratu rastojanja. *Apsolutna veličina* zvezde definiše se kao prividna veličina zvezde koju bi ona imala na standardnom rastojanju od deset parseka od Sunca. Apsolutna veličina je mera svetljenja zvezde, kada su efekti rastojanja i bilo kakve apsorpcije uklonjeni.

Pretpostavimo da je daljina zvezde d parseka i njen posmatrani fluks F. Onda je fluks koji bi zvezda slala sa standardne daljine od 10 parseka F_s, gde je

$$F_s = \frac{d^2 F}{100}. \tag{14.2}$$

Iz jednačine (14.1) apsolutna veličina zvezde M odnosi se prema njenoj prividnoj veličini m kao

$$M = m + 2{,}5 \log \frac{F}{F_s}.$$

Preko (14.2) ovo se svodi na

$$M = m + 5 - 5 \log d. \tag{14.3}$$

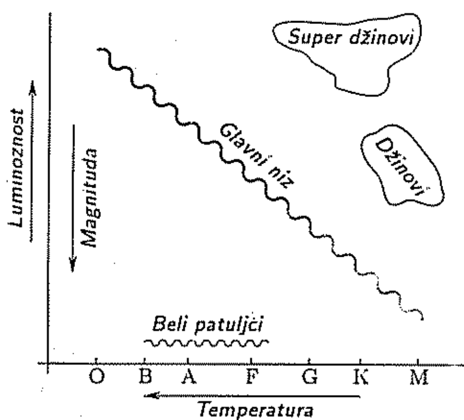
Alternativno, ako se umesto d koristi paralaksa zvezde (u lučnim sekundama), relacija je

$$M = m + 5 + 5 \log \pi. \qquad (14.4)$$

Apsolutna veličina može da se definiše da odgovara bilo kom sistemu prividnih veličina, U, B, V, itd., ili kao apsolutna bolometrijska veličina. U svakom slučaju, moći će da se primeni jednačina oblika (14.4).

Tradicionalni način istraživanja i predstavljanja fizičkih karakteristika zvezda i njihovog međusobnog odnosa bio je Hercšprung-Raselov (H–R, HERTZSPRUNG–RUSSELL) dijagram. Svaka zvezda je predstavljena tačkom na dijagramu; na apscisi su spektralni tipovi (klase) zvezda, a na ordinati sjaj zvezda. Tačke koje odgovaraju stvarnim zvezdama nisu slučajne, već su svedene na sigurno određene oblasti. Najveća koncentracija najobičnijih zvezda na H–R dijagramu je u glavnom nizu, koji se prostire od gornjeg levog do donjeg desnog ugla. To je prikazano na sl. 14.1 zajedno sa nekim drugim klasama sjaja.

H–R dijagram može iz posmatranja da se konstruiše na dva načina. Razmotrimo prvo zvezdu u neposrednoj okolini Sunca, dovoljno blisku da se njena paralaksa meri tačno. Prividna veličina zvezde može onda da se pretvori u apsolutnu veličinu pomoću (14.4), dok se spektralni tip zvezde otkriva direktno iz posmatranja. Onda može da se konstruiše H–R dijagram za sve zvezde iz Sunčeve okoline. Ovo otkriva samo dve spektralne klase, glavni niz i stvarno sjajne bele patuljke. Međutim, glavni niz je nekompletan jer nema zvezda ranije spektralne klase od A0.



H–R dijagram.

СЛИКА 14.1

H–R dijagrami mogu da se konstruišu i za zvezdana jata. To su kompaktne grupe zvezda i radna pretpostavka je da su sve zvezde u jatu na istom rastojanju. Ovo rastojanje je nepoznato, tako da pojedine prividne veličine ne mogu da se pretvore u apsolutne. Međutim, za svaki objekt u jatu, razlika njegove prividne i apsolutne veličine biće ista. Ova razlika $(m - M)$ poznata je kao *modul daljine* jata. Ako se za ordinatu uzmu prividne veličine, može da se napravi zadovoljavajući H–R dijagram za jato, u kome je samo nula skale sjaja neodređena. Umesto detaljne spektralne klasifikacije, slučajno je veoma jednostavno koristiti kolor indeks $(B–V)$.

Zvezde su, zaista, osnovni konstituenti Galaksije, ali je znatan deo materije u obliku međuzvezdanog materijala. On je delom u obliku prašine, a delom u obliku međuzvezdanog gasa. Obe komponente se pojavljuju zajedno i koncentrisane su u oblake prečnika od nekoliko parseka. Međuzvezdana materija je koncentrisanija ka galaktičkoj ravni od zvezda.

Apsorpcija na međuzvezdanoj prašini je strogo u galaktičkoj ravni. Prema tome, efektivna optička posmatranja svedena su samo na deo Galaksije; galaktički

centar je „nevidljiv". Duži talasi su definitivno pogodniji jer oni prodiru međuzvezdanu „maglu" veoma lako, što znači da apsorpcija radio talasa na česticama prašine može potpuno da se zanemari. Dalje, gasna komponenta međuzvezdane materije može da se izuči na talasnoj dužini od 21 cm radio spektra atomskog vodonika. To omogućava važan metod pravljenja mape spiralne strukture Galaksije.

Sistem galaktičkih koordinata bio je uveden u §2.7. Za razliku od ravni putanje, to je formalna definicija i ravan Galaksije nema precizne i nedvosmislene definicije. Galaktički ekvator je bio izabran tako da se dobro poklapa sa raspodelom međuzvezdanog vodonika kako se registruje na 21 cm. Definicija je delimično proizvoljna, čak subjektivna. Koordinatni sistem je definisan preko usvojenih koordinata galaktičkog pola i položajnog ugla galaktičkog centra, naime

$$\alpha_G = 12^h49^m, \qquad \delta_G = 27°24', \qquad \theta = 123°. \tag{14.5}$$

Ekvatorske koordinate tačke $b = 0$, $l = 0$, određene su ovom definicijom. Ova tačka je najbliža galaktičkom centru, kako pokazuje snažan diskretni radio izvor, *Sagittarius A*.

§14.2. Merenje paralakse i sopstvenog kretanja.

Kao što je opisano u §13.6, redukcija fotoploča daje rektascenziju i deklinaciju zvezde (α, δ) koje odgovaraju trenutku posmatranja i sadrže uticaje godišnje paralakse i sopstvenog kretanja. Napišimo u skraćenom obliku

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \tfrac{1}{15}\,\mathrm{sc}\,\delta(X \sin\alpha - Y\cos\alpha) \\ F_\delta &= X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta - Z\cos\delta. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Veličine F_α i F_δ navode se kao *paralaktički faktori* u rektascenziji i deklinaciji, redom. Sada se jednačine (13.41) mnogo kraće predstavljaju sa

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha t + \pi F_\alpha \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta t + \pi F_\delta, \end{aligned} \tag{14.7}$$

gde je (α_0, δ_0) standardni srednji položaj, a t je interval u godinama od standardne epohe.

Određivanje zvezdane paralakse povezano je sa određivanjem sopstvenog kretanja. Paralaktički faktori su poznate oscilatorne funkcije vremena; paralaksa je određena kao malo oscilovanje u položaju zvezde, uključeno u njeno regularno sopstveno kretanje. Tri fotoploče načinjene u različito vreme u osnovi su dovoljne za izvođenje nepoznatih veličina na desnoj strani jednačina (14.7). U stvari, mnogo više od tri položaja su potrebna za realistično određivanje paralakse, koja je izvedena, metodom najmanjih kvadrata, zajedno sa srednjim položajem i komponentama sopstvenog kretanja.

Metod opisan u §13.6 i dva poslednja paragrafa, zahteva korišćenje *a priori* informacija o usvojenim koordinatama uporišnih zvezda. Ako se ove informacije uzmu direktno, ili su čak izvedene, iz meridijanskih posmatranja, izvedena sopstvena kretanja mogu da se opišu kao *apsolutna sopstvena kretanja*. Isti pojmovi biće primenjeni na sopstvena kretanja potpuno dobijena iz meridijanskih posmatranja.

Namera je da se pokaže da su sopstvena kretanja konzistentna sa globalnim koordinatnim sistemom, zasnovanim na nekom usvojenom kataloškom ekvinokciju, i nije neophodno potrebno da je taj koordinatni sistem inercijalni.

Međutim, pretpostavimo da nemamo dovoljno zvezda na ploči za koje su apsolutni položaji već poznati. Još uvek je moguće načiniti korisne dedukcije o paralaksi i sopstvenim kretanjima iz relativnih merenja. Pogodnije je raditi sa standardnim nego sa ekvatorskim koordinatama, tako da paralaktičke faktore definišemo preko standardnih koordinata kao

$$\begin{aligned} F_\xi &= 15 F_\alpha \cos\delta \sin 1'' \\ F_\eta &= F_\delta \sin 1''. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Konverzioni faktori u (14.8) javljaju se jer su standardne koordinate izražene preko poluprečnika nebeske sfere. Slično tome, komponente sopstvenog kretanja paralelne standardnim koordinatnim osama mogu da se definišu kao

$$\begin{aligned} \mu_\xi &= 15 \mu_\alpha \cos\delta \sin 1'' \\ \mu_\eta &= \mu_\delta \sin 1''. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Formule (14.7) mogu u standardnim koordinatama da se napišu kao

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \mu_\xi t + \pi F_\xi \\ \eta &= \eta_0 + \mu_\eta t + \pi F_\eta. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Pretpostavimo da je ista oblast neba fotografisana više puta i da svaka fotoploča ima istu tangencijalnu tačku. Pretpostavimo, dalje, da je za svaku ploču korišćeno istih N uporišnih zvezda. Nije bitno u kom su položaju ove zvezde, ali mora se voditi računa o tome da se izaberu tako da je njihova promena položaja usled paralakse ili sopstvenog kretanja zanemarljiva. Znači, biće to daleke zvezde i za njihov izbor može da se koristi fotometrijski ili spektroskopski pregled.

※ **(a) Merenje paralakse.** Ovo je razmatrano u §13.7 kao ilustracija metoda veznika, pa ćemo se ovde poslužiti tom analizom, mada bi mogle da se koriste mnogo finije metode. Kako za uporišne zvezde nemamo precizne ekvatorske koordinate, njihove standardne koordinate ne znamo. I pored svega, veznici mogu da se izračunaju korišćenjem merenih koordinata (x_i, y_i) umesto njih u jednačinama (13.50). Pravi se slična ocena (X_0, Y_0) za standardne koordinate tražene zvezde.

Potreban je veliki broj ploča da pokrije interval od cele godine. Za određivanje paralakse datog objekta obično se razmatraju merenja ξ, jer je promena položaja veća u rektascenziji nego u deklinaciji. Za svaku merenu ploču sa (14.10) postavlja se posmatračka jednačina oblika

$$\xi_0 + \mu_\xi t + \pi F_\xi = M, \tag{14.11}$$

gde je M merena veličina. U stvari, pomoću (13.48), M i merena koordinata x traženog objekta su u odnosu

$$M = x + X_0 - \sum D_i x_i. \tag{14.12}$$

Na jednačine (14.11) može da se primeni metod najmanjih kvadrata da se dobiju π i dve druge nepoznate ξ_0 i μ_ξ. Vrednost ξ_0 nije bitna, ali μ_ξ je sopstveno kretanje u ξ, relativno u odnosu na uporišnu zvezdu. Izvođenje poslednjeg parametra

nije prvenstveni cilj istraživanja, jer on može da se odredi mnogo tačnije metodom koja je kasnije razmotrena. Neizbežna su mala sopstvena kretanja uporišnih zvezda. Efekt se smanjuje do stepena da su ta sopstvena kretanja slučajno orijentisana. Nedozvoljeno je znatno paralaktičko pomeranje uporišnih zvezda, jer ona unose sistematske greške zato što je paralaktički faktor prividno isti na celoj ploči.

(b) Relativna sopstvena kretanja. Ona mogu da se odrede sa dve ploče snimljene na velikom vremenskom razmaku, pri čemu nije neophodno znati tačne položaje uporišnih zvezda. Kratko ćemo izložiti metod koji koristi pločne konstante a ne veznike. ❊

Pretpostavimo da su dve ploče snimljene u istom trenutku u godini sa razmakom od t godina. Paralaktičko pomeranje biće isto na obe ploče i može da se zanemari. U svakom slučaju, ono će biti malo u odnosu na akumuliranu promenu položaja usled sopstvenog kretanja. Označimo sa prim ($'$) simbole druge ploče, a bez prima su simboli prve ploče; u svemu ostalom oznake su iste kao ranije.

Za svaku uporišnu zvezdu veza merenih i standardnih koordinata data je sa

$$\begin{aligned} \xi_i - x_i &= ax_i + by_i + c \\ \xi_i - x_i' &= a'x_i' + b'y_i' + c'. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Nema pretpostavke da su pločne konstante iste za svaku ploču. Kako su to male veličine, dovoljno je tačno zameniti na desnoj strani druge jednačine (x_i', y_i') sa (x_i, y_i), pa kombinovanjem obe jednačine imamo da je

$$(a' - a)x_i + (b' - b)y_i + (c' - c) = x_i - x_i', \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{14.14}$$

Ovih N jednačina rešava se metodom najmanjih kvadrata, dajući razlike pločnih konstanti za dve ploče.

Na osnovu prethodnog, sve promene standardnih koordinata uporišnih zvezda bile su zanemarene, što znači da je pretpostavljeno da uporišne zvezde nemaju sopstveno kretanje. Pokazatelji sopstvenih kretanja uporišnih zvezda su rezidui u jednačinama (14.14). Svaka zvezda sa velikim reziduima ima, takođe, veliko sopstveno kretanje i biće isključena.

Pretpostavimo sada da smo izvršili merenja za zvezdu za koju se traži sopstveno kretanje. Primenjujući gornje argumente i dozvoljavajući promenu u standardnim koordinatama zvezde, imamo

$$\mu_\xi t = \xi_i' - \xi_i = x_i' - x_i + (a' - a)x_i + (b' - b)y_i + (c' - c). \tag{14.15}$$

Tako je komponenta μ_ξ sopstvenog kretanja određena. Sličan argument će dati μ_η, te (μ_α, μ_δ) slede iz jednačine (14.9).

Na ovaj način, komponente sopstvenog kretanja svake, pa i uporišne zvezde, mogu da se odrede. Dobijena sopstvena kretanja biće *relativna sopstvena kretanja*, relativna u odnosu na sopstvena kretanja uporišnih zvezda. Ako je ovaj sistema sopstvenih kretanja značajan, bitno je da nema sistematskih grešaka koje zavise od položaja zvezda na ploči. Ovo je najlakše usvojiti ako se koristi veliki broj uporišnih zvezda, tako da efekti individualnih sopstvenih kretanja uporišnih zvezda postaju haotični. Skup uporišnih zvezda i dalje ima malo srednje sopstveno kretanje koje treba dodati na relativno sopstveno kretanje da bi se dobilo apsolutno. Ova popravka može da se oceni po metodi razvijenoj u §14.4, slučaj (a). ❊

§ 14.3. Daljine bliskih zvezda. Skala astronomskih daljina postavljena je po metodi naizmeničnih (skokovitih!) argumenata. Daljina nekog objekta klase A određena je na neki način, što omogućava da se njena prividna veličina m pretvori u apsolutnu veličinu, koristeći (14.3). Kada je jednom ova apsolutna veličina dobijena, daljina bilo kog objekta klase A može da se izvede invertovanjem te jednačine. Zatim se razmatra koji je od slabih objekata ove klase najbliži nekom mnogo sjajnijem objektu klase B. Razlika prividnih veličina dva objekta jednaka je razlici njihovih apsolutnih veličina, jer su oni na istoj daljini, pa su apsolutne veličine objekata klase B poznate. Objekti ove klase daju novi standard koji može da se koristi na većim daljinama zbog njihovog većeg sjaja. Oni mogu da se koriste za kalibraciju apsolutne veličine i daljina objekata koji su još mnogo sjajniji. Argument može da se proširi na neograničeno rastuća rastojanja. Tako je konstruisana skala astronomskih daljina, koja počinje zvezdama u blizini Sunca i konačno dostižući vangalaktički univerzum. Dok su unutrašnji detalji ovog niza argumenata izvan domašaja ove knjige, razmatramo određivanje daljina bliskih zvezda koja su stvarno položajna po karakteru.

Neposredna merenja daljina trigonometrijskom paralaksom svedena su na korisnu zonu od oko 20 pcs od Sunca. Čak i u ovoj oblasti greška u položaju od 10% nastaje iz grešaka od samo 5 lučnih milisekundi u položaju zvezde. Izvan 20 pcs paralaktička merenja korišćena su samo za dobijanje pojedinačne daljine ili kao potvrda rastojanja izvedenih na drugi način; one ne mogu da se koriste kao osnova za kalibraciju apsolutne veličine.

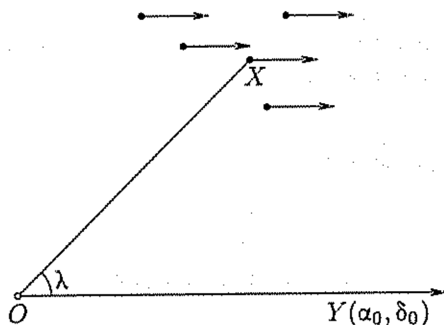
Sve zvezde koje se nalaze unutar 20 pcs od Sunca su klase V, glavni niz. Malo njih su beli patuljci, ali te zvezde su toliko sjajne da su one od male koristi kao indikatori daljine. Međutim, zvezde glavnog niza mogu da zadovolje ovu funkciju čim se njihove apsolutne veličine izvedu iz paralaktičkih merenja. Jasna relacija je postavljena između spektralnog tipa i apsolutne veličine na H–R dijagramu zvezda iz neposrednog Sunčevog susedstva. Kako slabe zvezde preovlađuju, samo je niži deo glavnog niza popunjen i to može da se primeni na glavni niz otvorenih zvezdanih jata i daljina jata može da se odredi. U jatu se nalaze zvezde sjajnije od onih u okolini Sunca. One uključuju i zvezde ranih spektralnih klasa, ali i ostale klase. Kako je daljina jata poznata, apsolutne veličine ovih sjajnih zvezda mogu da se izvedu i da daju novi indikator daljine.

Razvejana (razvejano ili otvoreno) ili galaktička jata su grupe od oko 500 zvezda koje imaju zajedničko sopstveno kretanje. To su homogene grupe zvezda koje često imaju zajedničko poreklo, u ne tako davnoj astronomskoj prošlosti. Dijagram spektar–sjaj pokazuje veoma uzak glavni niz, tako da je apsolutna veličina u uskoj vezi sa spektralnom klasom. Nasuprot tome, zvezde iz okoline Sunca mnogo su heterogenije grupe različitog sastava i starosti; glavni niz je vidljivo širi. Zvezde iste spektralne klase razlikuju se u sjaju i za faktor 2. Poželjno je popraviti ocenu daljine razvejanog jata. U nekoliko slučajeva to može da se učini korišćenjem sopstvenih kretanja članova jata.

Zvezda se smatra članom razvejanog jata ako ima zajedničko sopstveno kretanje, što omogućava da se izdvoje članovi jata od zvezda koje se nalaze u istom pravcu. U nekoliko slučajeva jata se nalaze dovoljno blizu Suncu, tako da pokrivaju veći deo neba. Tada se mogu prepoznati male razlike sopstvenih kretanja zvezda u

jatu usled efekta perspektive, pri čemu ona ili konvergiraju ili divergiraju, zavisno od toga da li se jato udaljava ili približava Suncu.

Pretpostavljeno je da zvezde u jatu imaju strogo paralelna prostorna kretanja, kao što je prikazano na sl. 14.2. Razmotrimo zvezdu X u jatu. Neka je OY pravac od posmatrača paralelan brzinama zvezda u jatu. Taj pravac definiše tačku na posmatračevoj nebeskoj sferi sa ekvatorskim koordinatama (α_0, δ_0) koja se odnosi na, recimo, standardni srednji ekvator i ekvinokcij. Postoji jedinstvena ravan koja sadrži posmatrača O, zvezdu X i vektor brzine zvezde. U stvari, to je ravan OXY. Ova ravan seče nebesku sferu (sl. 14.3) po velikom krugu kroz tačku (α_0, δ_0). Naravno, to je veliki krug definisan sopstvenim kretanjima zvezda. Prema tome, izgleda da svi veliki krugovi definisani sopstvenim kretanjima zvezda konvergiraju ka tački (α_0, δ_0), koja je poznata kao *tačka konvergencije* pokretnog jata. Određivanje ove tačke je teško i zahteva statističko izučavanje najvećeg mogućeg broja zvezda u jatu.



Zajedničko prostorno kretanje zvezda u galaktičkom jatu.

СЛИКА 14.2

Pretpostavimo da je jato fotografisano na nekoliko fotoploča sa širokim vidnim poljem. Za svaku zvezdu, recimo X, određene su standardne koordinate (ξ, η) i komponente sopstvenog kretanja (μ_ξ, μ_η). Neka su sada (ξ_0, η_0) standardne koordinate za tačku Y. Veliki krug XY preseca tangencijalnu ravan po pravoj liniji. Prema tome, sopstvena kretanja zvezda u jatu definišu šiljak pravih linija na tangentnoj ravni. Verovatnoća da verteks tog šiljka ostane u oblasti pokrivenoj fotopločama i njihovim standardnim koordinatama (ξ_0, η_0), u opštem slučaju, biće mala.

Za svaku zvezdu X jata postoji linija u šiljku data jednačinom

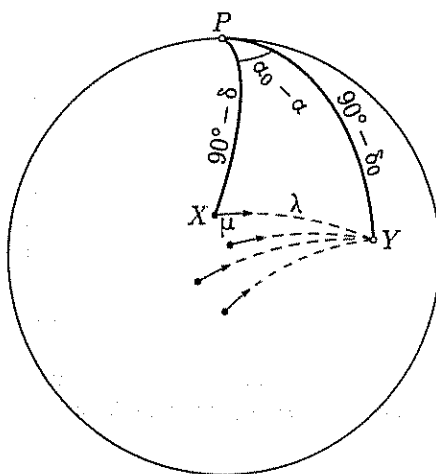
$$\frac{\xi - \xi_0}{\mu_\xi} = \frac{\eta - \eta_0}{\mu_\eta}. \qquad (14.16)$$

Ona može da se prepiše kao uslovna jednačina za standardne koordinate tačke konvergencije

$$\mu_\eta \xi_0 - \mu_\xi \eta_0 = \mu_\eta \xi - \mu_\xi \eta. \qquad (14.17)$$

Jednačina ovog oblika izvedena je za svaku zvezdu jata i nepoznate (ξ_0, η_0) mogu da se izvedu po metodi najmanjih kvadrata. Ekvatorske koordinate (α_0, δ_0) tačke konvergencije mogu da se izvedu primenom jednačina (13.13).

Označimo ekvatorske koordinate objekta X sa (α, δ) i ugaonu daljinu zvezde od



Tačka konvergencije galaktičkog jata.

СЛИКА 14.3

tačke konvergencije sa λ. U sfernom trouglu PXY na sl. 14.3 mogu da se uoče sledeći elementi: $XY = \lambda$, $PX = 90^\circ - \delta$, $PY = 90^\circ - \delta_0$, $X\hat{P}Y = \alpha_0 - \alpha$. Tada kosinusni obrazac daje ugao λ sa

$$\cos\lambda = \sin\delta_0 \sin\delta + \cos\delta_0 \cos\delta \cos(\alpha_0 - \alpha). \quad (14.18)$$

Prostorno kretanje po nebu zvezde X može da se razdvoji na radijalnu i transverzalnu brzinu. Recimo, radijalna brzina V_r se meri direktno iz spektra zvezde, a transverzalna brzina se odnosi na njenu paralaksu i sopstveno kretanje i data je u km/s jednačinom (11.8), naime

$$V_T = 4{,}74\frac{\mu}{\pi}. \quad (14.19)$$

Upoređujući sa sl. 14.2, odmah se vidi da je

$$V_r = V\cos\lambda$$
$$V_T = V\sin\lambda, \quad (14.20)$$

gde je V ukupna brzina zvezde. Iz ovih rezultata paralaksa zvezde X data je sa

$$\pi = \frac{4{,}74\mu}{V_r \operatorname{tg}\lambda}. \quad (14.21)$$

Čim se postavi tačka konvergencije jata, na ovaj način može da se odredi paralaksa svake zvezde u jatu, a time i srednja paralaksa jata. Realno određivanje tačke konvergencije zahteva da jato zahvata merljivu zonu neba. Stoga će verovatno postojati odgovarajuća radijalna disperzija zvezda u jatu, tako da pojedinačne paralakse članova jata nemaju samo statistički značaj. Vrlo malo je jata za koje može da se primeni metod tačke konvergencije, ali to omogućava značajnu vezu u uspostavljanju astronomske skale daljina.

❊ § 14.4. Kretanje Sunca.

Pojam *kretanje Sunca* označava Sunčevo kretanje u odnosu na lokalni standardni centroid (centar mirovanja), a ne u odnosu na centar Galaksije, koji se čini mnogo prirodnijim. Optička astronomija ima posmatračke probleme u izučavanju Galaksije kao celine, usled međuzvezdane apsorpcije. Dalje, lokalni centroid nije samo zgodan posmatrački standard, on je, u stvari, jedino moguć. Međutim, može da se definiše na dva (posebna) načina. Kinematički lokalni centroid definisan je preko srednjeg kretanja zvezda u okolini Sunca. Kretanje Sunca u odnosu na ovaj centroid daje sistematske efekte u sopstvenom kretanju i radijalnoj brzini i oni su razmatrani u ovom paragrafu. Alternativna definicija lokalnog centroida je dinamička. Lokalni centroid odgovara tački u položaju Sunca koja se kreće po kružnoj putanji oko centra Galaksije. Dinamička razmatranja pokazuju da kinematički centroid zaostaje za dinamičkim.

Neka kretanje Sunca ima intenzitet U. Ta veličina je usmerena ka apeksu Sunčevog kretanja, ka tački na nebeskoj sferi sa ekvatorskim koordinatama (A, D). Pogodno je koristiti pravougle koordinate za kretanje Sunca. Napišimo

$$X = U\cos A\cos D$$
$$Y = U\sin A\cos D \quad (14.22)$$
$$Z = U\sin D.$$

Kao i U i ove komponente su izražene u km/s.

(a) Sopstvena kretanja. Niz fotoploča pokriva N oblasti neba sa centrima u tačkama sa ekvatorskim koordinatama (α_i, δ_i), $i = 1, \ldots, N$. Mere se sopstvena kretanja homogene grupe zvezda u svakom regionu. Ovo ograničenje je neophodno, jer se zahteva da sve zvezde koje se razmatraju budu približno na istoj daljini od Sunca. Zbog toga, treba birati zvezde posebnog spektralnog tipa (ili boje) u uskom intervalu prividne veličine. Pretpostavimo da imamo n_i takvih zvezda u i-tom regionu. Uz ograničenje koje je učinjeno, može se pretpostaviti da sve zvezde, uključene u istraživanje, imaju približno istu sekularnu paralaksu h, jer iz (11.57) imamo da je

$$h = \frac{U\pi}{4{,}74}. \tag{14.23}$$

Sopstveno kretanje svake zvezde može se razložiti na dve komponente. Imaćemo komponente $(\mu'_\alpha, \mu'_\delta)$, koje postoje zahvaljujući sekularnom kretanju u odnosu na LSM (lokalni standard mirovanja) i komponente sekularnog paralaktičkog kretanja (P_α, P_δ) koje su razmotrene u §11.7. Neka su (μ_α, μ_δ) posmatrane komponente za neku zvezdu. Tada, korišćenjem jednačina (11.61) sa (14.22), nalazi se da je

$$\begin{aligned} 15(\mu_\alpha - \mu'_\alpha)\cos\delta &= \frac{h}{U}(X\sin\alpha - Y\cos\alpha) \\ \mu_\delta - \mu'_\delta &= \frac{h}{U}(X\cos\alpha\sin\delta + Y\sin\alpha\sin\delta - Z\cos\delta). \end{aligned} \tag{14.24}$$

Ove jednačine važiće za svaku zvezdu koju proučavamo. Primenimo ove jednačine na n_i zvezda koje se nalaze u i-tom regionu. Kako je to ograničen region, biće dovoljno tačno koristiti (α_i, δ_i) za koordinate svih n_i zvezda. Pretpostavljajući da su prostorna kretanja zvezda u odnosu na LSM slučajno raspodeljena, mogu se zanemariti srednje vrednosti $(\mu'_\alpha, \mu'_\delta)$. Zbog toga izvodimo sledeće dve jednačine

$$15\bar{\mu}_{\alpha i}\cos\delta_i = \frac{h}{U}X\sin\alpha_i - \frac{hY}{U}\cos\alpha_i \tag{14.25}$$

$$\bar{\mu}_{\delta i} = \frac{hX}{U}\cos\alpha_i\sin\delta_i + \frac{hY}{U}\sin\alpha_i\sin\delta_i - \frac{hZ}{U}\cos\delta_i, \tag{14.26}$$

gde $\bar{\mu}_{\alpha i}$, $\bar{\mu}_{\delta i}$ označavaju srednje vrednosti posmatranih sopstvenih kretanja.

Kada svih N regiona razmatramo na isti način, dobićemo $2N$ uslovnih jednačina koje uključuju tri nepoznate veličine, hX/U, hY/U, hZ/U, koje mogu biti izvedene metodom najmanjih kvadrata. Preporučuje se da se uslovnim jednačinama daju težine u skladu sa brojem zvezda u svakom ragionu. Normalne jednačine se formiraju na uobičajen način, ali dva oblika uslovnih jednačina ipak ih čine složenim. Dajući jednake težine merenjima sopstvenih kretanja u rektascenziji i deklinaciji, one mogu biti izražene kao

$$\begin{aligned} a\frac{hX}{U} + H\frac{hY}{U} + G\frac{hZ}{U} &= \sum_{i=1}^{N} n_i(\bar{\mu}_{\delta i}\cos\alpha_i\sin\delta_i + 15\bar{\mu}_{\alpha i}\sin\alpha_i\cos\delta_i) \\ H\frac{hX}{U} + b\frac{hY}{U} + F\frac{hZ}{U} &= \sum_{i=1}^{N} n_i(\bar{\mu}_{\delta i}\sin\alpha_i\sin\delta_i - 15\bar{\mu}_{\alpha i}\cos\alpha_i\cos\delta_i) \\ G\frac{hX}{U} + F\frac{hY}{U} + c\frac{hZ}{U} &= -\sum_{i=1}^{N} \bar{\mu}_{\delta i}\cos\delta_i. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Koeficijenti koji se javljaju na levim stranama jednačina (14.27), posle nekih trigonometrijskih pojednostavljenja, dobijaju oblik

$$a = \sum_{i=1}^{N} n_i(1 - \cos^2\alpha_i \cos^2\delta_i), \qquad F = -\sum_{i=1}^{N} n_i \sin\alpha_i \sin\delta_i \cos\delta_i$$

$$b = \sum_{i=1}^{N} n_i(1 - \sin^2\alpha_i \cos^2\delta_i), \qquad G = -\sum_{i=1}^{N} n_i \cos\alpha_i \sin\delta_i \cos\delta_i \qquad (14.28)$$

$$c = \sum_{i=1}^{N} n_i \cos^2\delta_i = 2\sum_{i=1}^{N} n_i - (a+b), \qquad H = -\sum_{i=1}^{N} n_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i \cos^2\delta_i .$$

Rešenje normalnih jednačina (14.27) daje vrednosti hX/U, hY/U i hZ/U. Korišćenjem (14.22) možemo izvesti koordinate Sunčevog apeksa i sekularnu paralaksu zvezda kao

$$\operatorname{tg} A = \frac{\dfrac{hY}{U}}{\dfrac{hX}{U}}, \qquad \operatorname{tg} D = \frac{\dfrac{hZ}{U}}{h}, \qquad (14.29)$$

gde je

$$h = \left[\left(\frac{hX}{U}\right)^2 + \left(\frac{hY}{U}\right)^2 + \left(\frac{hZ}{U}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (14.30)$$

Ovo daje toliko informacija koliko bi sopstvena kretanja *per se* mogla da obezbede. Određen je Sunčev apeks, ali ne i veličina Sunčevog kretanja—samo njegov pravac. Sekularna paralaksa zvezda je, takođe, parametar određen posmatranjima, ali on sam po sebi ne može da obezbedi više informacija.

※ **(b) Radijalne brzine.** Određivanje Sunčevog kretanja iz radijalnih brzina direktnije je, jer analiza nije komplikovana prisustvom sekularne paralakse. Radijalna brzina zvezde (α, δ) sastoji se od radijalne brzine V_r' koja je posledica kretanja zvezde u odnosu na LSM, i sistematskog dela V_P koji je posledica kretanja Sunca. Poslednja komponenta data je jednačinom (11.62), koja se korišćenjem jednačina (14.22) može napisati kao

$$V_P = -X\cos\alpha\cos\delta - Y\sin\alpha\cos\delta - Z\sin\delta. \qquad (14.31)$$

Posmatrana radijalna brzina zvezde u oznaci V_r može se napisati kao

$$V_r = V_r' - X\cos\alpha\cos\delta - Y\sin\alpha\cos\delta - Z\sin\delta. \qquad (14.32)$$

Radijalne brzine se mogu razmatrati na isti način kao sopstvena kretanja. Pretpostavljeno je da su prilozi V_r' potpuno slučajni i da ne prouzrokuju sistematske efekte u bilo kom delu neba. Veličina V_r' smatrana je slučajnom promenljivom, čija srednja vrednost, koja ima težinu koordinata, može biti zanemarena. Stoga jednačine (14.32) mogu biti rešene metodom najmanjih kvadrata. Normalne jednačine su date sa

$$
\begin{aligned}
&X\sum\cos^2\alpha\cos^2\delta+Y\sum\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\delta+Z\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta\\
&\quad=-\sum V_r\cos\alpha\cos\delta\\
&X\sum\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\delta+Y\sum\sin^2\alpha\cos^2\delta+Z\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta\\
&\quad=-\sum V_r\sin\alpha\cos\delta\\
&X\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta+Y\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta+Z\sum\sin^2\delta\\
&\quad=-\sum V_r\sin\delta,
\end{aligned}
\tag{14.33}
$$

gde indeksi sumiranja idu po svim zvezdama, čije su radijalne brzine bile merene.

Rešenje normalnih jednačina, u ovom slučaju, daće vrednosti (X, Y, Z). Stoga je određivanje kretanja Sunca kompletnije, jer daje i Sunčev apeks i intenzitet U. U stvari, pomoću (14.22) imamo da je

$$
\begin{aligned}
U&=(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}\\
\operatorname{tg}A&=\frac{Y}{X}\\
\sin D&=\frac{Z}{U}.
\end{aligned}
\tag{14.34}
$$

Kada se koriste sopstvena kretanja za ispitivanje Sunčevog kretanja, sam metod nameće kriterijum izbora zvezda koje se koriste. Iako ovo nije propisano metodom radijalnih brzina, ipak je poželjno. Nađeno je da postoje male sistematske razlike u kretanju Sunca, određenom različitim klasama zvezda. Neki razlozi za ovo biće razmotreni u §14.6. Dva metoda, ovde razmatrana, mogu biti i kombinovana. Radijalne brzine daće intenzitet brzine Sunca, a sopstvena kretanja biće upotrebljena za poboljšanje određivanja pravca brzine.

§ 14.5. Statistička paralaksa.

Statistička analiza sopstvenih kretanja vodi ka određivanju sekularne paralakse h klase zvezda koju ispitujemo. Ako je intenzitet U brzine Sunca izveden iz merenja radijalnih brzina, onda h može biti prebačeno u godišnju paralaksu da bi dalo srednje rastojanje do zvezde.

Iz (14.23) imamo

$$
\pi=\frac{4{,}74h}{U}. \tag{14.35}
$$

Ispitaćemo mnogo detaljnije statističko određivanje paralakse i sopstvenih kretanja, pretpostavljajući da je kretanje Sunca već poznato.

Na sl. 14.4 tačka A predstavlja apeks Sunčevog kretanja na nebeskoj sferi, sa ekvatorskim koordinatama (A, D). Neka $X(\alpha, \delta)$ predstavlja zvezdu na ugaonom rastojanju λ od apeksa. Tada u sfernom trouglu PXA imamo da je $PX = 90° - \delta$, $PA = 90° - D$, $AX = \lambda$ i ugao $A\hat{P}X = \alpha - A$. Dalje, označimo ugao PXA sa ψ. Primenjujući kosinusni obrazac na sferni trougao dobićemo λ kao

$$
\cos\lambda=\sin D\sin\delta+\cos D\cos\delta\cos(\alpha-A). \tag{14.36}
$$

Ugao ψ se dobija iz četvoroelementnog obrasca:

$$\sin\delta\cos(\alpha - A) = \cos\delta\,\mathrm{tg}\,D - \sin(\alpha - A)\,\mathrm{ctg}\,\psi.$$

Imamo da je

$$\mathrm{ctg}\,\psi = \cos\delta\,\mathrm{tg}\,D\csc(\alpha - A) - \sin\delta\,\mathrm{ctg}(\alpha - A). \tag{14.37}$$

Sada je uobičajeno razdvojiti sopstveno kretanje, ne u smerovima rasta rektascenzije i deklinacije, već duž luka AX i na njega upravan pravac. Označimo komponente sopstvenog kretanja zvezde po ovim pravcima sa (υ, τ), kao što je prikazano na slici. Izražene u lučnim sekundama po godini, ove komponente su

$$\begin{aligned}\upsilon &= 15\mu_\alpha\cos\delta\sin\psi - \mu_\delta\cos\psi\\ \tau &= 15\mu_\alpha\cos\delta\cos\psi + \mu_\delta\sin\psi.\end{aligned} \tag{14.38}$$

Dve nove komponente sopstvenog kretanja mogu se izvesti iz (μ_α, μ_δ) kada je ψ već određeno iz jednačine (14.37).

τ i υ komponenta sopstvenog kretanja. Tačka A je apeks Sunčevog prividnog kretanja

Слика 14.4

Statističke paralakse homogene grupe zvezda, tj. zvezda istog spektralnog tipa i klase luminoznosti, u ograničenom intervalu prividne veličine, mogu biti izvedene ispitivanjem υ- ili τ-komponente sopstvenog kretanja. U svakom slučaju, pretpostavlja se da su brzine zvezda u odnosu na LSM potpuno slučajne. Ako su ove brzine veće od brzine Sunca, najbolji rezultati se postižu razmatranjem τ-komponenti. S druge strane, ako brzina Sunca dominira, statistička paralaksa grupe zvezda se lakše određuje iz υ-komponenti.

Neka vektori $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$ označavaju brzine Sunca i zvezde u odnosu na LSM i neka $\mathfrak{v}$ predstavlja brzinu zvezde u odnosu na Sunce, tj.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V} - \mathfrak{U}. \tag{14.39}$$

Uobičajeno je da predstavljamo brzine u odnosu na koordinatne ose u smeru υ, odnosno τ: osa u radijalnom smeru duž vizure ka zvezdi upotpunjava desni trijedar osa. Tada su dve transverzalne komponente brzine zvezde u odnosu na Sunce date sa

$$\begin{aligned}v_\upsilon &= \frac{4{,}74\upsilon}{\pi},\\ v_\tau &= \frac{4{,}74\tau}{\pi}.\end{aligned} \tag{14.40}$$

Kako je $\mathfrak{U}$ u pravcu tačke A, lako se vidi da su njegove komponente u (υ, τ, r) koordinatnom sistemu

$$\mathfrak{U} = (-U\sin\lambda,\ 0,\ U\cos\lambda). \tag{14.41}$$

Sada, jednačina (14.39) može biti napisana kao

$$\mathfrak{v} = (V_\upsilon + U\sin\lambda,\ V_\tau,\ V_r - U\cos\lambda). \tag{14.42}$$

Pretpostavljeno je da su sve komponente vektora $\mathfrak{V}$ slučajne promenljive. Dva metoda, zasnovana na ovoj pretpostavci, koja određuju statističku paralaksu π grupe zvezda, biće sada skicirana.

(i) *υ-komponenta*. Korišćenjem jednačine (14.42), prva od jednačina (14.40) može biti napisana kao

$$\upsilon - \frac{\pi U \sin\lambda}{4{,}74} = \frac{\pi V_\upsilon}{4{,}74}. \tag{14.43}$$

Ova jednačina je tačna za bilo koju zvezdu. Za grupu zvezda koju pasmatramo, kriterijum izbora treba da osigura da je π približno konstanta. Desna strana jednačina (14.43) smatra se slučajnom veličinom. Tada princip najmanjih kvadrata zahteva da funkcija F bude minimalna, gde je

$$F(\pi) = \sum \left(\upsilon_i - \frac{\pi U}{4{,}74}\sin\lambda_i\right)^2. \tag{14.44}$$

Ovo će dati srednju paralaksu grupe zvezda kao

$$\pi = \frac{4{,}74}{U}\frac{\sum_i \upsilon_i \sin\lambda_i}{\sum_i \sin^2\lambda_i}. \tag{14.45}$$

(ii) *τ-komponenta*. Korišćenjem jednačine (14.42), druga od jednačina (14.40) daće

$$\tau = \frac{\pi V_\tau}{4{,}74} \tag{14.46}$$

za svaku zvezdu. Desna strana ove jednačine menjaće se slučajno za zvezde u izabranoj grupi, te očekujemo da će srednja vrednost τ biti nula. Stoga uzimamo apsolutnu vrednost (14.46) i izvodimo srednju vrednost. Tada, ako je N ukupan broj zvezda u grupi, formalno se izvodi jednačina

$$\langle|V_\tau|\rangle\pi = \frac{4{,}74}{N}\sum_i |\tau_i|, \tag{14.47}$$

gde $\langle|V_\tau|\rangle$ označava srednju vrednost od $|V_\tau|$. Ocenimo sada ovu veličinu.

Ako je pretpostavljeno da su brzine zvezda u odnosu na LSM slučajno orijentisane, možemo približno pisati da je

$$\langle|V_\tau|\rangle = \langle|V_r|\rangle. \tag{14.48}$$

Iz jednačine (14.42) vidi se da je

$$V_r = v_r + U\cos\lambda. \tag{14.49}$$

Sada je v_r posmatrana radijalna brzina. Sledstveno tome, komponente V_r brzina zvezda, u odnosu na LSM, su pojedinačno poznate. Približna aproksimacija jednačine (14.48) daće

$$\langle|V_\tau|\rangle = \frac{1}{N}\sum_i \left|v_r + U\cos\lambda\right|. \tag{14.50}$$

Kada se ovaj rezultat zameni u (14.47), izvodimo statističku paralaksu za grupu zvezda kao

$$\pi = 4{,}74\frac{\sum_i |\tau_i|}{\sum_i |v_r + U\cos\lambda_i|}. \tag{14.51}$$

§ **14.6. Galaktičke koordinate.** Pretpostavka da su brzine zvezda u odnosu na LSM potpuno slučajne, predstavlja pojednostavljenje. Da bi se opisali sistematski efekti u sopstvenom kretanju i radijalnim brzinama, potreban je komplikovaniji model. Detaljno razmatranje zvezdane dinamike je van domašaja ove knjige. Takvo razmatranje se može naći u knjizi Mihalasa i Binija (Mihalas & Binney, 1981).

Kretanje Sunca je uglavnom razmatrano u ekvatorskom sistemu koordinata, u kojem su i vršena posmatranja. Fizički mnogo značajniji sistem koordinata jeste galaktički koordinatni sistem, ilustrovan na sl. 14.5. Na ovoj slici G predstavlja centar Galaksije, a ugao PGC je označen sa θ.

Neka je X proizvoljna tačka na nebeskoj sferi sa ekvatorskim koordinatama (α, δ) i galaktičkim koordinatama (l, b). Neka je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor u pravcu tačke X i $\mathfrak{s}_G$ isti vektor izražen u galaktičkom sistemu, tj.

$$\mathfrak{s} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta)$$
$$\mathfrak{s}_G = (\cos l\cos b, \sin l\cos b, \sin b). \qquad (14.52)$$

Pravougle galaktičke koordinate (x_G, y_G, z_G) i ekvatorske koordinate (x, y, z).

Слика 14.5

Primetimo da se u galaktičkom sistemu koordinate određuju, redom, u pravcu ka galaktičkom centru, u pravcu $l = 90°$, $b = 0°$ i u pravcu upravnom na galaktičku ravan. Pravci ekvatorskih osa (x, y, z) i galaktičkih osa (x_G, y_G, z_G) označeni su na slici.

Veza između sfernih ekvatorskih i galaktičkih koordinata ustanovljena je u §2.7, jednačinama (2.33) i (2.32). Kombinovanjem se ove jednačine mogu napisati kao

$$\left.\begin{aligned}
\cos l\cos b = &- (\sin\theta\sin\alpha_G + \cos\theta\cos\alpha_G\sin\delta_G)\cos\alpha\cos\delta \\
&+ (\sin\theta\cos\alpha_G - \cos\theta\sin\alpha_G\sin\delta_G)\sin\alpha\cos\delta \\
&+ \cos\theta\cos\delta_G\sin\delta \\
\sin l\cos b = &+ (\cos\theta\sin\alpha_G - \sin\theta\cos\alpha_G\sin\delta_G)\cos\alpha\cos\delta \\
&- (\cos\theta\cos\alpha_G + \sin\theta\sin\alpha_G\sin\delta_G)\sin\alpha\cos\delta \\
&+ \sin\theta\cos\delta_G\sin\delta \\
\sin b = &+ \cos\alpha_G\cos\delta_G\cos\alpha\cos\delta \\
&+ \sin\alpha_G\cos\delta_G\sin\alpha\cos\delta + \sin\delta_G\sin\delta.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.53)$$

Ove jednačine se u vektorskom obliku pišu kao

$$\mathfrak{s}_G = \mathfrak{R}_G\,\mathfrak{s}, \qquad (14.54)$$

gde je $\mathfrak{R}_G$ matrica rotacije, čije elemente možemo pročitati iz jednačine (14.53). Korišćenjem vrednosti (α_G, δ_G) i θ, datih u jednačini (14.5), možemo izračunati ove elemente (v. zadatak 14.6). Taj oblik matrice rotacije pretvara ekvatorske koordinate u galaktičke, oslanjajući se na epohu B1950,0. Da bi dobili oblik matrice rotacije za epohu J2000,0, neophodno je još jednom primeniti matricu rotacije. U numeričkom obliku to je

$$\mathfrak{R}_G = \begin{Vmatrix} -0{,}054\,876 & -0{,}873\,437 & -0{,}483\,835 \\ 0{,}494\,109 & -0{,}444\,830 & 0{,}746\,982 \\ -0{,}867\,666 & -0{,}198\,076 & 0{,}455\,984 \end{Vmatrix}. \qquad (14.55)$$

Matrica rotacije maže se primeniti i na brzinu Sunca $\mathfrak{U}$, što izraženo u galaktičkim koordinatama postaje

$$\mathfrak{U}_G = \mathfrak{R}_G \mathfrak{U}. \qquad (14.56)$$

Označimo komponente vektora $\mathfrak{U}_G$ sa (X_G, Y_G, Z_G). Već smo zapazili da se za kretanje Sunca dobijaju različite vrednosti proučavanjem različitih klasa zvezda. Ove promene nisu potpuno posledica grešaka posmatranja i mogu biti shvaćene proučavanjem dinamike zvezda u okolini Sunca. Vrednosti izvedene za X_G i Z_G su prilično ujednačene i označavaju prave komponente brzine Sunca, u tim pravcima, a u odnosu na LSM. Vrednosti za Y_G—u pravcu rotacije Galaksije—sistematski se menjaju sa promenom klase zvezda. Ovo znači da različite klase zvezda definišu različitu kinematiku LSM-ova. Zvezde koje se kreću po približno kružnim putanjama definišu LSM koji aproksimira dinamički LSM. Tamo gde je disperzija u brzinama zvezda veća, kinematički definisani LSM dosta se razlikuje od dinamičkog (v. zadatak 14.8).

Određivanja kretanja Sunca za različite klase zvezda data su u knjizi Mihalasa i Binija. Tamo su definisana dva srednja kretanja Sunca. *Standardno kretanje Sunca* uglavnom se izvodi iz zvezdanih kataloga, izostavljajući neke zvezde ranog tipa. Tada se dobija ❊

$$X_G = +10{,}2\,\mathrm{km/s}, \qquad Y_G = +15{,}1\,\mathrm{km/s}, \qquad Z_G = +\ 7{,}4\,\mathrm{km/s}. \qquad (14.57)$$

S druge strane, *osnovno kretanje Sunca* definiše se na manje empirijski način. ❊ Ono se izvodi na mnogo selektivniji način, iz onih zvezda za koje se smatra da imaju približno kružne putanje oko centra Galaksije. Komponente osnovnog kretanja Sunca su

$$X_G = 9\,\mathrm{km/s}, \qquad Y_G = 12\,\mathrm{km/s}, \qquad Z_G = 7\,\mathrm{km/s}. \qquad (14.58)$$

Vrednosti date u jednačinama (14.57) i (14.58) preuzete su iz knjige Alena (Allen, 1976).

§ 14.7. Ortove konstante.

Prethodna razmatranja su se osvrtala na kretanje zvezda ili u odnosu na Sunce ili u odnosu na LSM. Očigledno bi bilo mnogo značajnije da su ova kretanja razmatrana u odnosu na centar Galaksije. Ovo je težak posmatrački problem, zato što se zvezde koje se mogu efektivno posmatrati nalaze u regionu od jednog kiloparseka (kpc) oko Sunca; sam gala-

ktički centar ne možemo posmatrati. Međutim, može se otkriti sistematski uticaj rotacije Galaksije na radijalne brzine i sopstvena kretanja zvezda.

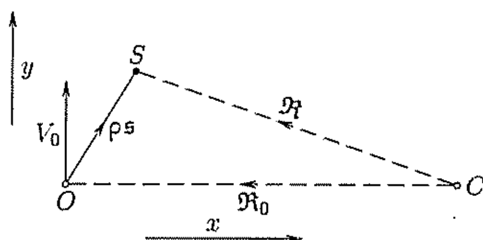
Ako slučajne brzine zvezda potpuno zanemarimo, brzina zvezde zbog rotacije Galaksije imaće oblik

$$\mathfrak{V} = \omega \times \mathfrak{R}, \tag{14.59}$$

gde je $\mathfrak{R}$ vektor položaja zvezde u odnosu na centar Galaksije. Galaktički sistem koordinata je najpogodniji za korišćenje. Kako Galaksija rotira u smeru kazaljke na satu (retrogradno), gledano sa severnog galaktičkog pola, pogodno je pisati

$$\omega = [0, 0, -\Omega(R)]. \tag{14.60}$$

Primetimo (v. sl. 14.6), da vektor položaja Sunca u odnosu na centar Galaksije C leži u *negativnom* smeru x-ose i da brzina LSM leži u pozitivnom smeru y-ose, tj. u smeru $l = 90°$. Ovaj jednostavni pogled pretpostavlja da nema širenja (sabijanja) Galaksije, što je pod velikim znakom pitanja.



O je LSM—lokalni standard mirovanja, a C je centar Galaksije.

Слика 14.6

Upotrebimo indeks O da označimo vrednosti parametara koji odgovaraju LSM, tačka O na sl. 14.6. Tada, lokalna kružna brzina rotacije biće

$$V_0 = R_0\Omega_0. \tag{14.61}$$

Nijedan od tri parametra koji se pojavljuju u jednačini (14.61) ne određuju se direktnim posmatranjem okolnih zvezda. Položajni i spektroskopski podaci otkrivaju diferencijalne uticaje rotacije Galaksije. Oni su pogodno izraženi preko Ortovih (OORT) konstanti A i B koje su definisane kao

$$A = -\frac{1}{2}R_0\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\right)_0 \qquad B = A - \Omega_0. \tag{14.62}$$

I A i B imaju dimenzije (vreme)$^{-1}$; u praksi, one se izražavaju u jedinicama km s^{-1} kpc^{-1}.

Razmotrimo sada zvezdu S koja se, kao što je prikazano na sl. 14.6, nalazi na rastojanju ρ u pravcu $\mathfrak{s}$ od LSM. Njen vektor položaja $\mathfrak{R}$ u odnosu na centar Galaksije je

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \rho\mathfrak{s}. \tag{14.63}$$

Ako pretpostavimo da se ova zvezda kreće samo zbog uticaja opšte rotacije Galaksije, njena se brzina može izvesti iz jednačine (14.59). Tada je brzina zvezde u odnosu na LSM $\mathfrak{v} = \mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0$, gde je

$$\mathfrak{v} = (\omega - \omega_0) \times \mathfrak{R}_0 + \rho\omega \times \mathfrak{s}. \tag{14.64}$$

Posmatrana radijalna brzina v_r neposredno se dobija iz ove jednačine kao

$$v_r = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{s} = [(\omega - \omega_0), \mathfrak{R}_0, \mathfrak{s}]. \tag{14.65}$$

Komponente vektora $\mathfrak{s}$ date su u jednačini (14.52); korišćenjem jednačine (14.60) trostruki vektorski proizvod daje

$$v_r = R_0(\Omega - \Omega_0)\cos b \sin l \qquad (14.66)$$

Jednačina (14.66) je tačna i može biti korišćena za ispitivanja radijalnih brzina opšteg tipa, kao na primer, za posmatranja linija vodonika na 21 cm. Međutim, ako pretpostavimo da je $\rho \ll R_0$, možemo uzeti ovu aproksimaciju

$$(\Omega - \Omega_0) = \left(\frac{d\Omega}{dR}\right)_0 (R - R_0). \qquad (14.67)$$

Sada, iz jednačine (14.63), vektor $\mathfrak{R}$ ima komponente

$$\mathfrak{R} = (-R_0 + \rho\cos b\cos l, \rho\cos b\sin l, \rho\sin b),$$

što vodi do

$$R^2 = R_0^2 - 2\rho R_0\cos b\cos l + \rho^2.$$

S dovoljnom tačnošću, ovo se može napisati kao

$$R - R_0 = -\rho\cos b\cos l,$$

što kombinovano sa jednačinama (14.67) i (14.62) daje

$$R_0(\Omega - \Omega_0) = 2A\rho\cos b\cos l. \qquad (14.68)$$

Stoga, radijalna brzina se izvodi iz jednačine (14.66) kao

$$v_r = A\rho\cos^2 b\sin 2l. \qquad (14.69)$$

Ako je A u konvencionalnim jedinicama, tada je rastojanje ρ izraženo u kpc, da bi dobili radijalnu brzinu u km/s.



14.8. Uticaj rotacije Galaksije na sopstvena kretanja.

Biće pogodno izraziti brzinu zvezde u odnosu na LSM, u obliku

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2, \qquad (14.70)$$

gde, iz (14.64), imamo da je

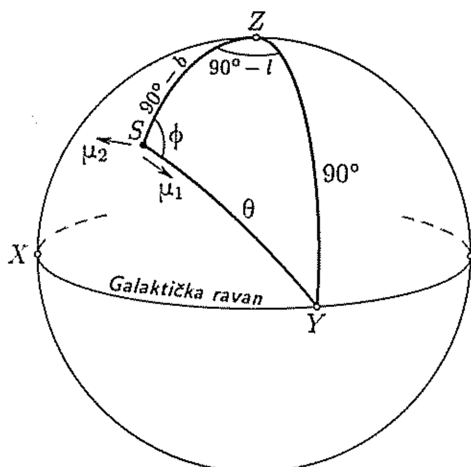
$$\mathfrak{v}_1 = (\omega - \omega_0)\times\mathfrak{R}_0$$
$$\mathfrak{v}_2 = \rho\omega\times\mathfrak{s}. \qquad (14.71)$$

Tada odvojeno ispitujemo sopstvena kretanja prouzrokovana od $\mathfrak{v}_1$ i $\mathfrak{v}_2$.

Slika 14.7 predstavlja nebesku sferu sa središtem u topocentru. Pravac ka zvezdi je prikazan tačkom S, a X, Y i Z daju pravce osa galaktičkog koordinatnog sistema. Tada je $SZ = 90° - b$ i ugao $S\hat{Z}Y = 90° - l$. Označimo luk SY sa θ i ugao ZSY sa ϕ.

Brzina $\mathfrak{v}_1$ je u pozitivnom smeru y-ose, pa je usmerena na tačku Y. Radijalna komponenta ove brzine ispitana je u prethodnom paragrafu; transverzalna komponenta biće $\mathfrak{v}_1 \sin\theta$ i ona će prouzrokovati sopstveno kretanje μ_1 usmereno duž luka SY. Prilagođavajući jednačine (11.8), komponente ovog sopstvenog kretanja u galaktičkoj longitudi i galaktičkoj latitudi su

$$4{,}74\mu_{1l}\cos b = \pi v_1 \sin\theta\sin\phi$$
$$4{,}74\mu_{1b} = \pi v_1\sin\theta\cos\phi. \qquad (14.72)$$



Слика 14.7

U ovim dvema jednačinama $\mathfrak{v}_1$ je izraženo u km/s, dok komponente sopstvenog kretanja i paralaksa π moraju biti u istoj ugaonoj meri. Kao što ćemo dalje videti, mililučne sekunde su odgovarajuće jedinice, zato što je tada $\pi\rho = 1$.

Sada, primenjujući sinusni i sinusno-kosinusni obrazac na sferni trougao SZY, dobijamo sledeće dve formule

$$\begin{aligned} \sin\theta\sin\phi &= \cos l \\ \sin\theta\cos\phi &= -\sin b\sin l. \end{aligned} \tag{14.73}$$

Intenzitet vektora $\mathfrak{v}_1$ je, u stvari, implicitno dat u jednačini (14.68). Korišćenjem ove vrednosti i jednačine (14.73), nalazimo da je

$$\begin{aligned} 4{,}74\mu_{1l} &= 2A\cos^2 l \\ 4{,}74\mu_{1b} &= -A\sin 2l\cos b\sin b. \end{aligned} \tag{14.74}$$

Jednačina (14.71) ukazuje da je brzina $\mathfrak{v}_2$ potpuno transverzalna i paralelna je galaktičkoj ravni. Ona može doprineti samo komponenti sopstvenog kretanja μ_l, u stvari, u pravcu opadanja galaktičke longitude, kao što je prikazano sa μ_2 na sl. 14.7. Imamo

$$\begin{aligned} 4{,}74\mu_{2l}\cos b &= -\pi v_2 \\ \mu_{2b} &= 0. \end{aligned} \tag{14.75}$$

Sada je iz jednačine (14.71) intenzitet $v_2 = \rho\Omega\cos b$.

Do prve aproksimacije možemo zameniti Ω sa Ω_0; tada korišćenjem definicija Ortovih konstanti u jednačini (14.62), vidimo da je

$$v_2 = (A - B)\rho\cos b. \tag{14.76}$$

Zamenjujući ovo u jednačinu (14.75) i kombinujući to sa jednačinom (14.74), dolazimo do konačnog rezultata

$$\begin{aligned} 4{,}74\mu_l &= A\cos 2l + B \\ 4{,}74\mu_b &= -A\sin 2l\cos b\sin b. \end{aligned} \tag{14.77}$$

Kao što je gore navedeno, Ortove konstante se obično izražavaju u km/s po kiloparseku. Jednačine (14.77) tada daju komponente sopstvenog kretanja u mililučnim sekundama po godini. Primetimo da je uticaj sopstvenog kretanja indiciran ovim jednačinama nezavisan od rastojanja zvezde. Jednačine (14.77), pored toga što otkrivaju sistematski uticaj koji zavisi od galaktičke longitude i latitude zvezde, takođe otkrivaju i rotaciju cele nebeske sfere sa ugaonom brzinom od $B/4{,}74$ mililučne sekunde po godini. Vrednost B je vrlo teško odrediti, ali ako se uzme da je ona oko $10\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$, ova rotacija iznosi $0'',21$ po veku. Posledica ove rotacije za zvezdani referentni sistem biće dalje razmatrana u §16.7, mada će biti moguće upoređivanje sa referentnim sistemom ustanovljenim u radio astrometriji.

Zadaci

14.1. Izračunajte rektascenziju i deklinaciju centra Galaksije za epohu B1950,0.

14.2. Snimljena je serija od N astrografskih ploča u trenucima t_i, $i = 1, \ldots, N$. Merenja ovih ploča daju niz standardnih koordinata (ξ_i, η_i) koje se odnose na istu tangentnu tačku. Detaljno objasnite kako se paralaksa zvezde i komponente sopstvenog kretanja mogu dobiti metodom najmanjih kvadrata, postavljajući normalne jednačine eksplicitno. (Primetite da postoji $2N$ uslovnih jednačina, iako je paralaksa jedina nepoznata koja se u njima pojavljuje.)

14.3. Pažljivo objasnite kako Sunčev apeks može biti ustanovljen statističkim ispitivanjem sopstvenih kretanja zvezda. Posebno opravdajte oblik normalnih jednačina navedenih u jednačinama (14.27).

14.4. Dokažite da je za članove zvezdanog jata sa zajedničkim prostornim kretanjem veličina

$$V_r \sin\delta + \frac{4{,}74\mu_\delta \cos\delta}{\pi} = \text{const.},$$

gde simboli imaju uobičajena značenja.

14.5. Opišite kako kretanje Sunca može biti određeno ispitivanjem radijalnih brzina zvezda, praveći, pri tom, jasne pretpostavke. Pokazati da su komponente kretanja Sunca rešenja normalnih jednačina (14.33).

14.6. Izračunajte elemente matrice rotacije $\mathfrak{R}_G$ koja transformiše vektor sa njegovih ekvatorskih na galaktičke koordinate za epohu B1950,0.

14.7. Primenite matricu rotacije za precesiju na matricu $\mathfrak{R}_G$ izvedenu u prethodnom zadatku i potvrdite njene elemente date u jednačini (14.55). Da li nalazite male razlike na poslednjoj decimali? Kako se ovo može objasniti?

14.8. Pokazati da Y-komponente brzine zvezda (tj. komponente u pravcu $l = 90°$, $b = 0°$) u odnosu na LSM ne mogu biti simetrično raspodeljene oko nule. Upoređujući sa kretanjem planeta, posebno sa drugim Keplerovim zakonom, dajte kvalitativne razloge zašto kinematički definisani LSM treba da se razlikuje od dinamičkog.

Глава Петнаеста

Elementi radio astronomije

§ **15.1. Uvod.** Sve do sada, naša razmatranja o položajnoj astronomiji su bila usmerena ka optičkim izvorima, sa povremenim pominjanjem radio astronomije. Većina geometrijskih razmatranja je ista, nezavisno od posmatračkih tehnika i talasnih dužina zračenja koje se posmatra. S druge strane, postoje i izvesne razlike u odnosu na posebne, optičke tehnike posmatranja zvezdanih položaja razmotrene u glavama 5, 13 i 14. Cilj ove glave je da razjasni tu situaciju.

Najpreciznija merenja položaja bila su do danas ograničena na dve tradicionalne grane astronomije bazirane na posmatranja sa Zemlje, koja rade u optičkom i radio delu spektra. Merenja sa satelita mogu da obezbede bogatu astrofizičku informaciju, ali merenja položaja sa satelita su još uvek nedovoljno precizna i u optičkom i u radio spektru. Sličan slučaj je bio i sa radio astronomijom u doba njenog formiranja. Zahvaljujući razvoju interferometara sa interkontinentalnom i transkontinentalnom osnovom, preciznost merenja položaja radio interferometrom je dostigla i prestigla preciznost optičke astrometrije, pa se može reći da su ova dva tipa astrometrije komplementarni. Sa dugom istorijom razvoja, optička položajna astrometrija je u daleko većoj meri sistematski zasnovana, a neke vrste merenja, kao na primer merenja sopstvenih kretanja, zahtevaju veoma duge vremenske intervale da bi bila kompletirana. Optička i radio astronomija obuhvataju različite izvore zračenja, pa su, naravno, i tehnike i instrumenti potpuno različiti.

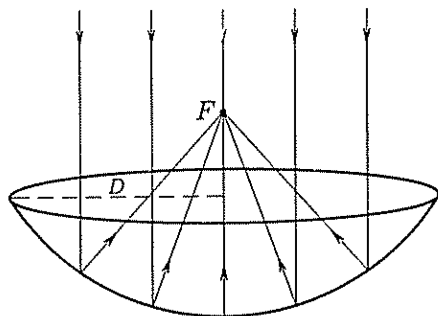
Najuočljivija razlika je u vezi sa talasnom dužinom. Zemljina atmosfera je neprozirna za najveći deo elektromagnetskog spektra. Jedine dve propusne oblasti su optički „prozor“, koji pokriva opseg vidljivih frekvencija i malo više, i prostrani radio „prozor“ u kome je atmosfera skoro potpuno propusna u intervalu od nekoliko redova veličine u talasnoj dužini. Teško je dati precizne vrednosti za granice radio prozora jer te granice variraju u zavisnosti od uslova u atmosferi. Kao grub vodič, uzmimo za širinu radio prozora talasne dužine između 10 m i 1 cm (ili izraženo u frekvenciji 33 MHz do 33 GHz). Granica za kratke talasne dužine nametnuta je apsorpcijom u atmosferi, dok je granica za velike talasne dužine nametnuta osobinama jonosfere koja odbija nisko-frekventne kosmičke radio talase. Jonosferska refrakcija, koja je u vezi sa ovim, razmatra se posebno u §16.

Postojanje radio prozora omogućava da kosmička radio zračenja mogu biti detektovana sa Zemlje, u okviru frekventnog opsega čije su granice u odnosu 1000 : 1.

Zvezde su retko izvori radio zračenja, a najčešće su to neupadljivi optički objekti. U većini slučajeva, zračenje ima kontinualni spektar netermalnog porekla. Optički deo spektra je bogat spektralnim linijama koje imaju poreklo u atomskim prelazima, a postoji i nekoliko radio spektralnih linija. Nisko-frekventne emisije pri molekularnim prelazima teže da uđu u infracrveni i milimetarski opseg, i ovaj mali opseg molekularne apsorpcije se zove optički radio prozor.

Radio posmatračke tehnike se razlikuju od optičkih u dve važne osobine. Pravolinijska optička merenja mogu biti načinjena u širokom opsegu frekvencija. Za spektralnu analizu se koriste posebne spektroskopske tehnike. Radio posmatranje je, s druge strane, obično načinjeno u srazmerno uskom opsegu frekvencija, naime u onom opsegu na koji je prijemnik podešen. Osim toga, radio antena je polarizujući uređaj, tako da je radio merenje povezano sa posebnim oblikom polarizacije. Iako je polarimetrija relativno nedavno našla primenu u optičkoj astronomiji, ona je potpuno prirodna i u osnovi je radio posmatranja. Priličan procenat polarizacije nekih radio izvora se može detektovati, i ta merenja su relativno jednostavna.

Radio analogon optičkog teleskopa tipa reflektora je parabolična antena, radio tanjir. Površina te antene je obrtni paraboloid, kao što je prikazano na sl. 15.1. Zraci sa udaljenog tačkastog radio izvora padaju na površinu ogledala kao paralelan snop. Posle odbijanja oni se sakupljaju u žiži F. Mala sabirna antena smeštena je u toj tački. Koncentrisano električno polje u F proizvodi struju u toj sabirnoj anteni, koja je povezana sa prijemnikom gde se ta struja detektuje i pojačava. Opseg frekvencija koje se primaju je određen, jednim delom samom konstrukcijom antene, ali mnogo više opremom za prijem. Velika prednost antene-tanjira je ta da ona može biti korišćena u širokom opsegu frekvencija, a da osobine refleksije pri tome ne zavise od frekvencije. Da bi se promenila radna radio frekvencija potrebno je samo promeniti sabirnu antenu i podesiti opremu za prijem na drugoj frekvenciji.



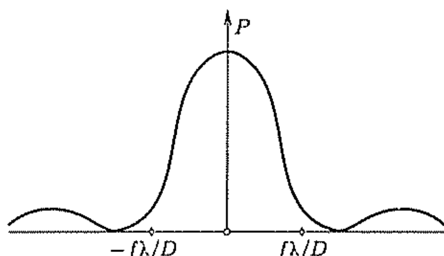
Geometrijska optika parabolične radio antene.
Слика 15.1

Parabolični reflektori su najčešće potpuno pokretni. Ekvatorska montaža bi za njih bila idealna ali je potpuno nepraktična za velike instrumente. Mehaničke potrebe zahtevaju horizontsku montažu. Zbog ovakvih uslova, postavljanje radio teleskopa zahteva i transformaciju ekvatorskih u horizontske koordinate. Taj problem je već bio diskutovan u §2.8. Međutim, postoje i mnoge okolnosti u kojima su manipulacione mogućnosti radio reflektora velika prednost. Na primer, ako se proučava neka radio spektralna linija, može biti neophodno da se obuhvate frekvencije te linije u uskim i trenutnim opsezima. Ovim se umanjuje odnos signal-šum i produžava integralno vreme potrebno da se održi osetljivost opreme. Zbog toga je neophodno praćenje izvora, da bi se eliminisalo dnevno kretanje.

Da bi ilustrovali opšte, vrlo važne, principe koji su primenljivi na sve vrste radio teleskopa, koristićemo se primerom paraboličnog ogledala. Slika 15.1 ilustruje geometrijsku optiku radio posude, ali ona ne ukazuje na difrakciju koja je prou-

zrokovana efektima krajeva—zbog konačne veličine otvora. Označimo poluprečnik poprečnog preseka posude sa D. Snaga radio talasa koji nailazi nije potpuno usmerena ka geometrijskoj tački F, nego je rasuta u maloj oblasti fokalne ravni. Rezultujuća raspodela snage P po m^2 u funkciji dužine x od ose paraboloida prikazana je na sl. 15.2. Pomeranjem antene za prijem u fokalnoj ravni, detektuje se ovakva promena u snazi u radio prijemniku. U stvari, antena za sakupljanje je obično nepokretna, a slična promena snage se otkriva kao da antenski snop prelazi preko tačkastog radio izvora.

Ovakva razmatranja nisu slučajna u radio astronomiji. Slična difrakciona slika (Airijev difrakcioni disk) se dobija i na fotografskoj ploči, kada se fotografišu zvezde. Obično je ta difrakciona slika zamrljana atmosferskim treperenjem koje je, s druge strane, prouzrokovano iregularnostima u troposferi. Ono što je posebno u radio astronomiji jeste difrakciona slika, prikazana na sl. 15.2, koja određuje praktična ograničenja u ugaonom razdvajanju radio teleskopa. Tipična širina difrakcione slike u žižinoj ravni je reda $f\lambda/D$, gde je f žižina daljina paraboloida. Izraženo u ugaonoj meri, ovo znači da sabirna antena sakuplja značajan deo zraka iz konusa pravaca u okviru ugla λ/D radijana oko ose paraboloida. Ovo možemo izraziti uvođenjem ugaone razdvojne moći R antenskog sistema definisane sa



Difrakciona slika za parabolični reflektor.
Слика 15.2

$$R \sim \frac{\lambda}{D} \text{ radijana.} \tag{15.1}$$

Relaciju (15.1) napisali smo u nepreciznoj formi. Da bi ovu relaciju pretvorili u jednačinu moramo da nađemo preciznu definiciju za R, uvođenjem numeričkog faktora koji bi izjednačio jedinice na levoj i desnoj strani. U formi u kojoj je napisana, relacija (15.1) je prilično opšteg tipa. Ona daje ugaonu razdvojnu moć bilo kog radio instrumenta, ukoliko je D shvaćeno kao reprezentativna dimenzija (radijus) antenskog sistema.

§ 15.2. Radio interferometrija.

Iz jednačine (15.1) sledi prividno mala rezolucija radio teleskopa. Najveći potpuno kontrolisani radio teleskop na svetu ima prečnik od 100 m. Ugaono razdvajanje takvog instrumenta je reda veličine stepena po metru talasne dužine, a za centimetar talasne dužine je reda lučnog minuta. Tabela 15.1 daje približne brojne vrednosti veličine instrumenata potrebne da se obezbedi ugaono razdvajanje koje bi bilo korisno u astrometriji. Jasno je da bi ovo bilo lakše postignuto u opsegu kratkih talasa; i zaista, radio astrometrijske tehnike operišu u praksi sa talasnim dužinama od nekoliko centimetara. Poslednja vrsta u tabeli 15.1 daje posmatračke tehnike koje bi morale biti korišćene da bi se postigle rezolucije ovih redova veličine. Te tehnike su objašnjene u daljem tekstu mnogo potpunije. Verovatno treba napomenuti, da je moguće postići veću

Tabela 15.1. Dimenzija antene potrebna da se postigne ugao razdvajanja R pri talasnoj dužini λ

λ/R	$1'$	$1''$	$0'',001$
5 m	17,0 km	1 000 km	-
50 cm	1,7 km	100 km	-
5 cm	170,0 m	10 km	10 000 km
	(velika površina)	(SBI)	(VLBI)

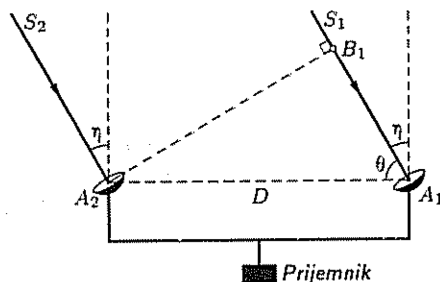
tačnost određivanja položaja povećanjem vrednosti uz pomoć tehnika navedenih u tabeli 15.1, uz oslobađanje od sistematskih grešaka—što nije jednostavno.

Velika površina najčešće nije pokretna, tako da mogućnost praćenja izvora nije moguća. Ovo ne mora uvek da bude slabost u radu sa položajima. Ukoliko se izvor kreće preko antenskog snopa zbog dnevnog kretanja, određivanjem trenutka maksimalnog signala obezbeđuje se informacija o položaju izvora. Tačnost od jedne lučne minute u položaju je dovoljna da obezbedi uspešnost traženja tog izvora ukoliko je poznat njegov optički položaj. Za nezavisno određivanje položaja mora se koristiti interferometrijski metod.

Kratkobazična radio interferometrija (*Short Baseline Interferometry*—SBI), ili povezana interferometrija, koristi dve antene razdvojene rastojanjem D, pri čemu se parametar D odnosi na dužinu osnovice, a ne na veličinu pojedinačnih antena. Antene su priključene na zajednički prijemnik i ovaj zahtev ograničava dužinu osnove na nekoliko kilometara. Između signala primljenih sa obe antene (od istog izvora) postoji fazna razlika zbog razlike u pređenom putu radio talasa, kao što se vidi sa sl. 15.3. Ova fazna razlika varira sa dnevnim kretanjem izvora i stvara modulirani izlaz sa prijemnika.

Ako bi zahtev da obe antene moraju biti povezane sa zajedničkim prijemnikom, mogao biti izbegnut na neki način, onda bi bile moguće mnogo duže osnove. U povezanoj interferometriji dva radio signala sa antena su pomešani sa signalom sa lokalnog oscilatora koji radi na srednjoj frekvenciji (IF). Oni se detektuju, kombinuju i pojačavaju u glavnom delu prijemnika. U VLBI dugobazična radio interferometrija (*Very Long Baseline Interferometry*—VLBI), koriste se nezavisni lokalni oscilatori u dva položaja. Rezultujući IF signali se snimaju na video traci. Korelacijom traka kasnije se dobija difrakciona slika. Ovaj metod nema ograničenja u pogledu dužine osnovice, potrebno je samo da je radio izvor moguće simultano posmatrati na obe posmatračke pozicije.

Sada ćemo razmatrati osnovne principe dvoelementnog interferometra. Pretpostavimo da imamo dve antene, A_1 i A_2, koje se nalaze na rastojanju D, kao što je prikazano na sl. 15.3. Ravan te slike ne mora obavezno da bude vertikalna ravan, nego ravan definisana osnovicom A_1A_2 i izvorom (ili pravcem ka izvoru, zato što je izvor na velikom odstojanju). Linije S_1A_1 i S_2A_2 predstavljaju paralelne zrake od izvora ka antenama. Neka A_2B_1 bude normala u tački A_2 na zrak S_1A_1. Tada je $A_1B_1 = D\cos\theta$, gde je θ ugao koji pravac ka izvoru zaklapa sa osnovicom. Sada je linija A_2B_1 talasni front, i radio zračenje je u fazi duž ove linije. Radio zračenje,



Dvoelementni radio interferometar.

СЛИКА 15.3

u opštem slučaju, nije u fazi u antenama, zahvaljujući putnoj razlici do antene A_1. Fazna razlika signala prisutnih u prijemniku, a pristiglih sa antena je:

$$\phi = \frac{2\pi D}{\lambda} \cos\theta + \phi_c. \tag{15.2}$$

U ovoj jednačini, ϕ_c je fazna razlika sa instrumentalnim, a ne geometrijskim poreklom. Ta fazna razlika je uvedena da bi u ukupnu faznu razliku mogle biti uračunate i razlike koje proističu iz dužine kablova (veza) između antena i prijemnika.

Pretpostavimo da su sve antene potpuno pokretne (moguće je kontrolisati njihovo kretanje) i da prate izvor. Tada su srednji naponi dobijeni od svake posebno V_1 i V_2, i recimo da su u prijemniku ti naponi kontrolisani. Da bi pojednostavili razmatranje, pretpostavimo da je zračenje sa izvora monohromatsko. Izvor će imati svakako neprekidan spektar ali, oprema za prijem odbacuje sve osim uskog opsega frekvencija. Efekt ove konačne širine frekvencija za sada je zanemaren. Sa ovim pretpostavkama, elektromotorne sile $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ koje stižu sa antena u prijemnik mogu biti predstavljene kao

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= V_1 \cos\omega t \\ \mathcal{E}_2 &= V_2 \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Ove dve elektromotorne sile mogu se sada kombinovati na dva različita načina. ❊ U *interferometru potpune snage*, one se prosto sabiraju i izlazna snaga je proporcionalna sa $\langle(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2\rangle$. Simbol $\langle\,\rangle$ ovde označava srednju (prosečnu) vrednost u dužim vremenskim intervalima. Kod interferometra ovog tipa merimo

$$P \propto V_1^2\langle\cos^2\omega t\rangle + V_2^2\langle\cos^2(\omega t + \phi)\rangle + V_1V_2\langle 2\cos\omega t\cos(\omega t + \phi)\rangle. \tag{15.4}$$

Sada imamo da je

$$\langle\cos^2\omega t\rangle = \langle\cos^2(\omega t + \phi)\rangle = \frac{1}{2}$$

i

$$\langle 2\cos\omega t\cos(\omega t + \phi)\rangle = \langle\cos(2\omega t + \phi)\rangle + \langle\cos\phi\rangle = \cos\phi.$$

Tada, zapisana (izlazna) vrednost snage može biti napisana u obliku

$$P = P_0 + P_1\cos\phi, \tag{15.5}$$

gde su P_0 i P_1 konstante.

Dnevno kretanje izvora stvara promenu u uglu θ. Odgovarajuće promene u faznoj razlici biće vrlo brze ako je $D \gg \lambda$. Ukupna izlazna snaga interferometra predstavlja varijacije sa amplitudom P_1 oko antenskog nivoa P_0. Ako su antene identične, pokazuje se da je $P_1 = P_0$.

U alternativnoj verziji interferometra naponi se množe, a ne sabiraju. Ovaj tip ❊ se zove *korelacioni interferometar*. Kako je izlazna snaga proporcionalna sa $\langle\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\rangle$, ona će imati oblik

$$P = P_0'\cos\phi \tag{15.6}$$

Prednost interferometra ovog tipa je u tome što on guši sve nekorelisane napone sa antena i, zbog toga, u velikoj meri redukuje pozadinske šumove u prijemniku. Napominjemo da oba tipa interferometara daju istu interferometrijsku sliku.

Slika se najjasnije vidi kada izvor prolazi kroz ravan upravnu na osnovicu. Stavimo da je $\theta = 90° - \eta$ i razmotrimo situaciju kada je η mali ugao. Tada jednačina (15.2) daje (razvijanjem $\sin\eta$ u Tejlorov red)

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi D}{\lambda}\eta. \qquad (15.7)$$

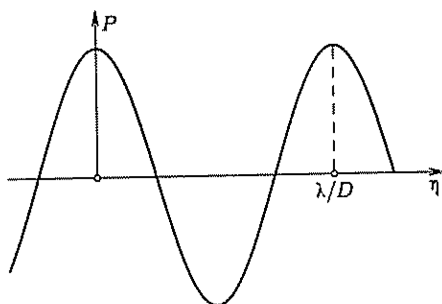
U blizini normalne ravni snaga na izlazu je

$$P = P_0' \cos\left(\frac{2\pi D}{\lambda}\eta + \phi_c\right). \qquad (15.8)$$

Ovo je predstavljeno na sl. 15.4, uz pretpostavku (radi jednostavnosti) da je $\phi_c = 0$. Snaga je maksimalna za $\eta = 0$. Obezbeđenjem korektne identifikacije glavnog maksimuma, određivanje trenutka maksimuma postavlja izvor na veliki krug nebeske sfere koji trenutno leži u ravni $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Iz jednačine (15.8) vidi se da se podmaksimum pojavljuje kada je

$$\eta = n\frac{\lambda}{D}. \qquad (15.9)$$

Razlika između susednih maksimuma je, kao što se očekivalo, λ/D radijana. Privremeni odnos kojim je data slika maksimuma, takođe, obezbeđuje informaciju o položaju i može biti iskorišćen za lociranje položaja izvora u ravni $\theta = \frac{1}{2}\pi$.



Interferometrijska slika za $\phi_c = 0$.
Слика 15.4

Ova diskusija se odnosi samo na tačkaste izvore. Ako je prividni prečnik izvora veći od λ/D poluprečnika, tada nestaje oštra interferenciona slika. Može se tražiti Furijeova (FOURIER) komponenta perioda λ/D u raspodeli snage izvora po uglu, o čemu će se ponovo govoriti kada budemo razmatrali sintezu aperture u §15.8.

§ 15.3. Radio pasažni instrument.

Dvoelementni radio interferometar koji radi duž horizontalne osnovice u pravcu istok-zapad predstavlja radio analogon meridijanskom krugu. Osnovica definiše dve dijametralno suprotne tačke A_1, A_2 na nebeskoj sferi. U idealnom slučaju te bi tačke ležale u istočnoj i zapadnoj tački horizonta. Da bi smo odredili uticaj ovih nepoklapanja pretpostavimo da je tačka A_2 pomerena iz W za iznose m i n po rektascenziji i deklinaciji, redom. Tada, sa sl. 15.5, imamo

$$PA_2 = 90° - n \quad \text{i} \quad WPA_2 = m.$$

Neka je X položaj izvora sa deklinacijom δ u trenutku kada je njegov časovni ugao t. Tada je $PX = 90° - \delta$, i lako se može videti da je

$$A_2PX = 90° - t - m.$$

Ugao A_2X je, zapravo, ugao θ uveden u prethodnom paragrafu (v. sl. 15.3). Primenom kosinusnog obrasca na sferni trougao PXA_2 dobijamo važan rezultat

$$\cos\theta = \sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(t + m). \qquad (15.10)$$

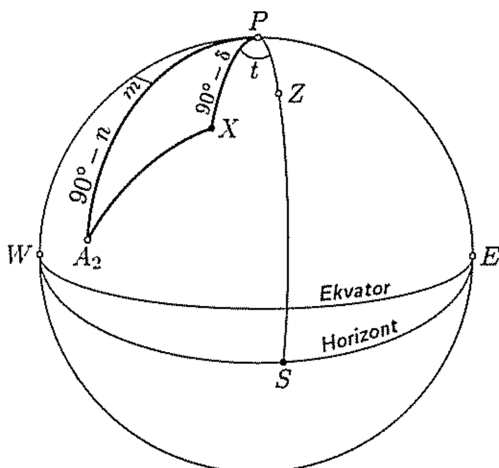
Ovaj obrazac daje mogućnost da faznu razliku između elemenata interferometra predstavimo preko položajnih uglova. Zamenjujući (15.10) u (15.2) dobijamo da je

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi D}{\lambda}\left[\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(t+m)\right]. \qquad (15.11)$$

Ova jednačina je tačna i može biti upotrebljena za interferometar proizvoljne orijentacije.

Za tip meridijanskog instrumenta koji se ovde razmatra uglovi m i n mogu se smatrati malim veličinama, pa se može primeniti aproksimacija prvog reda. Tada za okolinu meridijanskog prolaza imamo da je

$$t + m + n \operatorname{tg}\delta + \frac{\lambda}{2\pi D}(\phi_c - \phi)\sec\delta = 0. \qquad (15.12)$$



Слика 15.5

Pretpostavimo sada da je zabeleženo mesno zvezdano vreme T koje odgovara maksimumu oštre interferencijske slike. Dopuštajući grešku časovnika od ΔT, vrednost časovnog ugla u tom trenutku je

$$t = T + \Delta T - \alpha.$$

Stavljajući $\phi = 0$ u (15.12), dobijamo rektascenziju izvora

$$\alpha = T + \Delta T + m + n \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta, \qquad (15.13)$$

gde smo uveli oznaku

$$c = \frac{\lambda\phi_c}{2\pi D}. \qquad (15.14)$$

Jednačina (15.13) je, po obliku, identična sa jednačinom posmatranja na meridijanskom krugu. Odstupanje osnove interferometra je potpuno analogno odstupanju ose rotacije pasažnog instrumenta. S druge starne, vidi se da je instrumentalna fazna razlika ϕ_c ekvivalentna grešci kolimacije. Produžavajući analogiju možemo da uporedimo interferencijski maksimum sa nizom navođenja krsta-konaca. Određivanje trenutka prolaza izvora, uzimanjem srednje vrednosti, iz više merenja raspoređenih simetrično u odnosu na centralni maksimum, daje poboljšanu vrednost rektascenzije.

Deklinacija se može odrediti iz procene posmatranog maksimuma. Kako je $\mathrm{d}t/\mathrm{d}T = 1$, diferenciranje jednačine (15.12) daje

$$\cos\delta = \frac{\lambda}{2\pi D}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}T}. \qquad (15.15)$$

Ova jednačina ne daje mogućnost razlikovanja pozitivne i negativne deklinacije. Samo po sebi, ovo nije ozbiljan nedostatak, ali određivanje deklinacije postaje neprecizno u blizini ekvatora.

§ 15.4. Neodređenost faze.

Argumenti prethodnog paragrafa važe samo ukoliko centralni maksimum ($\phi = 0$) može korektno da se odredi. Ali, kao što formule (15.5) i (15.6) pokazuju, posmatrana veličina nije fazni ugao, već njegov kosinus. Zbog toga, postoji skrivena fazna neodređenost posmatrane faze od $2n\pi$, koja mora biti otklonjena pre nego se definitivno pristupi merenjima.

Pri analizi posmatrane interferometrijske slike, za dva tipa interferometra u §15.2 bilo je pretpostavljeno da je svaka antena nezavisno pratila izvor držeći ga u centru svog antenskog snopa. U takvom pristupu amplituda glavnog maksimuma ostaje nepromenjena, samo se menja rastojanje između maksimuma sa pomeranjem izvora po nebu. Pretpostavimo sada, u alternativnom pristupu, da su dve antene fiksirane i usmerene u pravcu normalnom na osnovicu. Oštra slika će biti opažena samo dok se izvor nalazi između dve antene, a amplituda interferencione slike će varirati sa dnevnim kretanjem izvora. U tom slučaju, moguće je odrediti centralni maksimum kao najveći maksimum na slici.

Ovaj postupak ima jedan ozbiljan nedostatak. Identifikacija zavisi od tačnosti usmeravanja antena. U poređenju sa orijentacijom osnovice, ova identifikacija će biti neprecizna. Međutim, zbog neophodnosti, ova tehnika se može koristiti kada antene komponente nisu u potpunosti pokretne.

U dosadašnjoj analizi tretirali smo zračenje sa izvora kao monohromatsko, zanemarujući da se posmatranja izvode u konačnom opsegu frekvencija $\Delta\nu$. Kako je $\lambda\nu = c$, intervali frekvencije i talasne dužine su povezani relacijom

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu}. \tag{15.16}$$

Iz jednačina (15.2) i (15.7) nalazimo da fazni ugao ϕ zavisi od talasne dužine. Stoga se javlja disperzija u fazi $\Delta\phi$ na prijemnom opsegu. Diferenciranjem (15.7), ovu disperziju nalazimo u obliku

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta\nu}{\nu}\frac{D}{\lambda}\eta. \tag{15.17}$$

Sada zaključujemo da su u blizini pravca normale $\eta = 0$, sve frekvencije u fazi i jasno se vidi interferencijska slika. Međutim, dalje od pravca normale, fazna disperzija narasta i umanjuje vidljivost (ili amplitudu) interferencijske slike. Interferenciona slika potpuno nestaje kada je $\Delta\phi \sim 2\pi$, što odgovara $\eta \sim \eta_{max}$, gde je

$$\eta_{max} = \frac{\nu}{\Delta\nu}\frac{\lambda}{D}. \tag{15.18}$$

Drugim rečima, može se reći da je broj vidljivih maksimuma reda $\nu/\Delta\nu$.

Zavisnost ϕ od talasne dužine može biti prihvaćena i kao prednost i kao slabost. Razmatrajući prvo pozitivne aspekte, primećujemo da konačan opseg utiče na promenu amplitude interferencijskog maksimuma i, stoga, može pomoći u određivanju centralnog maksimuma. Što je širi opseg, slabija je oštra interferencija, te se centralni maksimum pojavljuje jasnije. Ista informacija se, međutim, može obezbediti i bez prekomernog slabljenja oštrine interferencijske slike, ako se posmatranja obavljaju simultano na dve frekvencije. Tako dobijene interferometrijske slike će se slagati samo za $\phi = 0$.

Efekt konačnog opsega na uočljivost interferencije, utiče, na prvi pogled, da interferometrijska posmatranja moraju biti pouzdana do na ugao η_{max} u ravni nor-

malnoj na osnovicu, što je prilično ozbiljno ograničenje za dugu osnovicu. Na primer, ako su posmatranja načinjena na talasnoj dužini 6 cm ($\nu = 5000\,\mathrm{MHz}$) sa osnovicom od 1 km, oštro razdvanje se postiže na oko 12″. Ako je opseg 10 MHz, to znači da ne može više od 500 maksimuma biti uočeno, te je posmatranje ograničeno na 6000″ ili 1°40′ u normalnoj ravni.

Moguće je, međutim, da se putne razlike između dve antene kompenzuju veštačkim zadržavanjem signala sa jedne od njih. Jedan način postizanja toga je uključiti ukupan broj talasnih dužina u vezu između antene i prijemnika. Ovo će obnoviti vidljivost oštre interferencijske slike bez uticaja na faznu razliku ili barem na njen kosinus. Kako je položaj izvora na nebu približno poznat, u svakom trenutku, moguće je s dovoljnom tačnošću odrediti pauzu potrebnu za dobijanje oštre interferencione slike. Interferometrijska posmatranja radio izvora ovom tehnikom, mogu biti proširena na celu vidljivu hemisferu. U glavi 16 razmatraćemo kako sa ovom posmatračkom tehnikom radio izvora možemo uočiti interferencionu sliku tog izvora u toku dvanaestočasovnog perioda. Kako se uočava, cela interferenciona slika nema neodređenosti u fazi pod ovim okolnostima. Geometrijska razmatranja su slična onim koje ćemo dati niže, u jednostavnijem slučaju interferometra sever-jug. Kao što ćemo videti, tada je moguće iskoristiti nestanak oštre interferencije pri prolazu izvora, da bi se otklonila fazna neodređenost.

§ 15.5. Interferometar sever-jug.

Razmotrimo interferometar sa osnovom dužine D postavljene u ravni horizonta u pravcu sever-jug. Pretpostavićemo da se interferometar nalazi na severnoj geografskoj širini φ. Da bi pojednostavili razmatranje, ignorisaćemo greške postavljanja osnovice i pretpostaviti da je njena orijentacija tačno poznata. Ravan normalna na osnovicu je tada ravan prave vertikale WZE (sl. 15.6). Kada radio izvor prolazi kroz veliki krug fazna razlika ϕ između dve antene biće jednaka nuli. Takav prolaz će se javiti u slučaju kada je $0 < \delta < \varphi$.

Pretpostavimo da se izvor nalazi u tački X, sa časovnim uglom t. Fazna razlika koja odgovara ovoj tački može biti izvedena, bez dalje analize, iz jednačine (15.11). Tačka A_2 na nebeskoj sferi, sa sl. 15.5, koja odgovara pravcu osnovice, sada je smeštena u tačku S, južnu tačku horizonta. Ugaona rastojanja ove tačke u rektascenziji i deklinaciji od tačke W su data sa

$$\begin{aligned} m &= 90^\circ \\ n &= \varphi - 90^\circ. \end{aligned} \tag{15.19}$$

Uključujući ove vrednosti u opšti rezultat (15.11), izvodimo faznu razliku u obliku

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi D}{\lambda}(\sin\varphi\cos\delta\cos t - \cos\varphi\sin\delta). \tag{15.20}$$

Razmotrićemo sada dve alternativne upotrebe interferometra sever-jug. Na prvom mestu, može se koristiti za posmatranja prolaza izvora kroz prvi vertikal. Ovaj instrument je tada ekvivalentan pasažnom instrumentu u prvom vertikalu. S druge strane, ako se uvede pogodan linijski zaostatak, izvor može biti posmatran u okolini meridijanskog prolaza. Interferenciona slika je prilično drugačija.

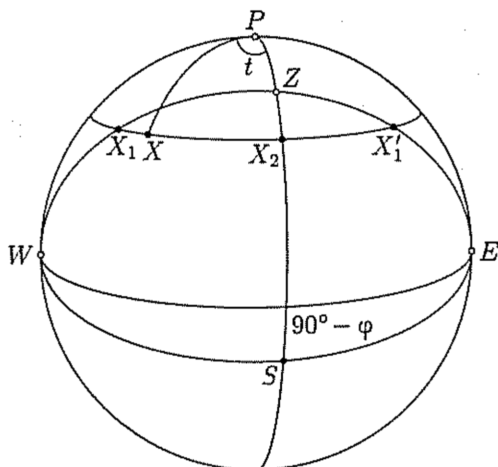
Na sl. 15.6, put dnevnog kretanja je dat malim krugom $X_1'X_2X_1$. Te tri tačke su položaji izvora u trenucima prolaza kroz prvi istočni vertikal, posmatračev meridijan, i prvi zapadni vertikal. Neka $\mp t_0$ bude časovni ugao izvora u njegova dva prolaza kroz prvi vertikal.

(i) Zahvaljujući efektima širine opsega, razmotrenih u poslednjem paragrafu, oštra interferencija može da se posmatra samo kada je izvor u tačkama X_1 i X_1'. Zbog jednostavnosti, uzećemo da je $\phi_c = 0$. Tada centralni interferencijski maksimum, $\phi = 0$, odgovara ovim tačkama, a jednačina (15.20) daje

$$\cos t_0 = \operatorname{tg}\delta \operatorname{ctg}\varphi. \qquad (15.21)$$

Pretpostavimo da su identifikovana dva centralna maksimuma i da su zapisana njihova lokalna zvezdana vremena. Vrednosti ova dva vremena određuju rektascenziju izvora, a polovina njihove razlike daje vrednost t_0. Stoga, sledi da se invertovanjem jednačine (15.21) dobija deklinacija izvora

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi \cos t_0. \qquad (15.22)$$



Слика 15.6

Ovaj postupak jasno zavisi od identifikacije centralnih interferencijskih ivica. U okolini prvog vertikala faza ϕ će imati brze varijacije. Odnos ivica može biti izveden iz (15.20), što daje

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2\pi D}{\lambda} \sin\varphi \cos\delta \sin t. \qquad (15.23)$$

Pretpostavimo sada da je pri identifikaciji ivica učinjena greška od 2π. Odgovarajuća greška u t_0 može biti izvedena iz (15.23) i zamenjena u diferencijalnu formu (15.22). Ovo daje rezultujuću grešku u izvedenoj vrednosti deklinacije od

$$d\delta = \frac{\lambda}{D} \cos\delta \operatorname{sc}\varphi. \qquad (15.24)$$

Ispitajmo sada kako ova greška menja interferencijsku sliku u okolini meridijanskog prolaza.

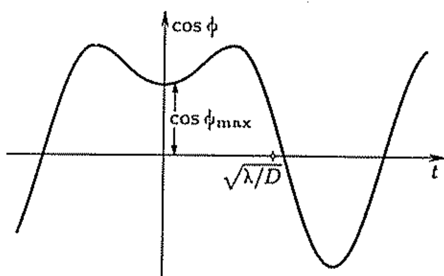
(ii) Da bi dobili ivice interferencijske slike u okolini meridijana, neophodno je nadomestiti razliku u rastojanjima između dve antene. Jednačina (15.23) indicira da odnos ivica dostiže nulu u $t = 0$. Fazna razlika ima maksimalnu vrednost u toj tački, datoj iz (15.20), sa

$$\phi_{max} = \frac{2\pi D}{\lambda} \sin(\varphi - \delta). \qquad (15.25)$$

Pretpostavimo sada da je učinjena kompenzacija za rastojanja uvođenjem integralnog broja talasnih dužina. Slika u okolini meridijana se tada može posmatrati i, iz (15.20) i (15.25), dobija oblik

$$\phi = (\phi_{max} - 2n\pi) - \frac{4\pi D}{\lambda} \sin\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{1}{2} t. \tag{15.26}$$

Iz ovoga se vidi da je izlaz sa interferometra stacionaran u meridijanu i da interferenciona slika ne nastaje pre no što t postane reda $(\lambda/D)^{1/2}$. Interferenciona slika je prikazana šematski na sl. 15.7. Izlaz sa interferometra u okolini meridijana obezbediće, zbog toga, nedvosmislenu vrednost $\cos\phi_{max}$, kao i samo ϕ_{max}, ne uzimajući u obzir integralni umnožak od 2π. Korišćenjem formule (15.25) povezujemo neodređenost u ϕ_{max} sa neodređenošću u deklinaciji, dobijajući



Interferometrijska slika pri meridijanskom prolazu za interferometar sever-jug.

Слика 15.7

$$d\phi_{max} = -\frac{2\pi D}{\lambda} \cos(\varphi - \delta)\, d\delta.$$

Smenjivanjem vrednosti za $d\delta$ iz (15.24), dobijamo grešku u ϕ_{max} koja nastaje zbog pogrešne identifikacije ivice u (i). Rezultat je

$$d\phi_{max} = -2\pi \cos\delta \,\mathrm{sc}\,\varphi \cos(\varphi - \delta). \tag{15.27}$$

Treba primetiti da je ova vrednost reda 2π radijana. Prema tome, nemogućnost identifikacije centralnih ivica u prvom vertikalu daje uočivu razliku između vrednosti $\cos\phi_{max}$ i odgovarajuće vrednosti računate iz (15.25). Zbog toga, fazna dvosmislenost može, u principu, biti eliminisana.

Ovaj argument uračunava prećutnu pretpostavku da je geografska širina instrumenta poznata. Ako ovo nije slučaj, čak i kad je moguće korektno identifikovati fazu u prvom vertikalu, još uvek će postojati razlika između računate i posmatrane vrednosti $\cos\phi_{max}$. Možemo nastaviti na sledeći način. Diferenciranjem (15.22) povezujemo greške u φ i δ, te se dobija

$$\mathrm{sc}^2 \delta \, d\delta = \mathrm{sc}^2 \varphi \cos t_0 \, d\varphi. \tag{15.28}$$

Na drugoj strani, diferenciranje (15.25) daje sledeću formulu

$$d\phi_{max} = \frac{2\pi D}{\lambda} \cos(\varphi - \delta)(d\varphi - d\delta). \tag{15.29}$$

Sada imamo dve jednačine po $d\varphi$ i $d\delta$, izražene preko odstupanja u ϕ_{max}, koje moraju biti zadovoljene simultano. Pretpostavljajući da nema neodređenih umnožaka od 2π u $d\phi_{max}$, možemo da rešimo pomenuti sistem po navedenim popravkama u deklinaciji i širini, dobijajući

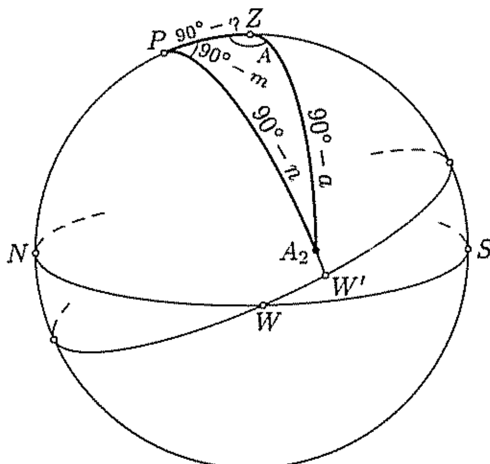
$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\lambda}{D} \frac{d\phi_{max}}{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \,\mathrm{sc}(\varphi - \delta)}{(\cos^2\varphi - \cos^2\delta \cos t_0)} \\ d\delta &= \frac{\lambda}{D} \frac{d\phi_{max}}{2\pi} \frac{\cos^2\delta \,\mathrm{sc}(\varphi - \delta) \cos t_0}{(\cos^2\varphi - \cos^2\delta \cos t_0)}. \end{aligned} \tag{15.30}$$

U principu, ovim je definisan metod za izučavanje kretanja pola.

§ 15.6. Interferometar opšte orijentacije. Zaključićemo analizu o interferometrima sa razmatranjem interferometra opšte orijentacije. Pre svega, definišimo njegove parametre na sledeći način: osnova ima dužinu D, radi na talasnoj dužini λ i instrument je postavljen na geografskoj širini φ i geografskoj dužini Λ.

Kako osnovica može biti duga nekoliko kilometara, mora se navesti na koju tačku osnovice se odnose geografske koordinate. Moguće je uvesti nekoliko konvencija: to može biti sredina rastojanja ili jedna od dve antene. Jedino je važno da se jednom izabrana konvencija dosledno prati. Neka su (Λ, φ) geografske koordinate antene A_1, koja zauzima više istočni položaj u odnosu na antenu A_2. Pretpostavimo da je druga antena A_2 postavljena u pravcu sa azimutom A (zapadno ili severno) od A_1. Tada je $0 < A < 180°$. Konačno, neka osnova A_1A_2 leži na visini a u odnosu na horizontalnu ravan A_1, što znači da je visina pozitivna ako je A_2 više od A_1.

Nebeska sfera na sl. 15.8 ima centar u anteni A_1. Zenit za tu antenu je tačka Z, a tačke N, W, S su odgovarajuće tačke za horizont antene. Pravac osnove definiše tačku A_2 na nebeskoj sferi. Ta tačka treba da bude blizu zapadne tačke na horizontu, ali to nije od suštinske važnosti. To je verovatno blizu horizonta, ali može biti tačka sa bilo kojim azimutom. Iz naših ranijih definicija, videli smo da je $PZA_2 = A$ i $ZA_2 = 90° - a$, i naravno, $PZ = 90° - \varphi$.



Слика 15.8

Ovakav pristup je tačan i usklađen sa opštim izrazima za fazu datim u (15.11). Parametri m i n, koji se pojavljuju u toj jednačini, dati su sa

$$\begin{aligned} Z\hat{P}A_2 &= 90° - m \\ PA_2 &= 90° - n. \end{aligned} \tag{15.31}$$

Ova dva parametra mogu biti izvedena iz sfernog trougla PZA_2; iz osnovnih obrazaca sferne geometrije dobijamo

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin a \sin\varphi + \cos a \cos\varphi \cos A \\ \operatorname{tg} m &= \cos\varphi \operatorname{tg} a \csc A - \sin\varphi \operatorname{ctg} A. \end{aligned} \tag{15.32}$$

Vrednosti m i n izvedene iz ovih jednačina mogu da se uključe u (15.11) da bi se dobila vrednost faznog ugla ϕ. Ipak, malo modifikujmo ovu relaciju stavljajući da je

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi D}{\lambda}\left[\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin t'\right], \tag{15.33}$$

gde je t' modifikovani časovni ugao, dat sa

$$t' = t + m.$$

Časovni ugao t' je zapravo časovni ugao posmatrača na istočnoj geografskoj dužini Λ', koja je data sa

$$\Lambda' = \Lambda + m. \tag{15.34}$$

Ova longituda se često naziva i *efektivna longituda* interferometra i određena je pravcem osnove interferometra. Razumljivo, to nije longituda nijedne od antena, a ni srednje tačke između njih. Za ovaj slučaj, ilustrovan na sl. 15.8, efektivna geografska dužina je istočno od obe antene. Ako orijentacija osnove znatno odstupa od pravca istok-zapad, efektivna geografska dužina razlikovaće se primetno od geografskih dužina obeju antena.

Sada produžimo PA_2 na nebeskoj sferi do preseka sa ekvatorom u tački W'. Kako je $WW' = m$, tačka W' je zapadna ekvatorska tačka za bilo kog posmatrača na istočnoj geografskoj dužini Λ' i, kao takva, daje koristan referentni pravac.

Osnovicu možemo predstaviti vektorom $\mathfrak{D}$, intenziteta D, u pravcu ka A_2. Posmatraćemo ovaj vektor u odnosu na pravougle ekvatorske ose vezane za Zemlju i sa z-osom usmerenom ka P. Uobičajeno je izabrati x-osu u pravcu W', a y-osu tako da sa prethodne dve ose gradi desni trijedar osa. Zbog toga, y-osa leži u ravni meridijana sa geografskom dužinom Λ'. To znači da će vektor osnove $\mathfrak{D}$ imati sledeće komponente

$$\mathfrak{D} = D(\cos n, 0, \sin n). \tag{15.35}$$

Pretpostavimo dalje da je $\mathfrak{s}$ jedinični vektor u pravcu izvora. U odnosu na iste ose, ovaj vektor će imati sledeće komponente

$$\mathfrak{s} = (\cos\delta\sin t', \cos\delta\cos t', \sin\delta). \tag{15.36}$$

Stoga, sledi da se jednačina (15.33) može napisati u sledećem vektorskom obliku

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s}. \tag{15.37}$$

Ovaj izraz, zapravo, potvrđuje osnovni izraz za fazu (15.2). Vektorski oblik je pogodan zato što se taj izraz lakše koristiti pri transformaciji koordinatnog sistema. Sve do sada, koristili smo se koordinatnim sistemima vezanim za Zemlju, tako da je $\mathfrak{D}$ shvaćen kao stalan vektor, a $\mathfrak{s}$ se menja sa dnevnim kretanjem. Međutim, potpuno je moguće koristiti se koordinatnim sistemima vezanim za zvezde nekretnice. Tada se $\mathfrak{s}$ može shvatiti kao stalan vektor, a promene sa dnevnim kretanjem Zemlje tada pokazuje vektor $\mathfrak{D}$. Ovaj pristup je uobičajen kada se radi o VLBI, ali za sada ćemo nastaviti sa razmatranjem u koordinatnim sistemima vezanim za Zemlju.

Vektor osnove $\mathfrak{D}$ pokazivaće male sistematske greške koje nastaju u mehanizmu za zauzimanje položaja antena. Rezultujuća promena u fazi biće data sa

$$\mathrm{d}\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{d}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s}. \tag{15.38}$$

Pogodno je izraziti $\mathrm{d}\mathfrak{D}$ u koordinatnom sistemu već korišćenom u (15.35), posebno ako su antene postavljene u ekvatoru. Napišimo $\mathrm{d}\mathfrak{D} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ u ovom koordinatnom sistemu. Tada, iz (15.36) i (15.38), sledi da je

$$\mathrm{d}\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{d}x\cos\delta\sin t' + \mathrm{d}y\cos\delta\cos t' + \mathrm{d}z\sin\delta). \tag{15.39}$$

Treba posebno zabeležiti da je efekt u $\mathrm{d}z$ nezavisan od časovnog ugla. Stoga, zaključujemo da postoji efekt promene instrumentalne faze ϕ_c zavisan od deklinacije.

§15.7. Kretanje Zemljinih polova.

Pravac vektora osnove u odnosu na zvezde je zavisan od kretanja Zemljinog pola, iako je pravac radio izvora nepokretan. Znajući ovo, promena u fazi je data sa (15.38). Vektor $d\mathfrak{D}$ se ne može jednostavno izvesti iz (15.35) diferenciranjem, jer je koordinatni sistem koji se koristi pod uticajem kretanja pola. Diferenciranjem faze u (15.33) dobija se

$$d\phi = \frac{2\pi D}{\lambda}\left[dn\cos n\sin\delta - dn\sin n\cos\delta\sin t' + \cos n\cos\delta\cos t'\, dt'\right]. \qquad (15.40)$$

Upoređujući ovu jednačinu sa (15.39), i uvođenjem oznake $dt' = d\Lambda'$, određujemo sledeće komponente iz $d\mathfrak{D}$ kao

$$\begin{aligned} dx &= -D\sin n\, dn \\ dy &= D\cos n\, d\Lambda' \\ dz &= D\cos n\, dn. \end{aligned} \qquad (15.41)$$

Nagib vektora $\mathfrak{D}$ prema ekvatorskoj ravni je n, a isti vektor je normalan na meridijansku ravan geografske dužine Λ'. On je, stoga, paralelan geocentričnom vektoru položaja posmatrača na geografskoj širini φ^* i geografskoj dužini Λ^*, gde je

$$\varphi^* = n, \qquad \Lambda^* = \Lambda' - 90^\circ. \qquad (15.42)$$

Kretanje pola utiče na vektor $\mathfrak{D}$ i vektor položaja posmatrača na isti način. Pretpostavimo da (x_p, y_p) predstavlja pomeraje pola u ravni meridijana 0° i 270°, redom, tada korišćenjem (5.29) dobijamo promene geografskih koordinata (Λ^*, φ^*) date sa

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= x_p\cos\Lambda^* - y_p\sin\Lambda^* \\ d\Lambda^* &= (x_p\sin\Lambda^* + y_p\cos\Lambda^*)\operatorname{tg}\varphi^*. \end{aligned}$$

Iz ove i jednačine (15.42) nalazimo da je

$$\begin{aligned} dn &= x_p\sin\Lambda' + y_p\cos\Lambda' \\ d\Lambda' &= (y_p\sin\Lambda' - x_p\cos\Lambda')\operatorname{tg} n. \end{aligned} \qquad (15.43)$$

Ove vrednosti se sada mogu zameniti u (15.41) da bi se dobile komponente vektora $d\mathfrak{D}$. Promena u fazi interferometra može se izračunati iz (15.39). Ovaj efekt je komplikovaniji za interferometar opšte orijentacije, ali se znatno pojednostavljuje za slučaj kada je osnova postavljena u pravcu istok-zapad. U tom slučaju, n je mala veličina i formula (15.43) ukazuje da $d\Lambda'$ može biti tretirano kao mala veličina drugog reda. Iz (15.41) vidimo da isto važi i za dx, tako da je samo z-komponenta $d\mathfrak{D}$ značajna. Primenjujući (15.39), sa ovim aproksimacijama, dobija se

$$d\phi = \frac{2\pi D}{\lambda}(x_p\sin\Lambda' + y_p\cos\Lambda')\sin\delta. \qquad (15.44)$$

Kako je $d\phi$ nezavisno od časovnog ugla, to je ekvivalentno promeni u instrumentalnoj fazi ϕ_c.

§15.8. Sinteza aperture.

Želimo da kompletiramo glavu sa kratkom analizom sinteze aperture. Ovde su obrađene samo osnove ove kompleksne pojave u radio astronomiji. Mnogi rezultati su navedeni sa malim opravdavanjem. Čitalac koga zanimaju detalji upućuje se na tekst Kristijana i Hegboma (W. N. CHRISTIANSEN & J. A. HÖGBOM, 1984).

Do sada smo razmatrali samo tačkaste radio izvore, što je, naravno, jedna idealizacija. Radio izvor mora imati konačnu ugaonu veličinu, ali je pretpostavljano da je ona daleko ispod rezolucije radio teleskopa ili interferometra. Intenzitet nerazdvojivog izvora dat je sa njegovom gustinom fluksa S, koja će biti funkcija frekvencije. Gustina fluksa je zapravo snaga po hercu (Hz) koja prolazi kroz jedinicu površine talasnog fronta i meri se Janskim (Jy), Jy $= 10^{-26}\,\mathrm{Wm^{-2}Hz^{-1}}$. Pretpostavimo sada da je snaga P po hercu primljena na radio anteni od izvora sa fluksom S. Tada možemo da pišemo da je

$$P = SA(t,\delta),$$

※ gde je A parametar antene koji se naziva *efektivna površina*. A je, dakle, funkcija pravca i jednaka je nuli izvan antenskog snopa. Možda treba napomenuti da je S, strogo govoreći, deo gustine fluksa koji je u formi polarizacije primljen na anteni.

Gustina fluksa je jedini merljivi parametar vezan za izvor u slučaju nerazdvojivih izvora. Kada izvor popunjava antenski snop, moguće je ispitati njegovu strukturu. Njegov intenzitet je tada dat njegovim radio *sjajem* koji varira za taj izvor. SI jedinica za sjaj je $\mathrm{Wm^{-2}Hz^{-1}steradian^{-1}}$. Snaga P koju antena primi za rasprostrt izvor konačnih dimenzija može biti napisana u obliku

$$P = \iint b(t,\delta)A(t,\delta)\,\mathrm{d}\Omega, \tag{15.45}$$

gde je $\mathrm{d}\Omega$ element prostornog ugla.

Uvedimo sada na nebeskoj sferi pravougli koordinatni sistem (ξ,η,ζ). Ravan ξ–η je izabrana tako da se poklapa sa antenskim sistemom. Kako je element prostornog ugla dat sa

$$\mathrm{d}\Omega = \cos\delta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\delta = \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{(1-\xi^2-\eta^2)^{1/2}}, \tag{15.46}$$

jednačina (15.45) može se napisati u obliku

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi,\eta)A(\xi,\eta)}{(1-\xi^2-\eta^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{15.47}$$

Granice za ξ i η su, radi udobnosti, proširene do $\pm\infty$, iako su one koordinate na jediničnoj sferi, uzimanjem da je A ili b nula kada je $\xi^2+\eta^2 > 1$.

Za teleskop pune snage neophodno je da su P, pa stoga i A, pozitivni u svim pravcima. Ipak, pretpostavimo da su dve antene efektivnih površina A_1 i A_2 povezane u interferometar. Kako sada izlaz može biti pozitivan ili negativan, to isto važi i za efektivnu površinu A_c interferometrijske kombinacije. U stvari,

$$A_c = 2(A_1A_2)^{1/2}\cos\phi, \tag{15.48}$$

gde je ϕ geometrijska fazna razlika između dve antene. Pretpostavljajući da je osnova interferometra u ξ–η ravni, možemo njen vektor napisati u obliku

$$\mathfrak{D} = \lambda(u,v,0). \tag{15.49}$$

Tada sledi da je faza data sa

$$\phi = 2\pi(u\xi + v\eta). \tag{15.50}$$

Prema tome, merena, korelisana snaga P_c, u slučaju ovakvog interferometra, data je sa

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\left[A_1(\xi,\eta)A_2(\xi,\eta)\right]^{1/2}}{(1-\xi^2-\eta^2)^{1/2}}\, b(\xi,\eta)\cos\left[2\pi(u\xi+v\eta)\right]\,d\xi\,d\eta. \qquad (15.51)$$

Jednačina (15.51) daje snagu detektovanu trenutnim merenjem na interferometru. Nezavisno merenje se može izvršiti istovremeno uključivanjem četvrtine talasne dužine u jednoj od antena interferometra i time se dobija porast fazne razlike za $\frac{1}{2}\pi$. Korelisana snaga koju interferometar detektuje, recimo P_s, data je istom integralnom jednačinom (15.51), samo se sinus zamenjuje kosinusom. Sada kompleksna korelisana snaga za interferometar proizvoljne orijentacije može biti uvedena na sledeći način, $P(u,v) = P_c + iP_s$. Primetimo da je ova veličina određena iz posmatranja i data je sa

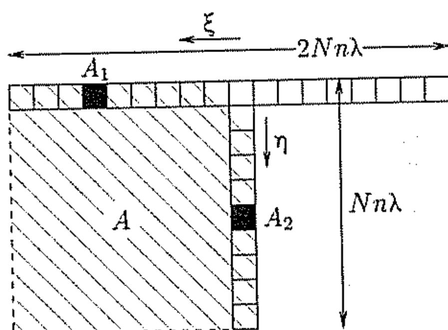
$$P(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2\left[\frac{A_1(\xi,\eta)A_2(\xi,\eta)}{1-\xi^2-\eta^2}\right]^{1/2} b(\xi,\eta)e^{2\pi i(u\xi+v\eta)}\,d\xi\,d\eta. \qquad (15.52)$$

Ova jednačina predstavlja Furijeovu integralnu jednačinu i njome je utvrđeno da $P(u,v)$ predstavlja Furijeovu komponentu raspodele sjaja sa težinskim faktorom, koji je poznata funkcija položaja. Sledstveno tome, ako se položaj interferometra menja tako da obezbedi $P(u,v)$ na širokom intervalu u i v, Furijeova inverzija može dati zahtevanu raspodelu sjaja u obliku

$$b(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\xi^2-\eta^2}{A_1(\xi,\eta)A_2(\xi,\eta)}\right]^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(u,v)e^{-2\pi i(u\xi+v\eta)}\,du\,dv. \qquad (15.53)$$

Ova jednačina je matematička osnova za sintezu aperture. Proučimo sada njene implikacije na posebnom primeru.

Pretpostavimo da je ξ-η horizontalna ravan, sa ξ-osom u pravcu istok-zapad. Razmotrimo dve identične antene A_1 i A_2, koje formiraju kvadrat sa stranom $n\lambda$. Nezavisno, svaka od njih će obezbeđivati razdvojnu moć od n^{-1} radijana. One su, međutim povezane u korelisani interferometar sa pokretnim komponentama, kao što je prikazano na sl. 15.9. Antena A_1 se može pomerati u $2N$ položaja duž ξ-ose, dok se A_2 pomera u N položaja, nezavisno duž η-ose. Postoji, dakle, ukupno $2N^2$ kombinacija i kompleksna korelisana snaga $P(u,v)$ može biti određena za svaku od njih.



Sinteza aperture. Kretanje antena A_1 i A_2 duž njihovih šina sintetiše površinu A.

СЛИКА 15.9

Vrednosti u i v koje su određene u ovom procesu leže u intervalima $-Nn \leq u \leq Nn$, $0 \leq v \leq Nn$. Međutim, lako se uočava da je $P(-u,-v) = P^*(u,v)$, kompleksno konjugovanom broju od $P(u,v)$. Oblast u–v ravni koja je efektivno pokrivena jeste $|u| \leq Nn$, $|v| \leq Nn$.

Kada se raspodela sjaja određuje korišćenjem diskretnog analogona jednačine (15.53), sva moguća postavljanja interferometra su uključena sve do maksimalne razdvojenosti od $Nn\lambda$ u svim pravcima. Ovo su tačno ona postavljanja koja su predstavljena između elemenata po-

punjene aperture A, kao što je predstavljeno na sl. 15.9. Na taj način je ova apertura efektivno sintetizovana. Izvedena raspodela sjaja je mapa sa rezolucijom od $(Nn)^{-1}$ radijana, istom kao za popunjenu aperturu.

Ekonomske prednosti ispunjene aperture su očigledne. Ispunjena apertura, međutim, postiže svoju visoku rezoluciju na pojedinačnim posmatranjima, dok metod sinteze aperture zahteva kombinovanje $2N^2$ postupnih posmatranja. Taj nedostatak je barem delimično nadoknađen činjenicom da ovih $2N^2$ posmatranja obezbeđuju radio mapu ugaone širine n^{-1} radijana, i ispunjenom aperturom mora se skanirati region da bi se obezbedila ekvivalentna informacija.

Da bi se redukovali problemi u vezi sa čestim pomeranjima dve antene, jedna od njih se može zameniti sa proširenom linijskom antenom. Pretpostavimo, na primer, da je antena A_1 zamenjena sa kompletnom linijskom antenom; tada je potrebno izvršiti samo jednodimenzionu analizu, pomeranjem antene A_2, čime se postiže znatna ušteda u vremenu, ali je povšina neba koju sinteza pokriva ograničena na pravac istok-zapad.

U gore navedenom primeru, razmatranja ugaone rezolucije su striktno važeća samo za izvor u zenitu, odnosno u pravcu normalnom na ravan antene. Ako se izvor nalazi na zenitskoj daljini z, ipak je moguće usmeriti snop od fiksirane horizontalne ravni u pravcu izvora uvođenjem pogodne fazne razlike između različitih elemenata interferometra. Efektivna površina je, ipak, ograničena faktorom $\cos z$, zahvaljujući odgovarajućem ograničenju ugaone rezolucije instrumenta.

Sličan efekt se nalazi u mapi dobijenoj sintezom aperture. Ovde ξ–η ravan ima specijalan značaj, kao ravan u kojoj leži promenljiva osnovica. Raspodela sjaja (15.33) sadrži Furijeove komponente sve do frekvencije Nn, te, stoga, očekujemo da će radio mapa dobijena na ovaj način imati rezoluciju od $(Nn)^{-1}$ radijana. Međutim, ova rezolucija odgovara mapi na ξ–η ravni, a ne na samoj nebeskoj sferi. Ugaona rezolucija na nebeskoj sferi je obezbeđena u azimutalnom pravcu $\zeta = \text{const.}$, ali u polarnom pravcu ugaona rezolucija postaje $(Nn)^{-1}\zeta$ radijana. Kako je $\zeta^2 = 1-\xi^2-\eta^2$, vidi se da je sinteza aperture najefektivnija u pravcu $\xi = 0$, $\eta = 0$.

§ 15.9. Sinteza rotacije.

Pod izvesnim okolnostima potreba za pokretanjem dve antene može se izbeći ako se koristi rotacija kao zamena za osnovicu. Ponovo ćemo razmotriti poseban primer, to je korelacioni interferometar istok-zapad osnovice D. Pretpostavimo da se radio izvor koji treba ispitati nalazi u tački (α_0, δ_0) na nebeskoj sferi. Izaberimo ekvatorski koordinatni sistem u kome se ravan ξ–η poklapa sa meridijanom rektascenzije α_0. Na sl. 15.10, ose ξ, η i ζ su usmerene ka tačkama X, Y, P, redom, u trenutku kada je časovni ugao izvora t. Tada su koordinate proizvoljne tačke (α, δ) date sa

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\delta\sin(\alpha_0 - \alpha) \\ \eta &= \cos\delta\cos(\alpha_0 - \alpha) \\ \zeta &= \sin\delta. \end{aligned} \tag{15.54}$$

Sada je osnovica usmerena ka tački W. Kako je $WY = 90^\circ - t$, vektor osnovice je dat sa

$$\mathfrak{D} = D(\cos t, \sin t, 0). \tag{15.55}$$

Sledstveno tome, pomoću (15.49), imamo da je

$$u = \frac{D}{\lambda}\cos t, \qquad v = \frac{D}{\lambda}\sin t. \tag{15.56}$$

Metod rotacione sinteze koristi promenu u u i u v sa promenom časovnog ugla. Ako se posmatranje nastavi u toku 12^h i izvor načini polukrug u u–v ravni. Taj polukrug može biti proširen i na ceo krug, s obzirom da je $P(-u,-v) = P^*(u,v)$. Time je jednodimenziona analiza kompletirana.

Dvodimenziona sinteza će zahtevati ponavljanje dvanaestočasovnih posmatranja sa menjanjem osnove. Ako je linijska antena povezana kao niz interferometara različitih dužina osnove, cela apertura može biti sintetizovana u toku jednog dvanaestočasovnog perioda. Elementi interferometra moraju biti potpuno pokretni, tako da $A_1(\xi,\eta)$ i $A_2(\xi,\eta)$ mogu ostati konstantni. U praksi, ovo znači da su to obično ekvatorski montirane parabolične antene.

Слика 15.10

Fazna kompenzacija, kao što je razmatrano u §§15.4 i 15.5, je neophodna u slučaju sinteze rotacije da bi interferometrija bila izvedena u razumljivim opsezima. Javljaju se, takođe, problemi u vezi sa skraćenjem aperture, koji su ranije razmatrani. U usvojenom koordinatnom sistemu centar izvora je u pravcu $(0, \cos\delta_0, \sin\delta_0)$. Sintetička mapa radio sjaja ima ograničenu rezoluciju u deklinaciji; pojave manje od $(\lambda/D)\csc\delta_0$ u ugaonoj širini ne mogu biti istražene. Sinteza rotacije, barem duž linija opisanih ovde, postaje slabo efektivna pri niskim deklinacijama i najuspešnija je u blizini nebeskog pola.

U zaključku treba istaći još jednu stvar. Zahtev za dvanaestočasovni period neprekidnih posmatranja, znači da izvor mora ležati na istoj hemisferi kao i instrument. U suprotnom, izvor neće ostati iznad horizonta dovoljno dugo da bi se pokrile sve neophodne orijentacije u u–v ravni (v. zadatak 15.7).

Zadaci

15.1. Dve identične antene su povezane u interferometar totalne snage, gde svaka antena nezavisno prati izvor i prima isti oblik polarizacije. Dokazati da je izlaz sa antene proporcionalan sa $\cos^2 \frac{1}{2}\phi$, gde je ϕ fazna razlika između dve antene.

15.2. Objasniti kako jednostavan dvoelementni interferometar sa osnovicom istok-zapad može biti korišćen kao radio pasažni instrument da bi merio rektascenziju i deklinaciju radio izvora. Ako se faza interferometra može meriti sa tačnošću od $\Delta\phi$, pokazati da će merenje n maksimuma voditi ka neodređenostima u rektascenziji i deklinaciji koje su približno date sa

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda\Delta\phi\,\mathrm{sc}\,\delta}{2\pi\sqrt{n}\,D}, \qquad \Delta\delta = \frac{\Delta\phi\,\mathrm{ctg}\,\delta}{2\pi n}.$$

15.3. Radio pasažni instrument radi na radio frekvenciji od 5000 MHz sa opsegom prijemnika od 10 MHz. Ne koristi se fazna kompenzacija. Oceniti proširenje ekvatorskog regiona u okviru koga nije moguće praviti razliku u deklinaciji, ako je faza interferometra određena do tačnosti od 5°.

15.4. Radio izvor deklinacije od 15° posmatran je u prolazu kroz meridijan sa interferometrom sever-jug dužine osnovice 3 km. Instrument je postavljen na geografskoj širini od 65° i koristi se konstantna kompenzacija faze. Radio frekvencija posmatranja je 6000 MHz, a koristi se opseg 15 MHz. Izračunati približno interval vremena u toku kog će interferencija biti posmatrana.

15.5. Objasniti kako merenja faze i vremena sa interferometrom sever-jug daju mogućnost određivanja rektascenzije i deklinacije izvora, kao i geografsku širinu mesta posmatranja. Ispitajte greške takvih određivanja i, posebno, dokazati jednačinu (15.30).

15.6. U §15.6 karakteristike interferometra su izvedene sa lokacije A_1, koja je istočno od dve antene. Dati odgovarajući argument koji uzima A_2 za polaznu antenu i pokažite da to vodi do iste vrednosti za efektivnu geografsku dužinu instrumenta.

15.7. Linijska antena istok-zapad ukupne dužine $n\lambda$ koristi se za sintezu rotacije na severnoj širini φ. Pokazati da, ako je posmatrana deklinacija δ ($\delta < 0$), oblast u–v ravni koja je pokrivena biće ograničena. Odrediti oblik ovog regiona i pokazati da je njegova površina $2n^2 \arccos(\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta)$.

ГЛАВА ШЕСНАЕСТА

Radio astrometrija

§ **16.1. Uvod.** Za definisanje referentnog sistema mogu se umesto zvezda iskoristiti radio izvori. Dva referentna sistema biće nezavisna jer se oslanjaju na posmatranja različitih objekata. Zvezdani referentni sistem koristi posmatranja zvezda u našoj Galaksiji. Kretanja zvezda podležu sistematskim promenama zbog kretanja Sunca, što je već pomenuto u glavi 14, a pored toga, i zbog uticaja galaktičke rotacije. S druge strane, referentni sistem radio izvora je prevashodno zasnovan na kompaktnim radio izvorima koji su vangalaktički objekti. Stoga bi Mahov princip sugerisao da je radio referentni sistem bolji, jer je bliži inercijalnom referentnom sistemu.

U optičkoj astrometriji zvezde se uzimaju kao tačkasti izvori. Postoji i čvrsta teorijska osnova za ovu pretpostavku u tome što su njihove fizičke veličine poznate iz teorije zvezdane strukture, a njihova rastojanja su poznata sa dovoljnom, ako ne i visokom tačnošću. Prema tome, može se izračunati koliko je neka zvezda ispod rezolucije datog teleskopa, barem do određenog reda veličine, i ta računica je dovoljno pouzdana. Međutim, nema konsenzusa o prirodi kompaktnih radio izvora. Posebno važni su radio kvazari. Oni pokazuju kratko periodične varijacije kojima je određena gornja granica njihove fizičke dimenzije. Njihova rastojanja se određuju iz crvenog-pomaka, pod pretpostavkom da je ceo iznos tog pomaka kosmološkog porekla, dakle posledica univerzalnog širenja vasione. Iako većina astronoma danas prihvata ovu interpretaciju, postoji manjina koja nije ubeđena u čisto kosmološko poreklo crvenog-pomaka kvazara. Oni, zbog toga, sumnjaju da su kvazari najudaljeniji vangalaktički objekti. Dalja razmatranja u ovoj glavi, a u vezi sa referentnim sistemom kvazara, oslanjaju se delom na prihvatanje ortodoksnog pogleda da su kvazari i njima slični objekti, u stvari, vrlo daleka galaktička jezgra.

Metodi sinteze aperture i rotacione sinteze, kada se primene na vrlo kompaktne objekte, daju raspodelu sjaja koja je identički jednaka antenskoj slici koju daje sintetizovana antena. Ovo ukazuje da je ugaona širina izvora ispod rezolucije radio teleskopa. Formalno gledano, raspodela sjaja izvora, koji bi bio matematička tačka, je Dirakova (DIRAC) delta funkcija, beskonačna u izvoru i jednaka nuli u ostalim tačkama. Iz (15.51) lako se izvodi da je, za tačkasti izvor gustine fluksa S u pravcu (ξ_0, η_0, ζ_0), kompleksna korelisana snaga

$$P(u,v) = 2\left[\frac{A_1(\xi_0,\eta_0)A_2(\xi_0,\eta_0)}{1-\xi_0^2-\eta_0^2}\right]^{1/2} Se^{2\pi i(\xi_0 u+\eta_0 v)}. \quad (16.1)$$

Sledi da je $|P(u,v)|$ konstanta. Furijeova transformacija daje matematički singularitet u željenom položaju.

Kao što je objašnjeno u poslednjoj glavi, jednodimenziona rotaciona sinteza se postiže dvanaestočasovnim posmatranjem sa stalnom osnovom interferometra istok-zapad. Kada je izvor nerazdvojiv sintezom, to je ukazano konstantnošću $|P(u,v)|$. Jasno je da je lakše interpretirati podatke kao posmatranja tačkastog izvora načinjena interferometrom sa stalnim pomeranjem. Informacija o položaju ovog tačkastog izvora se tada može odrediti iz vremenske varijacije faze interferometra u toku dvanaestočasovnog perioda (RYLE & ELSMORE, 1973). Instrument tada predstavlja proširenje radio pasažnog instrumenta razmotrenog u §15.3.

§ 16.2. Interferometrija poludnevne veze.

Razmotrimo interferometar istok-zapad sa osnovicom D. S obzirom da su greške povezivanja razmotrene u §§15.3 i 15.6, ovde ih nećemo uključivati u razmatranja. Faza interferometra je tada data pojednostavljenom jednačinom

$$\phi - \phi_c = \frac{2\pi D}{\lambda}\cos\delta\sin t. \quad (16.2)$$

Ukoliko su posmatranja faze načinjena u toku dvanaestočasovnog perioda moguće je odrediti prevojne tačke faze. Iz jednačine (16.2) lako se vidi da ϕ ima maksimum za $t = 6^h$ i minimum za $t = 18^h$. Maksimalna i minimalna vrednost su

$$\begin{aligned}\phi_{max} &= \phi_c + \frac{2\pi D}{\lambda}\cos\delta\\ \phi_{min} &= \phi_c - \frac{2\pi D}{\lambda}\cos\delta.\end{aligned} \quad (16.3)$$

Ako se ove jednačine reše po $\cos\delta$ i ϕ_c, dobija se

$$\cos\delta = \frac{\lambda(\phi_{max} - \phi_{min})}{4\pi D}, \quad (16.4)$$

$$\phi_c = \frac{(\phi_{max} + \phi_{min})}{2}. \quad (16.5)$$

Sada je $(\phi_{max} - \phi_{min})$ jednostavno ukupna promena faze u toku dvanaestočasovnog perioda. Kako se ona posmatra neposredno, deklinacija se izvodi iz (16.4). Međutim, vrednosti faze u bilo kom trenutku mogu sadržati neodređeni umnožak od 2π. Isto će važiti i za ϕ_c. Ovo, međutim, ne utiče na određivanje deklinacije; kako je neodređeni umnožak prisutan u celoj faznoj slici, on može biti dogovorno zanemaren. Možemo pretpostaviti, na primer, da je $-\pi < \phi_c \leq \pi$, da bi jednačina (16.5) bila korektna definicija.

Vrednost ϕ pri prolazu kroz meridijan je upravo ϕ_c. Ova tačka se može identifikovati na interferometarskoj slici. Odgovarajuće mesno zvezdano vreme daje rektascenziju izvora.

Iako su obe koordinate (α, δ) određene navedenim argumentom, on je na neki način neodgovarajući Taj argument se određuje posmatranim fazama u samo tri tačke koje odgovaraju časovnim uglovima $t = 0, \pm 6^h$, iako je faza interferometra na raspolaganju tokom celog dvanaestočasovnog perioda, tako da se koristi samo mali deo posmatranja. Međutim, izveden položaj se može iskoristiti kao prva aproksimacija. Pretpostavimo da taj položaj sadrži greške $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ i da instrumentalna faza ima grešku od $\Delta\phi_c$. Tada se faza može izračunati za bilo koji trenutak iz izvedenih vrednosti (α, δ) i ϕ_c, kao

$$\phi_{\text{rač}} = \phi_c + \frac{2\pi D}{\lambda} \cos\delta \cos(T - \alpha), \tag{16.6}$$

gde je T mesno zvezdano vreme. Neka je ϕ_{posm} posmatrana vrednost faze. Tada jednačina (16.2), s obzirom da je greška u časovnom uglu $\Delta t = -\Delta\alpha$, predviđa da je

$$\phi_{\text{posm}} - \phi_{\text{rač}} = \Delta\phi_c - \frac{2\pi D\,\Delta\delta}{\lambda} \sin\delta \sin t - \frac{2\pi D}{\lambda} \Delta\alpha \cos\delta \cos t, \tag{16.7}$$

gde je t računata vrednost časovnog ugla $T - \alpha$.

Jednačina (16.7) daje uslovnu jednačinu koja se može primeniti na dvanaestočasovni period u toku kojeg se t menja. Metodom najmanjih kvadrata mogu se dobiti vrednosti $\Delta\phi_c$ i koeficijenti uz $\sin t$ i $\cos t$. Time dobijamo određene popravke položaja izvora $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$.

Zbog jednostavnosti, ispustili smo odstupanja osnovice od pravca sever-jug (m, n). Taj efekt se svakako mora uključiti u izvođenje $\phi_{\text{rač}}$ (v. zadatak 6.3). Mesno zvezdano vreme treba da odgovara efektivnoj geografskoj dužini osnove Λ'. Efektivna dužina je uvedena u §15.6. S tim u vezi, pojaviće se dodatno i greška časovnika ΔT koju treba uključiti u kompletnu analizu i sve rektascenzije biće opterećene ovim iznosom. Sličan problem se pojavio i kod optičkog pasažnog instrumenta, što je bilo moguće razrešiti samo određivanjem ekvinokcija iz posmatranja Sunca. Ovo nije podesno rešenje u radio astrometriji, jer je Sunce preveliki i nehomogen radio izvor. Kao posledicu imamo da su rektascenzije izvedene interferometriom relativne rektascenzije. Početna tačka mora se odrediti na drugi način. Na drugoj strani, posmatranja deklinacije su apsolutna.

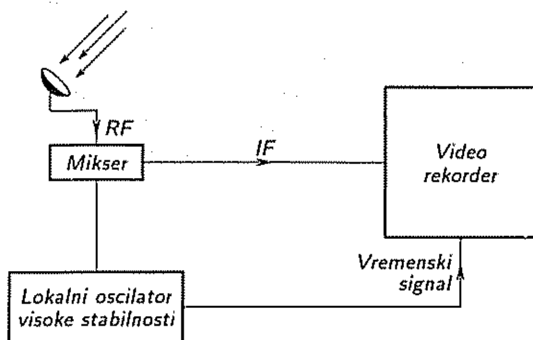
§ 16.3. Dugobazična interferometrija.

Tehnika poznata kao *dugobazična radio interferometrija* (VLBI) razlikuje se od povezane interferometrije u tome da se međufrekventni (*Intermediate Frequency*—IF) signali nezavisno snimaju na magnetne trake na mestima na kojima se vrše posmatranja. Oni se kasnije korelišu da bi dali interferencionu sliku. Šematski dijagram opreme na jednom posmatračkom mestu dat je na sl. 16.1.

Ova dva posmatračka mesta mogu biti geografski vrlo udaljena. Stoga je besmisleno govoriti o geografskoj širini i dužini interferometra ili raditi preko časovnih uglova i mesnih zvezdanih vremena. Osnovna geometrija interferometra ostaje nepromenjena, ali je njegova formulacija različita.

Razmotrimo VLBI posmatranja tačkastog radio izvora u pravcu $\mathbf{s}$, gde je

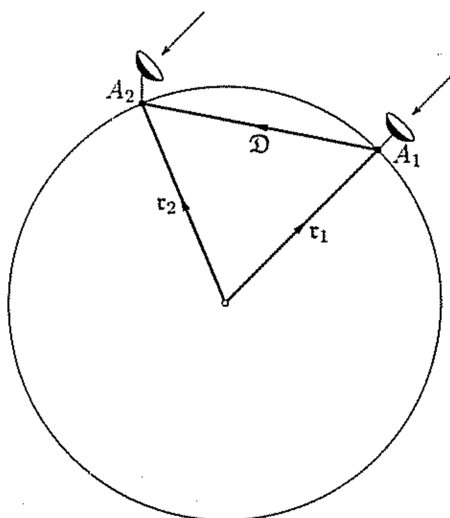
$$\mathbf{s} = (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta). \tag{16.8}$$



Dugobazična interferometrija.
Слика 16.1

Neka su sada $\mathfrak{r}_1$ i $\mathfrak{r}_2$ geocentrični vektori položaja dve antene interferometra, kao što je prikazano na sl. 16.2. Komponente ovih vektora zavise od geografskih položaja posmatračkih mesta. Pretpostavimo da smo označili njihove geocentrične širine i dužine sa (φ_1, λ_1) i (φ_2, λ_2). Geocentrična rastojanja ova dva mesta ρ_1 i ρ_2, mogu se izračunati korišćenjem metoda iz §4.5. Vektor $\mathfrak{r}_1$ je usmeren ka tački na nebeskoj sferi sa deklinacijom φ_1 i rektascenzijom jednakom mesnom zvezdanom vremenu. Dakle, ako sa S označimo Griničko zvezdano vreme, možemo napisati dva vektora u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \rho_1\left[\cos\varphi_1\cos(S+\lambda_1), \cos\varphi_1\sin(S+\lambda_1), \sin\varphi_1\right] \\ \mathfrak{r}_2 &= \rho_2\left[\cos\varphi_2\cos(S+\lambda_2), \cos\varphi_2\sin(S+\lambda_2), \sin\varphi_2\right]. \end{aligned} \qquad (16.9)$$



VLBI geometrija.
Слика 16.2

Vektor osnovice $\mathfrak{D}$ izvodi se iz ova dva vektora kao

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1. \qquad (16.10)$$

Geometrijska fazna razlika između dve antene može tada biti izvedena kao

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s} = \frac{\omega}{c}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s}, \qquad (16.11)$$

gde je ω radio frekvencija, tj. $\omega = 2\pi\nu$.

Posmatrana interferometrijska faza ϕ_0 razlikovaće se od geometrijske faze zbog nekoliko razloga. Po Kaunselmanu (Counselman, 1976) može se pisati

$$\phi_0 = \frac{\omega}{c}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s} + \phi_m + \phi_i + 2n\pi. \qquad (16.12)$$

Oznake su objašnjene u daljem tekstu.

Veličina ϕ_m predstavlja faznu razliku sredine u kojoj se talas prostire. Najzad, na dve antene radio talas mora prispeti kroz različite delove Zemljine atmosfere pod vrlo različitim uglovima. Promene faze koje su dosta analogne efektima refrakcije, javljaju se u troposferi i jonosferi.

Fazna razlika instrumentalnog porekla je označena sa ϕ_i. U povezanoj interferometriji, moguće je tretirati instrumentalnu fazu kao nepoznatu konstantu. U VLBI, međutim, ϕ_i će zavisiti od dva nezavisna standarda frekvencija. Bilo kakva promena ovih standarda izaziva varijaciju u ϕ_i, što je bitan ograničavajući faktor preciznosti merenja sa VLBI.

Da bi faza interferometra bila uočljiva, uprkos efektima širine opsega, neophodno je da korelisana fazna razlika bude prilično mala. Ako tu fazu identifikujemo sa ϕ_0, tada treba da postoji i velika instrumentalna faza da kompenzuje geometrijsku fazu $\omega\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s}/c$. Ovo je postignuto uvođenjem poravnanja dva IF signala, tako da je signal primljen u trenutku $t+\Delta t$ na prvoj anteni korelisan sa signalom primljenim u trenutku t na drugoj. U klasičnom razmatranju, Δt je jednostavno

$$\Delta t = \frac{\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s}}{c}. \tag{16.13}$$

U stvari, pri svođenju VLBI posmatranja uveden je i relativistički efekt, koji je razmotren u §16.6, ali ćemo se za sada zadržati na klasičnom pristupu.

Jednačina (16.12) uključuje član $2n\pi$ koji predstavlja implicitnu faznu dvosmislenost. Celobrojna promenljiva n nije obično odrediva pomoću VLBI. Geometrijska faza, prvi član na desnoj strani jednačine (16.12), ne može se izolovati, pa da bi se izvršila neka izvođenja iz te jednačine potrebno je koristiti se diferencijalnom formom. Ovo se može realizovati na tri načina; diferenciranje se može izvesti po (i) uglu, (ii) vremenu, (iii) frekvenciji. Svaki od ovih postupaka otkloniće faznu dvosmislenost. Da bi pojednostavili diskusiju, smatraćemo da su i ϕ_i i ϕ_m konstante, bez obzira na ono što je napred rečeno. Na ovaj način, geometrijski principi VLBI biće najjasnije pokazani.

Uobičajeno je koristiti se koordinatnim sistemom vezanim za osnovicu interferometra. Neka je $\mathfrak{I}$ jedinični vektor u pravcu vektora $\mathfrak{D}$ i neka je $\mathfrak{J}$ jedinični vektor upravan na osnovicu, u ravni Zemljinog ekvatora. Jedinični vektor $\mathfrak{K}$ se bira tako da sa ova dva vektora gradi desni trijedar vektora. Ako koordinate (α_0, δ_0) daju pravac osnovice, tada tri, upravo definisana vektora, imaju sledeće komponente u ekvatorskom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= (\cos\alpha_0\cos\delta_0, \sin\alpha_0\cos\delta_0, \sin\delta_0) \\ \mathfrak{J} &= (-\sin\alpha_0, \cos\alpha_0, 0) \\ \mathfrak{K} &= (-\cos\alpha_0\sin\delta_0, -\sin\alpha_0\sin\delta_0, \cos\delta_0). \end{aligned} \tag{16.14}$$

Da bi transformisali bilo koji vektor iz ekvatorskog koordinatnog sistema u sistem vezan za osnovicu, neophodno je samo primeniti matricu transformacije $\mathfrak{R}$. Njene komponente su date sa

$$\mathfrak{R} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{I} \\ \mathfrak{J} \\ \mathfrak{K} \end{Vmatrix}. \tag{16.15}$$

Inverzna matrica matrice $\mathfrak{R}$ je njoj transponovana matrica.

(i) Ugao. Pretpostavimo da imamo dva izvora, koji su bliski na nebeskoj sferi, u pravcima $\mathfrak{s}$ i $\mathfrak{s}+d\mathfrak{s}$. Diferenciranjem (16.12) dobija se

$$d\phi_0 = \frac{\omega}{c}\mathfrak{D}\cdot d\mathfrak{s}. \tag{16.16}$$

Komponenta izvora paralelna osnovici može biti određena iz posmatrane fazne razlike.

Kada je rastojanje među izvorima vrlo malo, dva izvora će se istovremeno naći u okviru snopa svake od antena. Ovo ne bi trebalo mešati sa interferencionom slikom dva izvora, jer će efekti širine opsega ograničiti vidljivost maksimuma samo na jedan izvor u jednom trenutku. Da bi se prešlo sa jednog izvora na drugi neophodno je sačekati za vremenski interval Δt.

Kada su dva izvora udaljena, moraju se koristiti po dve antene na svakom posmatračkom mestu. Takva posmatranja su poznata pod imenom povezana fazna interferometrija. Veza se primenjuje na krajevima osnovice, jer po dve antene na krajevima dele zajednički standard frekvencije.

(ii) Vreme. Diferenciranjem (16.12) dobija se

$$\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathfrak{s}. \tag{16.17}$$

Vektor osnovice menja se rotacijom Zemlje, a kako je $\mathfrak{D}$ stalan vektor u odnosu na Zemlju, sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{D}, \tag{16.18}$$

gde je $\boldsymbol{\Omega}$ vektor ugaone brzine Zemlje. Ako se vreme meri u zvezdanim sekundama, sledi da je

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi D}{86\,400}(\mathfrak{k} \times \mathfrak{J}),$$

gde je $\mathfrak{k}$ jedinični vektor usmeren ka severnom nebeskom polu. Iz (16.14) sledi da je $\mathfrak{k} \times \mathfrak{J} = \cos\delta_0\, \mathfrak{J}$. Zato, jednačina (16.17) dobija oblik

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s} = \frac{86\,400}{2\pi D}\frac{c}{\omega}\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}t}\sec\delta_0. \tag{16.19}$$

Dakle, moguće je odrediti pravac ka pojedinačnom izvoru, određivanjem maksimuma interferencije. Da bi se upotpunilo izvođenje pravaca ka izvorima, potrebno je izvršiti VLBI merenje sa promenjenom osnovicom. Primetimo samo da komponenta koja je određena leži u ekvatorskoj ravni.

Svaki proces diferenciranja, primenjen na posmatranja, teži da pogorša ova posmatranja. Ovo je posebno tačno za metod oštre interferencije. Vremenske promene u instrumentalnoj fazi biće pojačane. Ako se geometrijska faza može odrediti nedvosmisleno, može se očekivati od VLBI da obezbedi, kao i povezana interferometrija, astrometrijsku tačnost od λ/D radijana. To se može postići metodom (i) za relativne položaje međusobno bliskih izvora. Metod oštre interferencije prilično smanjuje tačnost.

(iii) Frekvencija. Treći metod VLBI podrazumeva izvođenje grupnog zaostatka τ, što je jednostavno izvod faze u odnosu na ugaonu radio frekvenciju, tj.

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\omega}. \tag{16.20}$$

Lako se uočava iz (16.12) da izvođenje grupnog zaostatka daje podatak o položaju u obliku

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s} = \frac{c\tau}{D}. \tag{16.21}$$

Grupni zaostatak je posmatrana veličina koja se obično koristi u VLBI tehnici. Pokazalo se da je on daleko bolji od interferentnog oblika. Kao što jednačina (16.21) ukazuje, dobija se komponenta paralelna osnovici. Upravo ta informacija bi se dobila da je ugao geometrijske faze bio dostupan. Grupni zaostatak ne može biti precizno određen, kao nedvosmislena faza. Na opsegu $\Delta\nu$, javiće se smanjenje tačnosti reda veličine $\nu/\Delta\nu$. Zbog toga se koristi najširi mogući opseg.

Vremenski interval promene grupnog zaostatka daje istu informaciju kao i oštra interferencija, naime $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s}$. U stvari, iz argumenta sličnom (ii) izvodi se

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{s} = \frac{86\,400}{2\pi D}\, c\,\frac{d\tau}{dt}\, \mathrm{sc}\,\delta_0. \qquad (16.22)$$

Treća komponenta, $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{s}$, može se izvesti iz razmatranja $\mathfrak{s}$ kao jediničnog vektora, a da bi izveli $\mathfrak{s}$ u ekvatorskim koordinatama potrebno je samo primeniti inverznu matricu rotacije.

Navedeni argument pokazuje da se položaj izvora može izvesti iz posmatranja grupnog zaostatka u toku jednog perioda. Diferenciranje primenjeno u jednačini (16.22) ne mora eksplicitno da se izvede. Umesto da pišemo $\mathfrak{s} = (l, m, n)$ i $\mathfrak{D} = (x, y, z)$ u ekvatorskom koordinatnom sistemu, možemo koristiti (16.21) u obliku

$$xl + ym + zn = c\tau.$$

Desna strana je određena iz posmatranja i poznatih promena komponenata vektora $\mathfrak{D}$. U svakom momentu ova jednačina obezbeđuje uslovnu jednačinu za (l, m, n). Komponente vektora $\mathfrak{s}$ mogu se izvesti uz pomoć metoda najmanjih kvadrata, korišćenjem Lagranževog množioca da bi zahtev $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ bio ispunjen.

§ 16.4. Pravci ka izvoru i vektori osnovica.

Primena VLBI razmotrena u prethodnom paragrafu, u potpunosti se odnosila na astrometriju. Pretpostavljeno je da je vektor osnovice $\mathfrak{D}$ bio poznat sa apsolutnom tačnošću i da je pravac ka izvoru, ili barem jedna njegova komponenta, određena iz uslova

$$\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{s} = c\tau. \qquad (16.23)$$

Ovaj argument može biti obrnut, tako da se nepoznati vektor osnovice određuje iz VLBI posmatranja izvora poznatog položaja. Kao posledicu ove ideje imamo da VLBI merenja imaju vrlo važne primene u geodeziji i astrometriji, a posebno se mogu izvršiti merenja plimskih pomeranja čvrste Zemlje. I još više, merenja osnovice daju moćno sredstvo za istraživanje kretanja pola.

Naš cilj je da ovde obradimo astrometrijske primene VLBI. Određivanje osnovice, međutim, ne može biti razdvojeno od merenja položaja izvora. To je zapravo ekvivalentno određivanju instrumentalnih grešaka (azimuta i nagiba) u optičkim merenjima. Ispitajmo zahteve koje nameće simultano određivanje položaja izvora i vektora osnovice.

Pretpostavimo da su posmatranja obavljena istovremeno sa dve osnovice $\mathfrak{D}_1$ i $\mathfrak{D}_2$. Ovo se može omogućiti beleženjem VLBI informacija na samo tri odvojena mesta, jer nije važno da li dve osnovice imaju zajedničku krajnju tačku—antenu ili ne. Tri antene mogu da daju tri osnovice, ali su samo dve od njih nezavisne. Razmotrićemo informacije koje se mogu izvući iz istovremenih posmatranja tri izvora.

Neka su s_1, s_2 i s_3 pravci ka tri izvora i neka τ_{ij} označava grupni zaostatak j-tog izvora merenog na i-toj osnovici. Tada je

$$\mathfrak{D}_i \cdot s_j = c\tau_{ij}. \qquad (16.24)$$

Pretpostavimo sada da imamo *a priori* približne položaje za sva tri pravca s_j. Oni će biti jedinični vektori. Korišćenjem te činjenice, (16.24) daće komponente svake osnovice u pravcima s_1, s_2 i s_3, što je sasvim dovoljna informacija da se vektor osnovice odredi jednoznačno, ukoliko vektori s_j nisu koplanarni. Kako u opštem slučaju ova tri vektora nisu međusobno ortogonalna, izvođenje vektora $\mathfrak{D}_i$ u ekvatorskim koordinatama dato je kroz zadatak 16.4.

Svaka greška u pretpostavljenim položajima izvora, stvaraće odgovarajuće greške u vektorima osnovica. Da bismo to ispitali, moramo se koristiti vremenskim izvodima (16.24). Iz (16.18), sledi da je

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{D}_i) \cdot s_j = c\frac{\mathrm{d}\tau_{ij}}{\mathrm{d}t}, \qquad (16.25)$$

gde je $\boldsymbol{\Omega}$ vektor ugaone brzine Zemlje. Koristeći se izvedenim vrednostima za $\mathfrak{D}_i$, ove jednačine se mogu upotrebiti za dobijanje popravljenih vrednosti za pravce ka izvorima. Za svaki vektor s_j izvedene su po dve komponente u pravcima $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{D}_1)$ i $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{D}_2)$, koje leže u ekvatorskoj ravni, tako da su polarne komponente s_j nepoznate. Te se komponente mogu odrediti iz uslova da se radi o jediničnim vektorima.

Moguće je, na ovaj način, izvršiti niz iteracija korišćenjem (16.24) za određivanje vektora osnovica i (16.25) sa uslovom normiranosti vektora, za izvođenje pravaca ka izvorima. Međutim, potrebno je voditi računa o konvergenciji, jer rešenje nije jedinstveno. Jednačina (16.24) je vektorska jednačina koja je invarijantna u odnosu na rotacije koordinatnog sistema. Jednačina (16.25) je izražena u ekvatorskom koordinatnom sistemu, jer su komponente vekotra $\boldsymbol{\Omega}$ izražene u tom sistemu. Ovim se utvrđuje pravac ka Zemljinom polu i iznos Zemljine rotacije, ali ne i nešto više. Izbor nulte tačke za rektascenziju je proizvoljan.

Odavde je jasno, da ako se posmatraju tri ili više izvora sa najmanje dve osnovice, količina prikupljenih podataka je dovoljna za određivanje svih vektora pravaca ka izvorima i vektora osnovica. Što se položaja izvora tiče, deklinacije su apsolutne, dok su rektascenzije relativne. Ni povećanje broja posmatranih izvora ni osnovica koje se koristi ne mogu otklonoti neodređenost u rektascenziji.

Kada se razmatra kretanje pola od pomoći su koordinatni sistemi vezani za Zemlju. Na sl. 16.3, tačka P_0 predstavlja referentni pol, nepokretan u odnosu na Zemljinu površini, tj. geometrijski pol Zemlje. Neka su X_0 i Y_0 tačke na ekvatoru istočnih longituda 0° i 90°, redom. Tada skup pravaca ka X_0, Y_0 i P_0 predstavlja desni ortogonalni koordinatni sistem. Neka je $\mathfrak{D}_0$ vektor osnovice u odnosu na ove ose.

Pretpostavimo sada da se, zbog polarnog kretanja, nebeski pol pomeri u tačku P. Efekt ovog pomeranja pola može biti predstavljen kao mala rotacija ω koordinatnog sistema. Napišimo

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3). \qquad (16.26)$$

Uključivanje komponente ω_3 može se učiniti neobičnim. Ona ne utiče na položaj pola, ali utiče na promene u iznosu Zemljine rotacije koje treba uključiti. Sve tri komponente vektora ω su funkcije vremena; dok su ω_1 i ω_2 čisto oscilatorne, dotle ω_3 sadrži i sekularni član kao dodatak periodičnim sezonskim promenama.

Neka je $\mathfrak{k}_0$ jedinični vektor u pravcu P_0. Pomeranje nebeskog pola $d\mathfrak{k}_0$ dato je sa

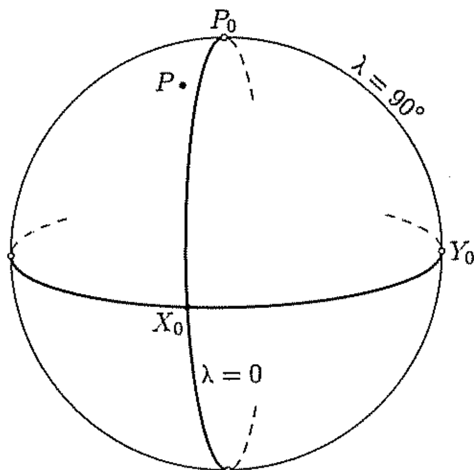
$$d\mathfrak{k}_0 = \omega \times \mathfrak{k}_0 = (\omega_2, -\omega_1, 0). \quad (16.27)$$

Pomeranje pola se obično razdvaja na pomeranja (x, y) duž meridijana sa longitudama 0° i 270° E. Dalje sledi, iz (16.27), da je

$$\begin{aligned} x &= \omega_2 \\ y &= \omega_1. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Vektorska formulacija kretanja pola, kojom se ovde koristimo, dopušta da se promene vektora osnovice izraze na vrlo jednostavan način. Te promene su date sa

$$d\mathfrak{D}_0 = \omega \times \mathfrak{D}_0. \quad (16.29)$$



Слика 16.3

Kada se jedanput primeni popravka, vektor osnovice $\mathfrak{D}$ u prostorno nepokretnom koordinatnom sistemu dobija se jednostavnom rotacijom oko pola P za ugao Ωt. Kako su promene Zemljine rotacije uključene u vektor ω, ugaona brzina Zemljine rotacije Ω tretira se kao konstanta, a vreme t se meri od nultog trenutka zvezdanog efemeridskog vremena.

§ 16.5. Uticaji sredine.

Razmatranje u vezi sa grupnim zaostatkom u prethodna dva paragrafa, bilo je drastično pojednostavljeno, da bi se razmotrili čisto geometrijski efekti. U stvari, i sam pojam grupni zaostatak zahteva izvesno opravdanje. On se javlja kroz izvod razlike radio faza dva interferometarska elementa. Posmatrana fazna razlika je bila data jednačinom (16.21) i sadrži i instrumentalne efekte i efekte sredine. Ovi će efekti još uvek biti prisutni u diferencijalnom obliku. To je, u stvari, prisustvo izvoda ϕ_m koje zahteva od nas da uočimo da je izvod od ϕ_0 grupni fenomen. Definicija grupnog zaostatka τ u jednačini (16.20) ostaje da važi, ali zamenimo jednačinu (16.23) sa opštijom jednačinom

$$c\tau = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{s} + c\tau_m, \quad (16.30)$$

gde τ_m predstavlja zaostatak zbog efekata sredine. Sledi iz (16.20) da je

$$\tau_m = \frac{d\phi_m}{d\omega}. \quad (16.31)$$

U optičkoj astronomiji uticaji atmosfere na posmatranja su tretirani kao refrakcija u donjim slojevima atmosfere, dok je u radio astronomiji situacija dosta različita i refrakcija nije glavni problem. Izvesno je da ona utiče na pravac ka izvoru te, stoga, i na pozicioniranje elemenata interferometra. Međutim, precizna astrometrijska merenja uključuju i fazne razlike ili grupne zaostatke i zahtevaju različito ispitivanje atmosferskih efekata. I dalje, ovi efekti se ne odnose samo na donje atmosfere; značajan doprinos daje jonosfera.

Osobine jonosferske refrakcije povezane su sa frekvencijom plazme ν_p, koja je određena slobodnom lokalnom gustinom elektrona N i u SI jedinicama je data sa

$$\nu_p = 8{,}978 N^{1/2}\,\mathrm{Hz} \qquad (16.32)$$

Gustina elektrona se menja u atmosferi na vrlo složen način, a ima maksimalnu vrednost na visini između 250 km i 400 km iznad Zemljine površine. Raspodela elektronske gustine menja se sa vremenom, često haotično, kako u toku dana tako sezonski i sa nivoom Sunčeve aktivnosti. Vrednost N u proizvoljnoj tački u jonosferi može da se menja barem za ceo red veličine. Posebno je važna maksimalna gustina elektrona u jonosferi, a odgovarajuća frekvencija plazme poznata je kao kritična frekvencija jonosfere. Njena vrednost je obično između 5 i 10 MHz.

Frekvencija plazme određuje indeks refrakcije n preko jednačine

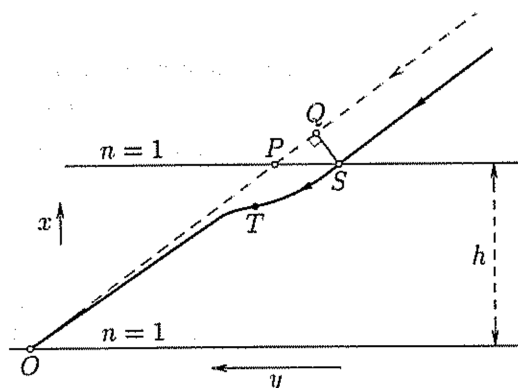
$$n = \left(1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}. \qquad (16.33)$$

Jasno je da n postaje imaginarno za radio frekvencije manje od frekvencije plazme i normalno prostiranje radio talasa nije moguće. Kako zračenje frekvencije koje je niže od kritične frekvencije ne može da probije jonosferu, time se postavlja granica dugih talasa.

Jonosferska refrakcija je snažna na metarskim talasnim dužinama, ali opada na višim frekvencijama koje se koriste u radio astronomiji. Tačno modeliranje jonosfere je veoma teško. Ona se proteže do visine od 1000 km; tako da aproksimacija paralelnim ravnima, pa čak i pretpostavka o sfernoj simetriji je previše gruba. Međutim, imajući to u vidu, nerealna situacija sa planparalelnim ravnima koja je ilustrovana na sl. 16.4, može se upotrebiti za rasvetljavanje nekih osobina koje važe barem do nekog reda veličina. U analizi koja sledi zanemarićemo doprinos troposfere, što mora biti istraženo nezavisno. Uzećemo da je na nivou Zemljine površine $n = 1$.

Posmatrajmo zrak u tački O po ulasku u jonosferu u tački S na visini h iznad Zemlje. Kao što sl. 16.4 pokazuje, radio talas se prvo refraktuje ka horizontu, pa potom nazad ka pravcu zenita. Ako sa z označimo nagib zraka prema vertikali na bilo kom nivou, tada, kao što je pokazano u §4.2, pretpostavka o paralelno-ravanskim slojevima vodi ka rezultatu

$$n \sin z = \sin z_0. \qquad (16.34)$$



Jonosferska refrakcija.
Слика 16.4

Ovde z_0 predstavlja početni pravac iznad jonosfere i takođe njegovu zenitsku daljinu na nivou Zemljine površine. To je zbog toga što se refrakcija, u planparalelnoj atmosferi, samoponištava. Najveće odstupanje od vertikale javiće se u tački T gde je gustina elektrona najveća, te indeks prelamanja ima svoju najveću vrednost, recimo n_c.

Na centimetarskim talasnim dužinama $1 - n_c$ je vrlo mali broj. Na primer, za radio frekvenciju od 5000 MHz i maksimalnu jonosfersku gustinu od $10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$ imamo da je $1 - n_c = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$. Maksimalno savijanje u tački T iznosi oko $0'',3$. Ovo stvara, još uvek, znatne efekte u fazi, ali sigurno imamo opravdanje za zanemarivanje članova reda $(1 - n_c)^2$. Jednačina (16.34) se tada svodi na

$$z = z_0 + (1 - n)\,\mathrm{tg}\,z_0 \tag{16.35}$$

Neka sada $\mathrm{d}s$ bude element puta duž zraka. Merićemo s od tačke S i neka s_0 bude dužina puta neporemećenog refrakcijom u jonosferi, tj. $s_0 = h\,\mathrm{sc}\,z_0$. Tada je aktualna dužina puta SO data sa

$$s = \int_0^h \mathrm{sc}\,z\,\mathrm{d}x,$$

gde je x koordinata u vertikalnom pravcu. Korišćenjem (16.35), lako se dobija formula

$$s = s_0 + \mathrm{sc}\,z_0\,\mathrm{tg}^2\,z_0 \int_0^h (1 - n)\,\mathrm{d}x, \tag{16.36}$$

tačna do na $(1 - n)$. Dodatni član u (16.36), uzeto vrlo grubo, biće reda $h(1 - n_c)$, odnosno oko 160 cm, što nije zanemarljivo.

Sada, u odsustvu jonosferske refrakcije, zrak posmatran u O bi prošao kroz tačku P pre nego kroz S. Neka je y_0 horizontalni pomeraj zraka nezakrivljenog pri prolasku kroz jonosferu, tj. neka je $y_0 = h\,\mathrm{tg}\,z_0$. Dalje, neka je δy dodatno horizontalno pomeranje prouzrokovano refrakcijom; tada je

$$y_0 + \delta y = \int_0^h \mathrm{tg}\,z\,\mathrm{d}x.$$

Primenjujući još jedanput aproksimaciju (16.35), nalazimo

$$\delta y = \mathrm{tg}\,z_0\,\mathrm{sc}^2\,z_0 \int_0^h (1 - n)\,\mathrm{d}x. \tag{16.37}$$

Sada možemo uočiti sa sl. 16.4 da je: $s_0 = OP$, $\delta y = PS$ i $PQ = \delta y \sin z_0$. Tada sledi iz (16.36) i (16.37) da je $OQ = s$, do veličine prvog reda po $(1 - n_c)$.

Faza radio signala u tački Q je ista kao i u tački S, što ne dokazuje da „posmatrana" faza u O nije pod uticajem jonosferske refrakcije, već samo govori da pri rastu dužine pređenog puta i dalje ima zanemarljiv uticaj. Stoga, za izvođenje faze u tački O, možemo da tretiramo putanju zraka kao pravu liniju.

Faza u proizvoljnoj tački, na rastojanju s duž putanje zraka, data je sa

$$\phi = \omega\left(t - \frac{s}{v} + \mathrm{const.}\right)$$

gde je v fazna brzina. U stvari je

$$v = \frac{c}{n} = c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \tag{16.38}$$

Stoga sledi da će fazna razlika $\Delta\phi$ između tačaka S i O biti

$$\Delta\phi = -\int \frac{\omega\,\mathrm{d}s}{v} = -\int \frac{\omega n\,\mathrm{d}s}{c}. \tag{16.39}$$

U slučaju planparalelnih ravni ova relacija se svodi na

$$\Delta\phi = -\frac{\mathrm{sc}\,z_0}{c}\int\limits_0^h \omega\left(1-\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}x.$$

Integrand se može razviti u red po binomnoj teoremi. Tada, stavljajući $\omega/c = 2\pi/\lambda$ i uz pomoć (16.32), nalazimo da je

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi h\,\mathrm{sc}\,z_0}{\lambda} + \frac{80{,}6\pi\,\mathrm{sc}\,z_0}{\lambda\nu^2}\int\limits_0^h N\,\mathrm{d}x. \tag{16.40}$$

Prvi član u (16.40) predstavlja geometrijsku faznu razliku koja se javlja između tačaka S i O, dok drugi član daje uticaj jonosferske refrakcije na fazu. Taj član nije beznačajan i na osnovu vrednosti navedenih ranije može se oceniti njegov srednji prilog na oko 150 radijana, ili oko 25 punih krugova. U ovom, previše pojednostavljenom modelu, jonosferska faza zavisi samo od ukupne koncentracije elektrona u jonosferi i zenitske daljine izvora. Model je očigledno neadekvatan i za realniji model fazna razlika mora biti izračunata iz mnogo opštije jednačine (16.39). Međutim, razmatranja u vezi sa dužinom puta ostaju na snazi, tako da integracija može biti izvedena duž pravolinijskog puta zraka. Na visokim frekvencijama nije neophodno računati putanju zraka pre integracije u (16.39).

Izvlačenjem geometrijske faze iz (16.39), vidi se da efekt jonosfere zapravo pomera radio fazu za iznos $\delta\phi$, gde je

$$\delta\phi = \int \frac{\omega(1-n)}{c}\,\mathrm{d}s. \tag{16.41}$$

Ista formula se može koristiti za izvođenje efekta donje atmosfere. Na ovim nivoima radio refrakcija je slična optičkoj refrakciji i n je veće od jedinice. Indeks refrakcije zavisi od pritiska i temperature u atmosferi, ali varira sa količinom vodene pare. Korišćenjem formule date u knjizi Alena (Allen, 1976), može se pisati

$$n - 1 = \frac{3{,}787\cdot 10^{-6}}{(1+T/273)}\left[P + 0{,}87f + \frac{17{,}69f}{(1+T/273)}\right], \tag{16.42}$$

gde je T temperatura izražena u Celzijusovim stepenima, a P i f su ukupni atmosferski pritisak i količina vodene pare u mmHg, redom.

Iako je $(n-1)$ na centimetarskim talasnim dužinama prilično veće u troposferi nego u jonosferi, integracija je izvedena na mnogo manjem rastojanju. Doprinos donje atmosfere u $\delta\phi$ je, stoga, istog reda veličine; on je oko dva puta veći na 5000 MHz, ali ima suprotan znak. Ukupni učinak sredine je dat jednačinom (16.41), koja se integracijom proširuje na troposferu i jonosferu. Vrednosti indeksa refrakcije u ove dve oblasti su date formulama (16.42) i (16.33).

Prilog uticaja sredine interferometarskoj fazi predstavlja jednostavno razliku između vrednosti $\delta\phi$ dobijenoj na svakoj od antena. Formalno, možemo pisati da je

$$\phi_m = \delta\phi_2 - \delta\phi_1, \tag{16.43}$$

gde indeksi 1 i 2 predstavljaju oznake antena.

Grupni zaostatak se dobija diferenciranjem fazne razlike po ω. Podesno je podeliti zaostatak zbog uticaja sredine na troposfersku i jonosfersku komponentu, na sledeći način

$$\tau_m = \frac{d\phi_m}{d\omega} = \tau_{\text{trop}} + \tau_{\text{jon}}. \tag{16.44}$$

Kako je indeks prelamanja u nižim slojevima atmosfere nezavisan od frekvencije, možemo pisati

$$c\tau_{\text{trop}} = \int (1 - n_2)\, ds_2 - \int (1 - n_1)\, ds_1. \tag{16.45}$$

Formalno, ova veličina je konstantna. Faktički, dva integrala u (16.45) podležu slučajnim fluktuacijama koje će kod dugih osnovica, koje se koriste kod VLBI, biti nekorelisane. Zaista, neizvesnost u vrednosti τ_{trop}, uglavnom prouzrokovane zbog fluktuacija u količini vodene pare, predstavljaju najozbiljnije ograničenje za tačnost VLBI.

Analiza faznog zaostatka zbog jonosferske refrakcije je različita i indeks prelamanja sada zavisi od frekvencije i (16.33) daje, s dovoljnom tačnošću,

$$\omega(1 - n) = \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega}.$$

Uključivanjem ove relacije u (16.41) izvodimo τ_{jon} iz (16.43) i (16.44) kao

$$c\tau_{\text{jon}} = \frac{1}{2\omega^2}\left(\int \omega_{p_1}^2\, ds_1 - \int \omega_{p_2}^2\, ds_2 \right),$$

gde su integracije izvedene duž puteva pređenih kroz jonosferu. Konačno, pomoću (16.32) nalazimo

$$c\tau_{\text{jon}} = \frac{40{,}30}{\nu^2}\left(\int N_1\, ds_1 - \int N_2\, ds_2 \right). \tag{16.46}$$

Iako se menja prilično brzo, jonosferski zaostatak nije podložan tako naglim slučajnim fluktuacijama kao troposferski. Dalje, zavisnost od frekvencije je korisna jer dopušta da se izraz u zagradi u (16.46) odredi iz više-frekventnih posmatranja.

§ 16.6. Relativistički efekti.

Grupni zaostatak je vremenski interval između prijema signala talasnog fronta na obe antene interferometra. Međutim, pri definisanju grupnog zaostatka treba voditi računa i o relativističkim efektima, te se definicija τ u (16.23) modifikuje na odgovarajući način. Pretpostavimo da su geocentrični vektori položaja dve antene $\mathfrak{r}_1$ i $\mathfrak{r}_2$, i da na oba mesta imamo idealan atomski sat. Ako signal dostiže prvu antenu u trenutku T_1 i ako dostiže drugu antenu u trenutku T_2, grupni zaostatak se definiše kao

$$\tau = T_2 - T_1. \tag{16.47}$$

Zaostatak τ može biti shvaćen kao funkcija T_1.

Neka $\mathfrak{R}$ bude baricentrični položaj geocentra. Vektori $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ biće funkcije vremena. Neophodno je koristiti koordinatno vreme opšte relativnosti, a onda komponente pomenutih vektora možemo izraziti u izotropnom koordinatnom sistemu. Moguće je jedno pojednostavljenje, ako se uvedu odgovarajući faktori razme-

re. Izotropna forma Švarcšildove metrike [jednačine (3.53) i (8.50)] može se napisati, s dovoljnom tačnošću, kao

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}}\right)d\tilde{t}^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2m}{\tilde{r}}\right)\left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \quad (16.48)$$

Umesto koordinatnog vremena $\tilde{t}$, pogodno je koristiti TDB kao vremensku koordinatu t. Tada, ako je a velika poluosa Zemljine putanje, možemo iskoristiti jednačinu (10.41) da bi napisali

$$dt = \left(1 - \frac{3m}{2a}\right)d\tilde{t}. \quad (16.49)$$

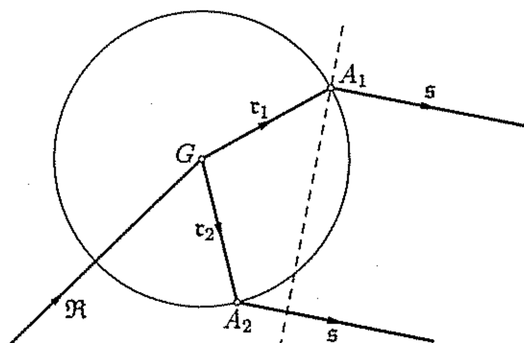
Vremenska koordinata t koja je upravo uvedena ima samo dugoperiodične promene sa TDT. Ovakav izbor će se skoro poklopiti sa vremenom merenim na atomskim časovnicima. Sada ćemo učiniti jednu *ad hoc* prepravku na radijalnoj koordinati $\tilde{r}$. Izaberimo novu radijalnu koordinatu r tako da koordinatna brzina svetlosti iznosi tačno c, na sledeći način

$$r = \left(1 + \frac{3m}{2a} - \frac{2m}{R}\right)\tilde{r}, \quad (16.50)$$

gde R predstavlja vrednost Zemljine radijalne koordinate u trenutku posmatranja. Tada, uvođenjem pravouglih koordinata (x, y, z) uobičajenom transformacijom (3.48), nalazimo da metrika, u neposrednoj okolini Zemlje, dobija formu

$$ds^2 = \left(1 + \frac{3m}{a} - \frac{2m}{R}\right)\left[dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\right]. \quad (16.51)$$

Treba shvatiti da tri ranije uvedena vektora, koja su prikazana na sl. 16.5, imaju komponente u pravouglom koordinatnom sistemu uvedenom sa (16.51) i da predstavljaju funkcije vremenske koordinate t.



Слика 16.5

Pretpostavimo sada da smo interferometrom posmatrali izvor u pravcu jediničnog vektora $\mathfrak{s}$. Ovo je pravac koji bi odredio posmatrač koji miruje u odnosu na baricentrični referentni sistem. Neka signal dostigne prvu antenu u trenutku t. Talasni front signala je na sl. 16.5 prikazan isprekidanom linijom; G je geocentar, dok su A_1 i A_2 dve antene. Talasni front je ravan, upravna na vektor $\mathfrak{s}$ u tački sa baricentričnim vektorom položaja $\mathfrak{R}(t) + \mathfrak{r}_1(t)$. Stoga, sledi da svaka tačka na ovom frontu, sa vektorom položaja $\mathfrak{r}$, zadovoljava jednačinu

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = (\mathfrak{R} + \mathfrak{r}_1) \cdot \mathfrak{s}.$$

U narednom trenutku $t + \Delta t$ isti talasni front će biti dat jednačinom

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = (\mathfrak{R} + \mathfrak{r}_1) \cdot \mathfrak{s} - c\Delta t. \quad (16.52)$$

Ako $t + \Delta t$ jeste trenutak u kom signal dostiže antenu A_2, tada, s dovoljnom tačnošću, možemo pisati da je

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}_2 + \Delta t\,(\dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathfrak{r}}_2),$$

što vodi ka rezultatu

$$\Delta t = \frac{(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\cdot \mathfrak{s}}{c}\left[1 + \frac{(\dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathfrak{r}}_2)\cdot \mathfrak{s}}{c}\right]^{-1} \qquad (16.53)$$

Treba primetiti da su svi vektori određeni u baricentričnom vremenu t, i da jednačina (16.53) daje zaostatak u baricentričnom vremenu kao funkciju od t. Tačka iznad vektora označava diferenciranje po baricentričnom vremenu.

Dalje se veličina Δt mora povezati sa vremenima koje pokazuju časovnici T_i, $i = 1, 2$. Vreme koje beleže ovi časovnici je zapravo interval duž njihovih svetskih linija (odgovarajuća sopstvena vremena). Ovi intervali se dobijaju zamenjivanjem njihovih baricentričnih položaja $\mathfrak{R} + \mathfrak{r}_i$ u metrici (16.51). Tada se, s dovoljnom tačnošću, izvodi da je

$$\mathrm{d}T_i^2 = \mathrm{d}t^2\left[1 + \frac{3m}{a} - \frac{2m}{R} - \frac{\dot{\mathfrak{R}}^2 + 2\dot{\mathfrak{R}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}_i + \dot{\mathfrak{r}}_i^2}{c^2}\right]. \qquad (16.54)$$

Sada zamenimo $\dot{\mathfrak{R}}^2$ i R sa odgovarajućim veličinama u problemu dva tela. Korišćenjem (6.15) i (6.24) možemo pisati da je

$$\frac{\dot{\mathfrak{R}}^2}{c^2} = \frac{2m}{R} - \frac{m}{a} \qquad \text{i} \qquad R = a(1 - e\cos E). \qquad (16.55)$$

Tada se jednačina (16.54) svodi na

$$\mathrm{d}T_i = \mathrm{d}t\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathfrak{r}}_i^2}{c^2} - \frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}_i}{c^2} - \frac{2m}{a}\frac{e\cos E}{(1 - e\cos E)}\right]. \qquad (16.56)$$

Izraz na desnoj strani može se integrisati—skoro kompletno—uz pomoć Keplerove jednačine (6.26). Međutim, $\dot{\mathfrak{r}}_i^2$ je konstantno, tako da se (16.56) svodi na

$$T_i = t\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathfrak{r}}_i^2}{c^2}\right) - \frac{2m}{an}e\sin E - \frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{r}_i}{c^2} + \int\frac{\ddot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{r}_i}{c^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (16.57)$$

Prvi član predstavlja dilataciju vremena nastalu zbog pomeranja u odnosu na centar Zemlje; drugi član predstavlja periodičnu razliku između TDT i TDB razmotrenu u §10.7; treći član je verovatno najvažniji, jer je reda $2\,\mu$s i ima dnevnu promenu. Poslednji član je manji, ali se, takođe, menja sa dnevnim kretanjem i nije zanemarljiv. Iako se njegova integracija ne može izvršiti analitički, nije teško modelirati ga. Zbog pogodnosti analitičkog zapisa, pišemo da je

$$T_i = t - \frac{\dot{\mathfrak{R}}\cdot\mathfrak{r}_i}{c^2} + \tau_i, \qquad (16.58)$$

gde se τ_i sastoji od ostalih članova u (16.57) i dodatnih odstupanja pokazivanja časovnika od idealnog slučaja.

Sada, uključenjem efekta atmosferske sredine, grupni zaostatak je dat sa

$$\tau = T_2(t + \Delta t) - T_1(t) + \tau_m. \qquad (16.59)$$

Razvojem u Tejlorov red dobija se

$$\tau = \frac{\dot{\mathfrak{R}} \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)}{c^2} + \tau_2 - \tau_1 + \tau_m + \Delta t \frac{dT_2}{dt}.$$

Poslednji član na desnoj strani dobija se iz jednačine (16 56). Tada, ako usvojimo oznaku

$$\tau_c = \tau_2 - \tau_1, \tag{16 60}$$

dobijamo konačan rezultat u obliku

$$\tau = \Delta t \left[1 - \frac{\dot{\mathfrak{R}} \cdot \dot{\mathfrak{r}}_2}{c^2} - \frac{2m}{a} \frac{e \cos E}{(1 - e \cos E)} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathfrak{r}}_2^2}{c^2} \right] + \frac{\dot{\mathfrak{R}} \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)}{c^2} + \tau_c + \tau_m \tag{16.61}$$

Članovi u prvoj zagradi su poređani po veličini, od najvećeg do najmanjeg; poslednja dva člana nisu, u opštem slučaju, važna. Sve funkcije u (16.61) su date za trenutak t, koordinatno vreme prijema signala na prvoj anteni.

Da bi se redukovala VLBI posmatranja neophodni su složeni algoritmi, jer se koordinate izvora, koordinate osnovice, parametri koji određuju sredinu kroz koju se signal prostire i instrumentalne greške izvode istovremeno najboljim fitovanjem podataka. Bez obzira na to, možemo konstatovati sledeće principijelne osobine. Posmatrana veličina je grupni zaostatak τ; tako da Δt može biti izvedeno iz (16.61) ako je poznat vektor osnovice i ako su efekti sredine kao i instrumentalne greške na zadovoljavajući način modelirane. Pravac ka izvoru, ili barem njegova komponenta paralelna osnovici, može se odrediti iteracijama iz (16.53).

Pravac ka izvoru $\mathfrak{s}$, izveden na ovaj način, automatski će biti popravljen za efekte dnevne i godišnje aberacije. Efekti paralakse, kao i savijanje svetlosti, međutim, nisu uključeni. Uticaj godišnje paralakse kao i savijanje svetlosti mogu se obračunati na standardan način opisan u glavi 8. Ukoliko sa $\mathfrak{s}_0$ označimo baricentrični pravac ka izvoru, modifikovana jednačina (8.73) daje

$$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s} - \left[\pi + \frac{2m}{R(R + \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{s})} \right] \mathfrak{s} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{R}), \tag{16.62}$$

gde je π paralaksa izvora. Za mnoge radio izvore paralaksa će biti zanemarljiva, ali uvek treba uključiti savijanje svetlosti.

Efekti geocentrične paralakse, koji su značajni samo za tela unutar Sunčevog sistema, zahtevaju drugačiji pristup. Kada je taj efekt uključen, on implicira da pravci ka izvoru posmatranom sa različitih antena nisu jednaki. Tada je potrebno smatrati talasni front sferom—kao što je razmotreno u zadacima 16.7 i 16.8.

§ 16.7. Radio i zvezdani referentni sistemi.

Većina radio izvora koji se posmatraju za astrometrijske potrebe su vrlo udaljeni vangalaktički objekti. Ako se primeni Mahov princip, sledi da bi radio referentni sistem definisan ovim objektima trebalo da bude inercijalni sistem. Teško je, međutim, primenjivati ovaj princip koji odbacuje mogućnost postojanja rotacije celog univerzuma. Zaista, neke neortodoksne kosmologije dopuštaju univerzalnu rotaciju, ali vremenski intervali u kojima se ta rotacija obavlja moraju biti reda Hablovog (HUBBLE) vremena i to bi prouzrokovalo sopstveno kretanje od 10^{-5} lučnih sekundi za godinu, što je u potpunosti zanemarljivo.

U prethodna dva paragrafa, videli smo kako se efekti aberacije, savijanja svetlosti i prostiranja svetlosti kroz atmosferu, mogu otkloniti iz VLBI posmatranja. Neka su (α_m, δ_m) rektascenzija i deklinacija radio izvora koje treba korigovati pomenutim popravkama. Ako se radi o vangalaktičkim izvorima mogu se zanemariti paralaksa i sopstveno kretanje; tako da merene koordinate (α_m, δ_m) daju baricentrični položaj u odnosu na pravi ekvator i ekvinokcij tog datuma. Ovo tvrđenje je potrebno dopuniti—da je određivanje rektascenzije relativno, vrednost α_m treba popraviti korekcijom ekvinokcija, sa oznakom Δ, zbog razlike između dinamičkog ekvinokcija i njegovog prihvaćenog položaja. Stoga, pravi položaj izvora je dat sa $(\alpha_m + \Delta, \delta_m)$.

Radio astrometrija obezbeđuje moćno sredstvo za direktno izučavanje precesije. Kako ne postoje problemi sa sopstvenim kretanjem izvora za vangalaktičke objekte, svaka promena koordinata takvog izvora, izvan promene Δ, može biti pridružena u potpunosti promeni koordinatnog sistema, odnosno precesiji i nutaciji. Nutacioni efekti su periodične promene u (α_m, δ_m). Kada se oni jednom otklone ostaju samo sekularne promene zbog dejstva precesije koje ćemo ovde razmotriti.

Promene u rektascenziji i deklinaciji zbog uticaja precesije u kratkim vremenskim intervalima τ su date jednačinom (9.13). Izraženo preko (α_m, δ_m) može se pisati

$$\begin{aligned} d\alpha_m &= \left(m - \frac{d\Delta}{dt}\right)\tau + n\tau \sin\alpha_m \operatorname{tg}\delta_m \\ d\delta_m &= n\tau\cos\alpha_m. \end{aligned} \tag{16.63}$$

Jasno je da se precesiona konstanta n može odrediti merenjem promene δ_m. Promena u α_m daće tada veličinu $(m - d\Delta/dt)$, ali se vrednost m ne može odrediti pre nego što se odredi popravka ekvinokcija Δ. Da bi se to postiglo neophodno je uključiti i dinamiku Sunčevog sistema.

Na ovaj problem se primenjuju dva metoda ispitivanja. Metod posredno koristi emisiju radio signala sa pulsara. U §11.5 bilo je objašnjeno kako ekliptičke koordinate pulsara (λ, β) mogu biti određene iz godišnje varijacije trenutaka prijema pulsacija. Ovaj metod pretpostavlja da je Zemljina putanja oko Sunca dobro poznata. To je mesto na kome se u analizu uključuju dinamički principi. Apsolutna deklinacija pulsara određena je iz interferometrijskih merenja, pa se pomoću te vrednosti i vrednosti ekliptičkih koordinata može dobiti apsolutna rektascenzija, na primer iz formule

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta. \tag{16.64}$$

Popravka ekvinokcija se tada izvodi kao $\alpha - \alpha_m$.

U alternativnom pristupu, interferometrijska merenja mogu se vršiti i u Sunčevom sistemu. Na žalost, Sunce, Mesec i planete, nisu pogodni jer je njihova radio emisija ili previše slaba ili ju je teško lokalizovati. Međutim, mogu se koristiti veštački radio izvori, koji su postavljeni na telima Sunčevog sistema ili se nalaze na dobro utvrđenim heliocentričnim orbitama.

Zvezdani referentni sistem je na više načina iscrpniji od radio referentnog sistema, ali podleže većim sistematskim greškama. Uglavnom, isti problem ostaje i u ovom slučaju; apsolutna posmatranja pojedinačnih zvezda meridijanskim instrumentima obezbeđuju apsolutne deklinacije, ali relativne rektascenzije. Stoga je potrebno izvesti popravku ekvinokcija.

Određivanje precesije je mnogo komplikovanije iz posmatranja zvezda. Pre svega, položaji svih zvezda su opterećeni prisustvom slučajnih sopstvenih kretanja, tako da je jedino statistički pristup validan. Drugo, treba otkloniti uticaj Sunčevog kretanja. Samo kada su ovi problemi prevaziđeni, može se postaviti pitanje zvezdanog referentnog sistema.

Pretpostavimo da referentni sistem rotira nepoznatom ugaonom brzinom ω, u toku nekog vremenskog intervala. Tada je promena pravca ka zvezdi $\mathfrak{s}$ data sa

$$d\mathfrak{s} = \omega \times \mathfrak{s}. \tag{16.65}$$

Samo promena deklinacije zvezde može biti tačno izmerena, tj. komponenta vektora $d\mathfrak{s}$ u pravcu ka polu $\mathfrak{k}$, tj.

$$\mathfrak{k} \cdot d\mathfrak{s} = (\omega \times \mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{k} = \omega \cdot (\mathfrak{s} \times \mathfrak{k}). \tag{16.66}$$

Ova jednačina govori da posmatranja različitih zvezda mogu otkriti komponentu vektora ω u različitim ekvatorskim pravcima, ali $\omega \cdot \mathfrak{k}$ se ne može izvesti samo na osnovu posmatranja zvezda.

Isti se argument primenjuje na radio referentne sisteme. Međutim, tada možemo biti sigurni da je rotacija ω isključivo usled precesije. U slučaju zvezdanog referentnog sistema, postoji dodatna komplikacija u tome što ω predstavlja zbir dve nezavisne rotacije, naime, jedan član potiče od precesije, a drugi od galaktičke rotacije i predstavljen je Ortovim parametrom B iz §14.8.

Zvezdani referentni sistem je povezan sa inercijalnim sistemom preko posmatranja objekata u Sunčevom sistemu, koji je utvrđen dinamikom Sunčevog sistema. U ovom slučaju, prirodna tela Sunčevog sistema su pogodni objekti za direktna posmatranja sa meridijanskim instrumentima. Na dve opservatorije upoređivana su ova merenja sa vangalaktičkim objektima. To su opservatorija Lick i Pulkovo. Ovi programi su nekompletni, jer uključuju dugoročne studije prividnih vangalaktičkih sopstvenih kretanja u zvezdanom referentnom sistemu. Ovo poređenje je drugorazredne prirode, zato što udaljene galaksije obično predstavljaju slabe izvore koje nije moguće posmatrati meridijanskim instrumentima. Stoga se njihovi položaji izvode iz relativnih fotografskih merenja u odnosu na zvezdanu pozadinu. Dodatna teškoća se javlja zbog toga što većina optičkih vangalaktičkih izvora daje difuzne fotografske likove.

Teško je uspostaviti direktnu vezu između zvezdanih i radio referentnih sistema. Najkompaktniji radio izvori su obično slabi optički izvori, dok je radio emisija sa većine normalnih zvezda slaba ili je nije moguće detektovati. Stoga su ova dva referentna sistema zasnovana na potpuno različitim grupama objekata. Prilike za direktno upoređenje su veoma retke. Jedan objekt koji može biti proučen i optičkom tehnikom i radio interferometrijom je *Algol*. Većina ostalih kompaktnih radio izvora, ako se uopšte mogu ispitivati optički, onda je to fotografskom tehnikom.

Radio referentni sistem je vezan za objekte koji su prividno nepokretni za inercijalni referentni sistem. Ukoliko su posmatranja načinjena sa Zemlje, merenja daju apsolutne deklinacije i relativne rektascenzije. Interferometrijski položaji zbog toga sadrže nepoznatu popravku ekvinokcija, koja se ne može otkloniti bez primene drugih metoda. Razlog je taj što posmatranja pokrivaju samo mali deo perioda precesije. Ukoliko bi se posmatranja produžila u toku značajno dužeg perioda, popravka ekvinokcija se može odrediti samo iz interferometrijskih položaja—v. zadatak 16.10.

Zadaci

16.1. Interferometar istok-zapad, sa osnovicom od 3,6 km, radi na radio frekvenciji od 5000 MHz. Izračunati ukupnu promenu faze $\Delta\phi$ koja se javlja u toku dvanaestočasovnog posmatranja izvora na deklinaciji od 15°. Izračunati promenu $\Delta\phi$ koja odgovara razlici u deklinaciji od jedne lučne sekunde.

16.2. Pokazati da dnevna aberacija ne utiče na vrednost $\Delta\phi$ koja je definisana u prethodnom pitanju, ali unosi lažnu instrumentalnu fazu datu sa

$$d\phi_c = 2'',011 \frac{D}{\lambda} \cos\varphi \sin^2\delta,$$

gde je φ geografska širina interferometra.

16.3. Osnovica interferometra je približno postavljena u pravcu istok-zapad i usmerena je ka tački na nebeskoj sferi čiji su časovni ugao i deklinacija $(6^h - m, n)$. Pokazati da će dvanaestočasovna posmatranja radio izvora obezbediti deklinaciju izvora i instrumentalnu fazu kroz jednačine

$$\cos\delta = \frac{\lambda(\phi_{max} - \phi_{min}) \operatorname{sc} n}{4\pi D}, \qquad \phi_c = \frac{1}{2}(\phi_{max} + \phi_{min}) - \frac{2\pi D}{\lambda} \sin n \sin\delta.$$

Pokazati da će izvestan broj izvora na različitim deklinacijama, u principu, dopuštati određivanje ugla n, ali da određivanje ugla m nije moguće bez *a priori* pretpostavke o rektascenziji barem jednog izvora. Izvesti da su apsolutna merenja deklinacije moguća, ali da su u isto vreme moguća samo relativna merenja rektascenzije.

16.4. Razmotriti rešenje jednačine (16.24) za tri izvora u poznatim pravcima $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ i $\mathfrak{s}_3$. Pretpostavljajući da su $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$ i $\mathfrak{i}_3$ jedinični vektori u pravcima osa standardnog ekvatorskog pravouglog koordinatnog sistema, pokazati da su vektori osnovice $\mathfrak{D}_i$ dati sa

$$\mathfrak{D}_i = c\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{T}_i,$$

gde su $\mathfrak{T}_i$ vektori čije su komponente τ_{ij}, a $\mathfrak{S}$ je matrica čiji su elementi definisani sa

$$\mathfrak{S}_{jk} = \mathfrak{s}_j \cdot \mathfrak{i}_k.$$

16.5. Nađena su rešenja $\mathfrak{D}_j$, $j = 1, 2$, i $\mathfrak{s}_i$, $i = 1, 2, 3$, jednačina (16.24) i (16.25). Dakazati da $\mathfrak{D}_j + \varepsilon(\Omega \times \mathfrak{D}_j)$ i $\mathfrak{s}_i + \varepsilon(\Omega \times \mathfrak{s}_i)$, takođe, predstavljaju približna rešenja, ukoliko je ε mala veličina. Koje su posledice ovog rezultata?

16.6. VLBI osnovica je usmerena ka tački na nebeskoj sferi sa ekvatorskim koordinatama (α_0, δ_0). Dokazati da će kretanje pola prouzrokovati promenu grupnog zaostatka $\delta\tau$ za izvor sa ekvatorskim koordinatama (α, δ), gde je

$$\begin{aligned} \delta\tau = {} & \frac{Dx}{c}(\cos\alpha\cos\delta\sin\delta_0 - \cos\alpha_0\cos\delta_0\sin\delta) \\ & - \frac{Dy}{c}(\sin\alpha\cos\delta\sin\delta_0 - \sin\alpha_0\cos\delta_0\sin\delta). \end{aligned}$$

[(x, y) su koordinate pomeranja pola duž meridijana sa geografskom dužinom 0 i 90° W.]

16.7. Uključiti uticaj geocentrične paralakse u argumentaciji iz §16.6. Posebno, pokazati da interval koordinatnog vremena Δt postaje rešenje kvadratne jednačine koja može biti napisana u obliku

$$\left(\Delta t\,(\dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathfrak{r}}_2 + c\mathfrak{s}) - \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2\right) \cdot \left[\Delta t\,(\dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathfrak{r}}_2 - c\mathfrak{s}) + 2(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0) + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2\right] = 0.$$

Ovde $\mathfrak{R}_0$ predstavlja baricentrični vektor položaja izvora u vreme emisije, ali su sve ostale veličine određene u trenutku prijema zračenja na prvu antenu. Dalje, jedinični vektor $\mathfrak{s}$ je u pravcu $(\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R} - \mathfrak{r}_1)$, dok su ostale oznake iste kao i u §16.6.

16.8. Izvesti iz jednačine iz prethodnog zadatka rezultat (16.53) zanemarivanjem geocentrične paralakse i izvesti njegovu modifikovanu fomulu kada se geocentrična paralaksa uključi samo do veličine prvog reda.

16.9. Transverzalna brzina vangalaktičkog izvora je deo η njene radijalne brzine, a radijalna brzina je kosmološkog porekla. Pokazati da je sopstveno kretanje izvora

$$\mu = 2'',11 \cdot 10^{-7}\eta H$$

gde je H Hablova konstanta (u km s^{-1} Mpc^{-1}).

16.10. Pokazati da je, ukoliko su interferometrijska posmatranja rektascenzije i deklinacije obavljena u dovoljno dugom vremenskom intervalu, moguće odrediti, na osnovu iznosa promene deklinacije, ne samo vrednost precesione konstante n nego i veličinu $n\Delta$, gde je Δ popravka ekvinokcija. Pokazati da bi ovo određivanje bilo efikasno, neophodno je pretpostaviti da je Δ konstanta, ili se menja na poznat način.

ГЛАВА СЕДАМНАЕСТА

Planetske pojave i površinske koordinate

§ **17.1. Prividno kretanje unutrašnje planete.** Dve planete, Merkur i Venera, često se nazivaju unutrašnjim planetama. Pojam unutrašnje, ne treba shvatiti u manje važnom smislu, jer on označava činjenicu da su te dve planete uvek bliže Suncu nego Zemlji. Pogodno je razmatrati ove dve planete, odvojeno od ostalih, zato što su pojave o kojima ćemo govoriti, za ove planete, kvalitativno različite. Međutim, definicije koje slede važe za sve planete.

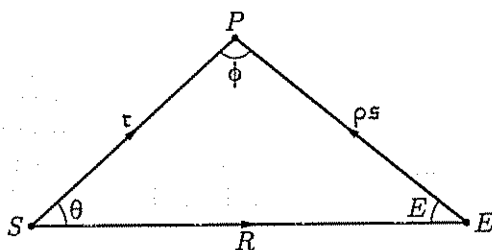
Neka su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{R}$ heliocentrični vektori položaja planete i Zemlje, redom. Tada se geocentrični položaj planete može predstaviti jednačinom

$$\rho\mathfrak{s} = \mathfrak{r} - \mathfrak{R}. \qquad (17.1)$$

Na sl. 17.1, tačke S, E i P predstavljaju Sunce, Zemlju i planetu, redom, a vektori iz jednačine (17.1) su prikazani na toj slici. Uglovi u trouglu SEP su takođe važni. Ugao kod temena E se zove *elongacija*, dok se ugao kod temena P zove *fazni ugao*, i označava se sa ϕ. Ovi uglovi se lako određuju iz formula

$$\cos E = -\frac{1}{R}\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{s}, \qquad (17.2)$$

$$\cos\phi = \frac{1}{r}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s}. \qquad (17.3)$$

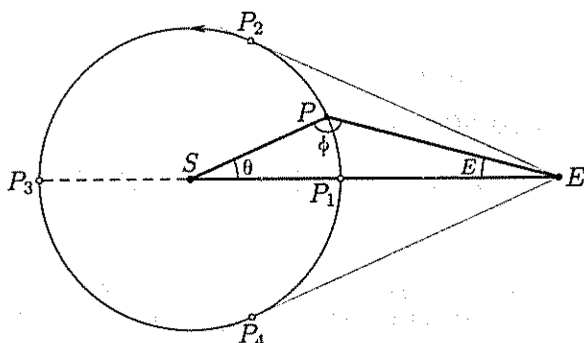


СЛИКА 17.1

Označimo treći ugao na sl. 17.1, tj. $P\hat{S}E$ sa θ. Ovaj ugao raste približno jednoliko, što ne važi ni za E ni za ϕ. Naravno, prividan sjaj planete zavisi od njenog rastojanja od Zemlje, i inverzno je proporcionalan sa ρ^2. Sjaj će, takođe, zavisiti od faznog ugla, jer on određuje nagib osvetljene hemisfere planete prema pravcu ka Zemlji. Treći uzrok pomenutoj varijaciji sjaja planete je promena rastojanja do Sunca, zbog eliptičnosti njene putanje.

Elongacija E određuje vidljivost planete, jer je ona zapravo ugaono rastojanje planete od Sunca. Za unutrašnje planete, E je ograničeno na konačan interval. To znači da se ove planete, u opštem slučaju, mogu posmatrati kratko pre i posle zalaska Sunca.

Da bi kvalitativno ispitali efekte koji se odnose na dve unutrašnje planete, učinićemo vrlo grubu aproksimaciju, pretpostavićemo da su njihove putanje oko Sunca kružne i koplanarne. Slika 17.2 ilustruje najznačajniju konfiguraciju koju unutrašnje planete mogu zauzeti u odnosu na Zemlju. Tačka P_1 odgovara unutrašnjoj konjunkciji, tačka P_3 spoljašnjoj konjunkciji, dok P_2 i P_4 predstavljaju položaje planeta u trenucima najveće elongacije, zapadno i istočno od Sunca, redom.



Konfiguracija u slučaju unutrašnje planete

Слика 17.2

Neka n_E i n_P predstavljaju srednja kretanja Zemlje i planete. Tada se linija Sunce-Zemlja obrće ugaonom brzinom n_E u odnosu na inercijalni koordinatni sistem. Zamišljamo da je ova rotacija prikazana na sl. 17.2 i da je linija SE nepokretna. Tada je jasno da će se linija SP kretati sa ugaonom brzinom $(n_P - n_E)$. Period u toku kog ova linija napravi jedan pun obrt u odnosu na SE je poznat kao *sinodički period* planete. To je period između dve uzastopne, identične konfiguracije planete, Sunca i Zemlje. Sinodički period S je dat sa

$$S = \frac{360^\circ}{n_P - n_E}, \tag{17.4}$$

izražen preko perioda obilaska putanje T_P i T_E, planete i Zemlje, redom, biće

$$S^{-1} = T_P^{-1} - T_E^{-1}. \tag{17.5}$$

Razmotrimo sada ciklus događaja u toku jednog sinodičkog perioda. U položaju unutrašnje konjunkcije, imamo formalne rezultate da je elongacija jednaka nuli i da je fazni ugao 180°. Planetu je nemoguće posmatrati u ovo vreme iz dva razloga—njena neosvetljena hemisfera je okrenuta ka Zemlji i suviše je blizu Suncu za efektivna posmatranja. Planetska elongacija tada raste sa pomeranjem planete zapadno od Sunca. Tada se planeta može posmatrati kao „jutarnja zvezda". Planeta dostiže maksimalnu elongaciju, u tački P_2, gde linija Zemlja-planeta leži tangentno na putanju planete. Stoga, imamo $SP_2E = 90°$. Rešenje trougla SP_2E je, zbog toga, vrlo jednostavno. Fazni ugao, elongacija i vremenski interval od unutrašnje konjunkcije, koji odgovaraju položaju P_2, su

$$\phi = 90^\circ, \qquad E = \arcsin a, \qquad t = \frac{S}{2\pi} \arccos a, \tag{17.6}$$

gde je a radijus putanje planete dat u astronomskim jedinicama. Prolazeći kroz maksimalnu zapadnu elongaciju planeta prilazi Suncu ponovo i dostiže spoljašnju konjunkciju posle polovine sinodičkog perioda. Posle toga ponovo se pojavljuje na istočnim elongacijama što daje mogućnost posmatranja uveče neposredno posle zalaska Sunca. Maksimalna istočna elongacija se postiže u tački P_4, posle čega se planeta kreće nazad ka Suncu odnosno ka novoj unutrašnjoj konjunkciji.

Pretpostavimo da je P položaj planete u proizvoljnom trenutku vremena t posle unutrašnje konjunkcije. Tada je u kružnoj koplanarnoj aproksimaciji $\theta = (n_P - n_E)t$. Sinusni obrazac primenjen na trougao SPE daje

$$\sin E = a \sin \phi. \tag{17.7}$$

Sada je moguće eliminisati bilo elongaciju ili fazni ugao iz ovih jednačina korišćenjem činjenice da je

$$\theta + \phi + E = 180^\circ, \quad \text{tj.} \quad E + \phi = 180^\circ - n_s t, \tag{17.8}$$

gde smo uveli oznaku n_s za sinodičko srednje kretanje ($n_s = n_P - n_E$). Na primer, eliminisanjem E, (17.7) daje

$$\sin(n_s t + \phi) = a \sin \phi.$$

Razvojem leve strane ove jednačine možemo pisati

$$(\cos n_s t - a) \sin \phi + \sin n_s t \cos \phi = 0$$

ili

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin n_s t}{a - \cos n_s t}. \tag{17.9}$$

S druge strane, eliminisanjem ϕ i uključenjem E dobijamo

$$\operatorname{tg} E = \frac{a \sin n_s t}{1 - a \cos n_s t}. \tag{17.10}$$

Jednačine (17.9) i (17.10) daju približnu vremensku promenu faznog ugla i elongacije. Za precizne račune, mora se uključiti i nagib planetske putanje prema ekliptici, ekscentričnost planetske putanje, kao i ekscentričnost Zemljine putanje. Ovi efekti su posebno važni za planetu Merkur. Tačne vrednosti uglova ϕ i E moraju biti izvedene iz jednačina (17.2) i (17.3).

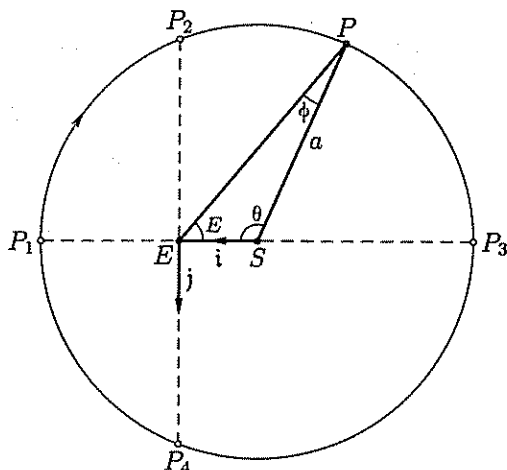
§ 17.2. Prividno kretanje spoljašnje planete.

Prilično drugačije pojave se javljaju kod spoljašnje planete. Mogući međusobni položaji koje planeta može da zauzima u odnosu na Zemlju i Sunce predstavljeni su na sl. 17.3. Ponovo ćemo na toj slici smatrati da je linija Zemlja-Sunce nepokretna. Kako Zemljino srednje kretanje ovaj put prelazi srednje kretanje planete, planeta se kreće u pravcu prikazanom na slici u odnosu na liniju Zemlja-Sunce. Pod pretpostavkom o kružnim koplanarnim putanjama, relativno kretanje P biće sa konstantnom ugaonom brzinom $(n_E - n_P)$. Sinodički period je, stoga, dat sa

$$S^{-1} = T_E^{-1} - T_P^{-1}. \tag{17.11}$$

U toku jednog sinodičkog perioda, elongacija planete u odnosu na Sunce uključivaće sve vrednosti između 0 i 180°, dok časovni ugao ima ograničen interval.

Kada se planeta nalazi u tački P_1, kaže se da se nalazi u *opoziciji*. Tada je moguće posmatrati tu planetu u toku noći. Obrnuto, planeta ne može biti posmatrana kada se nalazi u položaju P_3, koji se zove (gornja) konjunkcija. Bilo da se nalazi u položajima P_2 ili P_4, kada je elongacija 90°, kaže se da se planeta nalazi u položajima *kvadrature*. U ovim tačkama fazni ugao dostiže svoje maksimalne vrednosti. ❄



Konfiguracija u slučaju spoljašnje planete.
СЛИКА 17.3

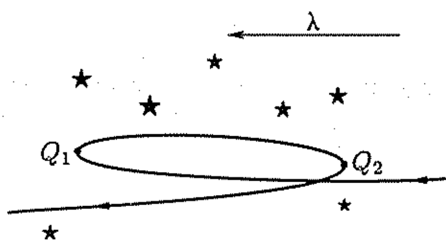
Iako su geocentrične konfiguracije spoljašnjih planeta prilično različite od istih konfiguracija unutrašnjih planeta, postoji tesna matematička veza između njih. Na kraju, razmatra se potpuno isti matematički problem, samo su uloge dveju planeta zamenjene. Sa tačke gledišta planete, fazni ugao ϕ je upravo Zemljina elongacija u odnosu na Sunce, a ugao E bi bio fazni ugao Zemlje. U stvari, formule koje dobijamo posle kvadrature su

$$\begin{aligned} \phi &= \arcsin \frac{1}{a} \\ E &= 90^\circ \\ t &= \frac{S}{2\pi} \arccos \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

Kao i pre, ove formule su vrlo približne, a precizna vrednost faznog ugla i elongacije planete treba da bude izračunata iz formula (17.2) i (17.3).

§ 17.3. Staciji.

Sve planete se kreću u direktnom smeru oko Sunca; njihove heliocentrične, ekliptične longitude monotono rastu. Ovo, međutim, ne važi za njihove prividne, geocentrične longitude. U toku jednog dela sinodičkog perioda, složeno kretanje koje nastaje kao rezultat planetinog i Zemljinog kretanja na njihovim putanjama, postaje prividno retrogradno. Rezultujuće kratanje je još uvek direktno, ali u okolini opozicije spoljašnja planeta opisuje „petlju" u odnosu na zvezdanu pozadinu, kao što je prikazano na sl. 17.4. Dve tačke, Q_1 i Q_2, u kojima planetino prividno kretanje u longitudi menja znak, poznate su kao *staciji*. Postoje slični staciji i u kretanju unutrašnjih planeta.



Staciji u prividnom kretanju planete.
СЛИКА 17.4

Neka $\mathfrak{s}$ jedinični vektor definisan u (17.1) određuje pravac ka planeti. Dalje, neka je $\mathfrak{k}$ jedinični vektor normalan na ravan ekliptike. Sada je smisao planetskog kretanja—revolucije, dat na nebeskoj sveri vektorom $\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}}$. Ovo kretanje će biti u direktnom smeru sve dok je

$$(\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}}) \cdot \mathfrak{k} = [\mathfrak{s}, \dot{\mathfrak{s}}, \mathfrak{k}] > 0. \tag{17.13}$$

Diferenciranjem (17.1) dobijamo

$$\dot{\rho}\mathfrak{s} + \rho\dot{\mathfrak{s}} = \dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}.$$

Množeći vektorski ovu relaciju sa (17.1) dobićemo

$$\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}} = \frac{1}{\rho^2}(\mathfrak{r} - \mathfrak{R}) \times (\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}). \tag{17.14}$$

Stoga se uslov za stacij preuzet iz (17.13) i (17.14), može napisati u obliku

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{R}, \dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}, \mathfrak{k}] = 0. \tag{17.15}$$

Treba da ispitamo okolnosti vezane za stacij spoljašnje planete, koristeći se aproksimacijom kružne koplanarne putanje razvijene u prethodna dva paragrafa. Posebno će biti korisna analiza iz §17.2. Neka su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$, redom, jedinični vektori u pravcu Sunce-Zemlja i u pravcu normalnom na taj pravac u ravni ekliptike. Ovi vektori su paralelni sa pravcima SE i EP_4 sa sl. 17.3, tako da sa vektorom $\mathfrak{k}$ oni grade desni trijedar osa. Tada se sa slike lako uočava da je

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{R} = (a\cos\theta - 1)\mathfrak{i} - a\sin\theta\mathfrak{j}. \tag{17.16}$$

Dva vektora $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ nisu konstantni vektori, pa se može pisati da je

$$\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}} = (a\cos\theta - 1)\frac{d\mathfrak{i}}{dt} - a\sin\theta\frac{d\mathfrak{j}}{dt} - a\frac{d\theta}{dt}(\sin\theta\mathfrak{i} + \cos\theta\mathfrak{j}). \tag{17.17}$$

Sada ugao θ na sl. 17.3 predstavlja zapravo ugao $(n_E - n_P)t$, gde je t vreme mereno od trenutka opozicije. U stvari, ceo dijagram rotira sa ugaonom brzinom n_E, što se može izraziti jednačinama

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} &= n_E\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = n_E\mathfrak{j} \\ \frac{d\mathfrak{j}}{dt} &= n_E\mathfrak{k} \times \mathfrak{j} = -n_E\mathfrak{i}. \end{aligned} \tag{17.18}$$

Zbog toga se jednačina (17.17) može napisati u obliku

$$\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}} = an_P\sin\theta\mathfrak{i} + (an_P\cos\theta - n_E)\mathfrak{j}. \tag{17.19}$$

Kombinujući ovu jednačinu sa jednačinom (17.16) dobijamo

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{R}, \dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}, \mathfrak{k}] = (a^2 n_P + n_E) - a(n_E + n_P)\cos\theta. \tag{17.20}$$

Uslov za stacij, jednačina (17.15), može biti napisan u obliku

$$\cos\theta = \frac{a^2 n_P + n_E}{a(n_E + n_P)}. \tag{17.21}$$

S obzirom da je θ direktno proporcionalno vremenu, ovaj uslov, takođe, određuje i vremena prolaza kroz stacij. Uslov za stacij može biti izražen i preko velike poluose putanje planete. Zanemarujući masu planete i masu Zemlje u poređenju sa masom Sunca $M_\odot$, dobijamo

$$n_P^2 a^3 = GM_\odot = n_E^2.$$

Jednačina (17.21) se, stoga, svodi na uslov da je

$$\cos\theta = \frac{a^{1/2} + 1}{a + a^{-1/2}}. \tag{17.22}$$

Odgovarajuća elongacija planete se nalazi lako, posle izvesnog svođenja, kao

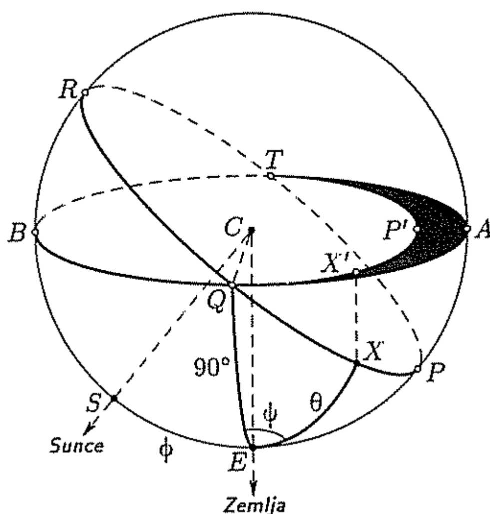
$$\operatorname{tg} E = \pm \frac{a}{(a+1)^{1/2}}. \tag{17.23}$$

Tražene vrednosti E nalaze se u drugom i trećem kvadrantu.

Detalji u vezi sa rešenjem izvedenim ovde zavise od aproksimacija koje su učinjene u vezi sa putanjama planeta. Precizna određivanja stacija moraju da uključe iterativni postupak rešavanja jednačine (17.15), što daje tačno rešenje.

§ **17.4. Faze planeta.** Planeta predstavlja disk koji je za posmatrača sa Zemlje delimično osvetljen. Smatrajući da je planeta sfera pojednostavićemo razmatranje, iako neke planete, a posebno Jupiter, Saturn i Mars, odstupaju uočljivo od tog oblika, to za njih moraju biti uvedene izvesne korekcije u analizi. Pogodno je raditi u jedinicama radijusa planete, tako da se metode sferne geometrije mogu upotrebljavati bez komplikacija.

Neka je C središte planete (sl. 17.5) i pretpostavimo da pravci iz C ka Suncu i Zemlji seku površinu planete u tačkama S i E. Tada je S tačka najbliža Suncu, a E najbliža Zemlji. Ugao SE je fazni ugao ϕ. Tačka S je centralna tačka osvetljene površine koja je ograničena velikim krugom $PQRT$ čiji je pol tačka S. Neka $AQBT$ bude veliki krug čiji je pol tačka E. Kako je ova ravan upravna na pravac posmatranja, ona može biti smatrana za ravan planetinog diska. Dalje, osvetljeni deo diska je ograničen krivom $QP'T$ koja je projekcija velikog kruga QPT. Osenčena površina na sl. 17.5 nije vidljiva. Veliki krug QPT, ili ponekad njegova projekcija na disk, zove se *geometrijski terminator*.



Слика 17.5

Pretpostavimo sada da je X proizvoljna tačka na geometrijskom terminatoru koja se projektuje u tačku X' na disku. Označimo sferni luk EX sa θ, a sferni ugao QEX sa ψ. Sada imamo da je $EQX = 90° - \phi$ i $QE = 90°$. Primenom osnovnih obrazaca sferne trigonometrije dobija se

$$\operatorname{ctg}\theta - \sin\psi \operatorname{tg}\phi = 0$$

tj.

$$\operatorname{tg}\phi \sin\theta \sin\psi = \cos\theta. \tag{17.24}$$

Uvedimo sada pravougli koordinatni sistem (x, y, z) sa koordinatnim početkom u tački C i sa osama u pravcima CQ, CA i CE. Tada su koordinate tačke X date formulama

$$x = \sin\theta\cos\psi$$
$$y = \sin\theta\sin\psi \qquad (17.25)$$
$$z = \cos\theta.$$

Jednačina (17.24), stoga, može biti napisana u obliku

$$y\,\mathrm{tg}\,\phi = z = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/2}.$$

Svaka tačka na geometrijskom terminatoru zadovoljava jednačinu

$$x^2 + y^2\,\mathrm{sc}^2\,\phi = 1. \qquad (17.26)$$

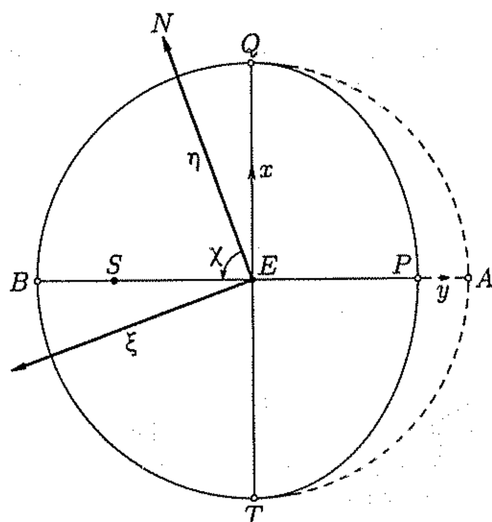
Razmotrimo sada pojavljivanje planetinog diska. Ovo je prikazano na sl. 17.6 korišćenjem istih oznaka kao na prethodnoj slici. Faza planete Φ definisana je kao deo diska planete koji je osvetljen. Površina celog diska, izražena u jedinicama planetskog radijusa je π. Osvetljena površina se sastoji od polukruga QTB, površine $\frac{1}{2}\pi$, i površine QTP. Iz (17.26), ovo je polovina elipse sa velikom poluosom jednakoj jedinici i malom poluosom jednakoj $\cos\phi$. Njena površina iznosi $\frac{1}{2}\pi\cos\phi$, tako da je faza planete data sa

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos\phi). \qquad (17.27)$$

Neka, sada, D bude ugaoni prečnik QT planete, izražen u lučnim sekundama. Ugaono rastojanje PA često se naziva *defekt iluminacije*. Ova veličina, u oznaci q, data je sa

$$q = \frac{1}{2}D(1 - \cos\phi). \qquad (17.28)$$

Neka je EN pravac ka severu u ravni normalnoj na pravac posmatranja. Označićemo ugao NES sa χ, što je zapravo položajni ugao takozvane subsolarne tačke, koji se ponekad zove *položajni ugao sjajnog limba*. Označimo sa d ugaono rastojanje ES. Tada parametri (d, χ) daju na pogodan način položaj subsolarne tačke na disku, pa samim tim i pojavu planete. Kao što je indicirano na sl. 17.6, položajni ugao χ se meri od pravca ka severu, suprotno smeru kazaljke na satu za položaj posmatrača.



СЛИКА 17.6

Tačka S ima koordinate $x = 0$, $y = -\sin\phi$, pa je ugaono rastojanje ES dato sa

$$d = \frac{1}{2}D\sin\phi. \qquad (17.29)$$

Ova konvencija je prihvaćena u *Astronomical Almanacu* pri tabličenju d, koje je negativno za $\phi > 90°$, što treba da ukaže da je s tačka na neosvetljenoj hemisferi.

Neka su sada (α, δ) planetska rektascensija i deklinacija. One se mere isključivo u odnosu na tačku E. Pretpostavimo da (ξ, η) predstavljaju standardne koordinate, u odnosu na tangentnu tačku E. Tada EN predstavlja η-osu. Ako $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ predstavljaju rektascenziju i deklinaciju Sunca, tada, iz jednačine (13.12), standardne koordinate se mogu napisati u obliku

$$\xi_\odot = \frac{\cos\delta_\odot \sin(\alpha_\odot - \alpha)}{\sin\delta\sin\delta_\odot + \cos\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha_\odot - \alpha)},$$
$$\eta_\odot = \frac{\cos\delta\sin\delta_\odot - \sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha_\odot - \alpha)}{\sin\delta\sin\delta_\odot + \cos\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha_\odot - \alpha)}. \qquad (17.30)$$

Sunce nije blizu tački E, ali formula (17.30) jeste tačna. Dalje, prava linija ESB je projekcija planetskog radijus vektora na tangentnu ravan sa koordinatnim početkom u E. Odatle sledi da se položajni ugao subpolarne tačke može dobiti iz

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\xi_\odot}{\eta_\odot} = \frac{\cos\delta_\odot\sin(\alpha_\odot - \alpha)}{\cos\delta\sin\delta_\odot - \sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha_\odot - \alpha)}. \qquad (17.31)$$

Dvosmislenost u (17.31) se lako otklanja; χ je u prva dva kvadranta kada je brojilac pozitivan.

Faza planete je jedan od važnih faktora koji utiče na njen prividni sjaj. Drugi važan faktor je njeno geocentrično rastojanje. Posebno za unutrašnje planete, oba faktora se prilično menjaju. Tvrđenje da je sjaj planete direktno proporcionalan fazi, a obrnuto proporcionalan kvadratu rastojanja, može biti korektno, ali ne i kompletno. Osvetljenost planete Suncem menjaće se obrnuto proporcionalno sa kvadratom heliocentričnog rastojanja, dok se reflektivnost planetske površine, takođe, menja sa pravcem, što znatno komplikuje model. Jednostavna formula koja zanemaruje poslednju činjenicu daje prihvatljivu grešku (Harris, 1961).

Za spoljašnje planete, u blizini položaja opozicije sjaj je maksimalan, kada je faza maksimalna, a geocentrično rastojanje najmanje. Situacija je mnogo komplikovanija u slučaju unutrašnje planete, jer je njeno rastojanje najmanje u položaju donje konjunkcije kada je faza jednaka nuli. Nađeno je da Merkur najveći sjaj dostiže u okolini gornje konjunkcije. Na drugoj strani, Venera ima dva jasna maksimuma koji se pojavljuju između donje konjunkcije i njenih najvećih elongacija. Pojednostavljena predstava o Venerinom promenljivom sjaju stiče se proučavanjem zadatka 17.4.

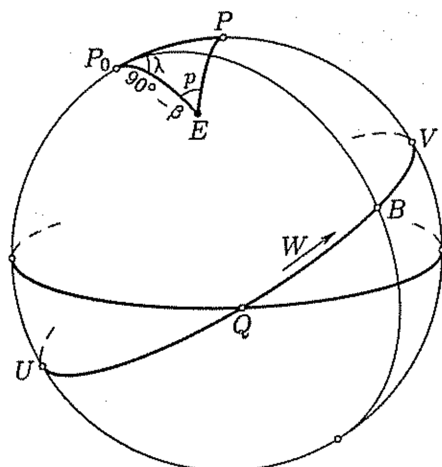
§ 17.5. Planetografske koordinate.

17.5. Planetografske koordinate. Ekliptika je pogodna referentna ravan za posmatranje planetskog kretanja, iako je ona posebno vezana za Zemlju, i nije osnovna ravan za planetski sistem kao celinu. Dalje, ona se lagano pomera zbog planetske precesije. Dinamički mnogo značajnija ravan je *invarijabilna ravan* planetskog sistema. Ova ravan je definisana kao ravan koja sadrži baricentar i normalna je na vektor ugaonog momenta celog planetskog sistema. Kako je ovaj vektor integral kretanja—dakle konstantan vektor—ta ravan opravdava svoje ime. Ekliptika odstupa nekoliko stepeni od invarijabilne ravni, a usled planetske precesije ona osciluje oko te ravni sa veoma dugim periodom.

Za razliku od kretanja na putanji, osna rotacija planeta može biti direktna ili retrogradna. Ovo je uzeto u obzir pri definisanju koordinatnog sistema na njenoj

površini. Kako većina planeta ima direktnu rotaciju—Venera i Uran su izuzeci—ovaj efekt će biti izučavan posebno, a prikazan je na sl 17.7.

Pretpostavimo da je P_0 severni pol planete. To je pol koji je severno od invarijabilne ravni. Rotacija je direktna ako je u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu, posmatrano sa severnog pola. U prvoj aproksimaciji možemo smatrati da je osa rotacije nepomična u prostoru Kao i Zemljina osa, ta osa ima precesiono kretanje, ali tamo gde su ovi efekti nađeni pokazalo se da su znatno manji u kvantitativnom iznosu od sličnih efekata u slučaju Zemlje. Neka su (α_0, δ_0) rektascenzija i deklinacija pola P_0 na nebeskoj sferi u odnosu na srednji ekvator i ekvinokcij tog datuma. Tada, ako je P nebeski pol, $PP_0 = 90° - \delta_0$.



Planetografska longituda i latituda (λ, β).

Слика 17.7

Neka UQV na sl. 17.7 bude ekvator planete. Tačka Q je uzlazni čvor planetinog ekvatora na nebeskom ekvatoru. Sistem planetografske latitude i longitude (β, λ) može se definisati ako se za pol koordinatnog sistema uzme P_0, ali prethodno treba izabrati početni meridijan za merenje longitude. Pri tom izboru mora biti uključen izvestan stepen proizvoljnosti. Neka P_0B na sl. 17.7 predstavlja taj početni meridijan, gde je B njegov presek sa ekvatorom planete. Označićemo luk QB sa W. Taj se ugao zove *argument početnog meridijana*.

Sistem planetografskih koordinata definisan je vrednostima (α_0, δ_0) i W. Pretpostavljeno je da početni meridijan rotira jednoliko. Za direktnu rotaciju W raste sa vremenom; a opada ako je planetska rotacija retrogradna. IAU preporučuje vrednosti (α_0, δ_0) i W, dajući ovaj poslednji ugao za epohu J2000,0, kao i njegovu promenu. *Astronomical Almanac* obezbeđuje vrednosti koje se odnose na srednji ekvator i ekvinokcij u obliku

$$W = W_0 + \dot{W}d, \tag{17.32}$$

gde je W_0 vrednost za početak godine, a d je broj dana protekao od početne epohe.

Pretpostavimo sada da je E proizvoljna tačka na površini planete. Tada su njene planetografske koordinate date sa

$$\begin{aligned} \beta &= 90° - P_0E \\ \lambda &= BP_0E. \end{aligned} \tag{17.33}$$

Po konvenciji, longituda se meri od 0° do 360° u smeru suprotnom od rotacije planete.

Neka se sada subterestialna* tačka i E poklapaju. Planetocentrična rektascenzija i deklinacija (α_E, δ_E) su tada date sa

* Subterestialna tačka je tačka najbliža Zemlji.

$$\begin{aligned}\alpha_E &= \alpha + 12^{\mathrm{h}} \\ \delta_E &= -\delta,\end{aligned} \tag{17.34}$$

gde su (α, δ) geocentrične koordinate planete. Sada možemo uočiti sledeće uglove u sfernom trouglu P_0PE: $PP_0 = 90^\circ - \delta$, $PE = 90^\circ + \delta$, $P_0E = 90^\circ - \beta$, $P_0\hat{P}E = 180^\circ + (\alpha - \alpha_0)$ i $P\hat{P}_0E = 90^\circ - W + \lambda$. Poslednja od ovih relacija pretpostavlja da je rotacija direktna. U slučaju retrogradne rotacije treba promeniti znak za λ.

Planetografske koordinate tačke E sada se mogu dobiti rešavanjem sfernog trougla P_0PE. Uz pomoć sinusnog, kosinusnog i sinusno-kosinusnog obrasca dobijaju se sledeći rezultati

$$\begin{aligned}\sin\beta &= -\sin\delta_0\sin\delta - \cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_0) \\ \cos\beta\cos(W - \lambda) &= -\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_0) \\ \cos\beta\sin(W - \lambda) &= \cos\delta\sin\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) - \sin\delta\cos\delta_0.\end{aligned} \tag{17.35}$$

Prva od ovih jednačina jednoznačno daje latitudu tačke E. Ostale dve jednačine su potrebne za određivanje vrednosti $(W - \lambda)$ i kvadranta u kome se taj ugao nalazi. Kako je $\cos\beta > 0$, možemo ih prepisati u obliku

$$\lambda = W \mp \arccos\left[\cos\delta\sin(\alpha_0 - \alpha)\sec\beta\right], \tag{17.36}$$

gde su apsolutni iznosi poznati, a znak se određuje u skladu sa

$$\cos\delta\sin\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) - \sin\delta\cos\delta_0 \gtrless 0. \tag{17.37}$$

Kada je rotacija retrogradna, treba umesto λ koristiti $-\lambda$.

Planetografska latituda i longituda subsolarne* tačke može se odrediti na isti način. Potrebno je samo zameniti geocentričnu rektascenziju i deklinaciju sa odgovarajućim heliocentričnim koordinatama.

Tačka E je središte planetskog diska i zbog toga je prirodna referentna tačka za posmatranja planeta. Severni planetski pol ugaono odstupa od E za $90^\circ - \beta$ na njenoj površini. Ovaj luk se projektuje u duž d na disku datom sa

$$d = \frac{1}{2}D\cos\beta, \tag{17.38}$$

gde je D ugaoni prečnik planete. Pogodno je smatrati d negativnim kada pol leži na skrivenoj hemisferi.

Da bi kompletirali određivanje položaja pola na disku, razmotrimo položajni ugao p. To je neupotrebljeni element sfernog trougla P_0PE, naime to je sferni ugao P_0EP. Sinusno-kosinusni obrazac primenjen na ovaj trougao daje

$$\sin\delta\cos(\alpha - \alpha_0) = \cos\delta\,\mathrm{tg}\,\delta_0 + \sin(\alpha - \alpha_0)\,\mathrm{ctg}\,p,$$

tj.

$$\mathrm{ctg}\,p = \cos\delta\,\mathrm{tg}\,\delta_0\csc(\alpha_0 - \alpha) - \sin\delta\,\mathrm{ctg}(\alpha_0 - \alpha). \tag{17.39}$$

Položajni ugao se nalazi u prva dva kvadranta kada je $0 < \alpha_0 - \alpha < 180^\circ$.

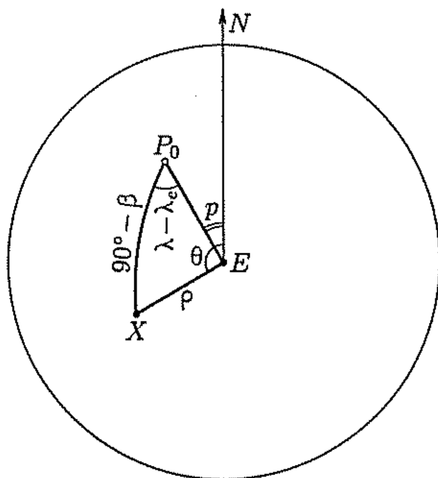
Koncept planetografskih koordinata može se primeniti i na satelite. Određivanje ose rotacije je obično manje precizno i najčešće se čini *ad hoc* pretpostavka da je osa rotacije upravna na putanjsku ravan. Ista pretpostavka se čini za planetu

* Subsolarna tačka je tačka najbliža Suncu.

Merkur, tako da njegova subsolarna tačka ima automatski planetografsku latitudu jednaku nuli. Velike planete, Jupiter i Saturn, ne rotiraju čak ni približno kao čvrsta tela i za njih se može definisati nekoliko različitih sistema za longitudu. Sistem I se primenjuje na ono što se vidi u ekvatorskoj zoni planeta. Sistem II, koji se definiše samo za Jupiter, odgovara ponovo nekim optičkim karakteristikama, ali se koristi na višim latitudama. S druge strane, sistem III je određen periodičnostima u radio emisiji dve planete i odgovara rotaciji njihovih magnetnih polja. Odvojen izraz oblika jednačine (17.32) je neophodan da dâ vrednost W u svakom sistemu longitude. Detaljne formule se mogu naći u *Astronomical Almanacu*.

§ **17.6. Planetografske koordinate tačke na disku.** Slika 17.8 predstavlja planetu kako se vidi sa Zemlje. Tačka E je tačka najbliža Zemlji, a EN predstavlja nulti položajni ugao. Položaj tačke X na disku planete može biti izražen preko merenih veličina (d, θ), ugaonog rastojanja od centra diska i ugla $N\hat{E}X$, redom. Sada ćemo razmotriti kako se ove neposredno merene veličine mogu prevesti u planetografsku latitudu i longitudu.

Lokacija severnog pola planete P_0 na prividnom disku mora biti određena i sa njim je određena longituda centralnog meridijana. Prvi korak je da se odredi vrednost W—argument početnog meridijana. Međutim, ovaj račun mora biti sproveden, ne za trenutak t, tj. stvarno vreme posmatranja, nego za trenutak $t-\tau$, gde je τ vreme putovanja svetlosti.



СЛИКА 17.8

Ova korekcija je neophodna, posebno za brzo rotirajuće planete. Ako je vrednost W jednom poznata, metod iz prethodnog paragrafa se može primeniti za određivanje planetografske latitude i longitude subterestialne tačke E, (β_e, λ_e), kao i položajnog ugla p severnog pola planete.

Neka su (λ, β) planetografska longituda i latituda tačke X. Tada u sfernom trouglu P_0XE na površini planete imamo da je $P_0X = 90° - \beta$ i $XP_0E = \lambda - \lambda_e$. Dalje su, $P_0E = 90° - \beta_e$ i $P_0\hat{E}X = \theta - p$, poznati. Ugaono rastojanje d je lako izraziti preko ugla ρ na površini planete. U stvari je

$$\rho = \arcsin\frac{2d}{D}, \tag{17.40}$$

gde je D prividni ugaoni prečnik planete.

Sada primenjujemo kosinusni obrazac na sferni trougao PXE i dobijamo

$$\sin\beta = \sin\beta_e\cos\rho + \cos\beta_e\sin\rho\cos(\theta - p). \tag{17.41}$$

Ova formula određuje latitudu tačke X, dok longituda može biti određena iz sinusno-kosinusnog obrasca, koji daje

$$\cos\beta\cos(\lambda - \lambda_e) = \cos\rho\cos\beta_e - \sin\rho\sin\beta_e\cos(\theta - p). \qquad (17.42)$$

Određivanje λ nije jednoznačno, jer se izvodi pomoću inverznog kosinusa. Ovaj problem može biti rešen pomoću sinusnog obrasca

$$\cos\beta\sin(\lambda - \lambda_e) = \pm\sin\rho\sin(\theta - p). \qquad (17.43)$$

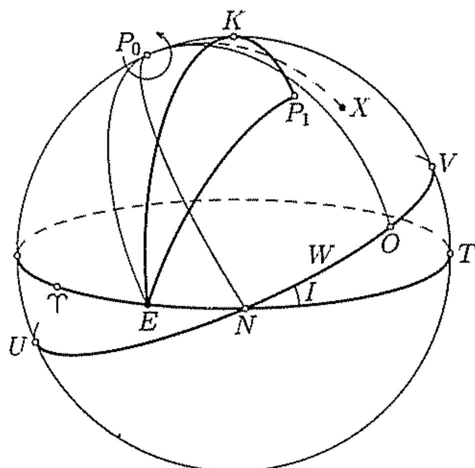
U skladu sa konvencijom za merenje longitude, znak plus se uzima u slučaju direktne, a znak minus za slučaj retrogradne rotacije.

§ **17.7. Heliografske koordinate.** Osnovne ideje iz prethodna dva paragrafa mogu biti primenjene za definisanje koordinatnih sistema na Suncu i Mesecu. Postoje, ipak, neke razlike u konvencijama, pa su korisna odvojena razmatranja. Rotacija Sunca je očigledna iz prividnog kretanja pega preko Sunčevog diska. Iz takvih posmatranja mogu se odrediti položaji ose rotacije i Sunčevog ekvatora. Poznato je, međutim, da ugaona brzina rotacije Sunca opada značajno sa latitudom. Prihvaćen sistem za longitude je proizvoljan i odgovara srednjoj rotaciji u ekvatorskim regionima.

Slika 17.9 predstavlja heliocentričnu nebesku sferu; tačka K je pol ekliptike, a P_0 je pol ose Sunčeve rotacije. Veliki krug UNV je Sunčev ekvator, N je njegov uzlazni čvor na ekliptici—Sunčeva rotacija je direktna.

Osa rotacije, ili što je ekvivalentno Sunčev ekvator, definisan je uz pomoć dva parametra I i Ω. Ovi uglovi su nagib ekvatora ka ekliptici i longituda uzlaznog čvora N, redom. Prihvaćene vrednosti su

$$I = 7°15' \qquad (17.44)$$
$$\Omega = 73°40' + 50'',25(t - 1850{,}0),$$



Heliografske koordinate.
Слика 17.9

gde je t vreme izraženo u godinama. Kao što druga od ovih jednačina ukazuje, ovaj sistem se koristi više od 100 godina. Promene u Ω se javljaju zbog precesije, a sekularne promene ekliptike se zanemaruju. Početni meridijan je predstavljen sa P_0O; pretpostavlja se da tačka O gde se seku prvi meridijan i ekvator rotira sa sideričkim periodom od 25,38 dana. Ova reperna tačka je prvobitno izabrana tako da se poklapala sa čvorom dana 1. januar 1854 u 12^h UT (JD 2 398 220,0). Položaj tačke O je dat lukom NO, označenim sa W, koji je dat sa

$$W = \frac{360°}{25{,}38}(\mathrm{JD} - 2\,398\,220{,}0). \qquad (17.45)$$

Pretpostavimo sada da je X proizvoljna tačka na Sunčevoj površini. Njene heliografske koordinate su date sa

$$B = 90° - P_0X, \qquad L = OP_0X. \tag{17.46}$$

Treba primetiti da heliografska longituda raste u smeru Sunčeve rotacije—konvencija obrnuta onoj prihvaćenoj za planetografsku longitudu. Heliografska longituda čvora je $360° - W$.

Neka je E centar prividnog Sunčevog diska, ili subterestialna tačka iz prethodnog teksta. Ova tačka leži na ekliptici i ima longitudu $\lambda_\odot - 180°$, gde je $\lambda_\odot$ geocentrična longituda Sunca. Imamo, dakle, da je $EN = \Omega - \lambda_\odot + 180°$. Pretpostavimo da su (L_0, B_0) heliografske koordinate centra diska. Tada je $P_0E = 90° - B_0$ i $E\hat{P}_0N = 360° - W - L_0$. Možemo odrediti druga dva elementa sfernog trougla P_0NE, i to $P_0\hat{N}E = 90° - I$ i $P_0N = 90°$. Primenjujući kosinusni, sinusni i sinusno-kosinusni obrazac na ovaj trougao, dobijamo sledeći rezultat

$$\begin{aligned} \sin B_0 &= \sin(\lambda_\odot - \Omega)\sin I \\ \cos B_0 \sin(L_0 + W) &= \cos I \sin(\Omega - \lambda_\odot) \\ \cos B_0 \cos(L_0 + W) &= -\cos(\Omega - \lambda_\odot). \end{aligned} \tag{17.47}$$

Ove jednačine su dovoljne da odredimo (L_0, B_0) za bilo koji trenutak, kada je jednom W poznato iz (17.45).

Vrednosti (L_0, B_0) su utabličene za svaki dan u *Astronomical Almanacu*, zajedno sa položajnim uglom P ose rotacije. Ako tačka P_1 sa sl. 17.9 predstavlja nebeski pol, onda se položajni ugao može računati kao zbir dva ugla

$$P = P_1EK + KEP_0. \tag{17.48}$$

Ova dva ugla se moraju izvesti odvojeno.

Razmotrimo, prvo, sferni trougao KP_1E, u kome je $KE = 90°$ i $KP_1 = \varepsilon$, što predstavlja nagib ekliptike. Sferni ugao $E\hat{K}P_1$ je ekliptička longituda tačke P_1 minus ekliptička longituda tačke E. Tako imamo da je $E\hat{K}P_1 = 90° - (\lambda_\odot - 180°) = 270° - \lambda_\odot$. Primenom četvoroelementnog obrasca na ovaj sferni trougao dobijamo

$$\operatorname{tg} P_1EK = -\cos\lambda_\odot \operatorname{tg}\varepsilon. \tag{17.49}$$

Razmotrimo, dalje, sferni trougao KEP_0. Ponovo imamo $KE = 90°$, dok je $P_0K = I$. Tačka P_0 ima ekliptičku longitudu $\Omega - 90°$, pa nalazimo $P_0\hat{K}E = \lambda_\odot - 180° - (\Omega - 90°) = \lambda_\odot - \Omega - 90°$. Primenom četvoroelementnog obrasca na sferni trougao KEP_0 dobijamo rezultat

$$\operatorname{tg} KEP_0 = -\operatorname{tg} I \cos(\Omega - \lambda_\odot). \tag{17.50}$$

Sada je položajni ugao ose rotacije dat sa

$$P = -\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg} I \cos(\Omega - \lambda_\odot)\right] - \operatorname{arctg}(\cos\lambda_\odot \operatorname{tg}\varepsilon). \tag{17.51}$$

U praktičnom korišćenju ove formule nema dvosmislenosti, jer su ova dva inverzna tangensa ograničena, redom, na intervale $(-I, I)$ i $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

§ 17.8. Heliografske koordinate pega.

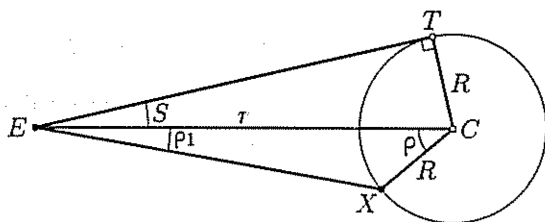
Ugaoni poluprečnik S lagano se menja u toku godine sa promenom rastojanja do Sunca. Procenat te promene je manji nego za planete, ali s obzirom da je Sunčev disk znatno veći, mora se izvršiti izvesna modifikacija kada se razmatraju ugaona merenja. Nije dovoljno smatrati Sunčev disk ravnim.

Na sl. 17.10, tačka C je heliocentar, a E predstavlja Zemlju. Ravan slike je definisana sa tačkama E, C i X, gde je X neka tačka na površi, na primer pega. Neka je R poluprečnik Sunca i neka je r rastojanje EC. Neka sada jedna od tangenata, u ravni dijagrama, koja prolazi kroz E, dodiruje površ u tački T. Ugao TEC je Sunčev ugaoni poluprečnik, i on je, s obzirom na činjenicu da je $E\hat{T}C = 90°$, dat formulom

$$\sin S = R/r. \tag{17.52}$$

Pretpostavimo sada da je pega X posmatrana na ugaonom rastojanju ρ_1 od centra diska. Neka je ρ njeno heliocentrično ugaono rastojanje od tačke najbliže Zemlji. Tada u trouglu ECX imamo sledeće relacije $EC = r$, $CX = R$, $C\hat{E}X = \rho_1$, $E\hat{C}X = \rho$ i stoga sledi da je $C\hat{X}E = 180° - (\rho + \rho_1)$. Koristeći se sinusnim obrascem, dobijamo

$$\sin(\rho + \rho_1) = \frac{r \sin \rho_1}{R} \simeq \frac{\rho_1}{S}. \tag{17.53}$$



Слика 17.10

Vrednost ugla ρ može biti izračunata iz ove formule, bilo u tačnoj ili približnoj formi.

Pretpostavimo da je θ položajni ugao tačke X. Heliografske koordinate (L, B) ove tačke mogu biti izražene preko tri parametra (L_0, B_0) i P razmotrenih u prethodnom paragrafu. Metod je u osnovi identičan onom kojim se izvode planetografske koordinate u §17.6, te ga nećemo ponavljati. Uz odgovarajuće izmene u označavanju, jednačine (17.41) do (17.43) zamenjuju se sledećim jednačinama

$$\begin{aligned} \sin B &= \sin B_0 \cos \rho + \cos B_0 \sin \rho \cos(P - \theta) \\ \cos B \sin(L - L_0) &= \sin \rho \sin(P - \theta) \\ \cos B \cos(L - L_0) &= \cos \rho \cos B_0 - \sin \rho \sin B_0 \cos(P - \theta). \end{aligned} \tag{17.54}$$

U skladu sa konvencijom da heliografska longituda raste u pravcu *prividnog* zapadnog Sunčevog limba, vrednost L_0 opada sa vremenom. *Sinodički* period rotacije —sa srednjom vrednošću od 27,2753 dana—odgovara opadanju L_0 za 360°. Takva sinodička rotacija opisana je *Karingtonovim rotacionim brojem*. Sinodički period počinje kada je $L_0 = 0$, a prva rotacija u ovoj seriji započela je 9. novembra 1853. Rotacioni broj odgovara posebnom Julijanskom datumu i može se izračunati iz

$$N = 1750 + \text{int}\left[\frac{\text{JD} - 2\,445\,871{,}91}{27{,}2753}\right], \tag{17.55}$$

gde int označava celobrojni deo. Rotacioni broj 1750 počinje 20,41 juna 1984.

§ 17.9. Selenografske koordinate. Sve dok smo ose rotacije planeta i Sunca smatrali nepokretnim sideričkim pravcima, bilo je moguće smatrati i da su rotacije Sunca i planeta konstantne. Ova aproksimacija se ne može učiniti i za Mesec jer je Mesečeva rotacija podložna promenama koje se javljaju na

njegovoj putanji oko Zemlje. U ovom paragrafu definisaćemo samo selenografski koordinatni sistem i dati napomene u vezi sa glavnim periodičnim fenomenom—libracijama.

Mesečeva srednja rotacija je oko ose usmerene ka tački P_0 na selenografskoj nebeskoj sferi, kao što je prikazano na sl. 17.11. Govorimo o srednjoj rotaciji zato što ta osa osciluje oko ovog srednjeg položaja, što se može uporediti sa nutacijom Zemljine ose. Ovaj efekt je mali i poznat je kao *fizička libracija*. ❋

Srednji Mesečev ekvator je prikazan na slici sa UQV gde je Q uzlazni čvor na ekliptici. Tačka P_0 nije nepokretna već se zbog precesije kreće oko pola ekliptike sa periodom od 18,6 godina. Ova precesija je povezana sa opadanjem longitude čvora Mesečeve putanje, time što je uzlazni čvor Mesečevog ekvatora Q u isto vreme i silazni čvor srednje Mesečeve putanje. Ekliptička longituda tačke Q je, stoga, $180° + \Omega$, gde je Ω longituda uzlaznog čvora Mesečeve srednje putanje. Varijacija u Ω data je jednačinom (17.7); vrednost nagiba I srednjeg ekvatora je konstantna. U stvari,

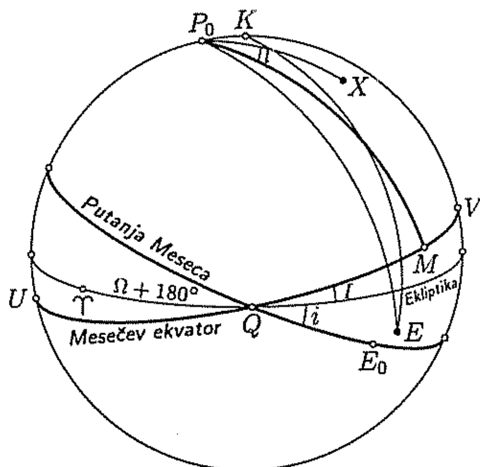
$$\begin{aligned} I &= 1°32'32'',7 \\ \Omega &= 55°,204\,723 - 0°,052\,953\,78\,d, \end{aligned} \tag{17.56}$$

gde je d broj dana proteklih od 0^h TDT 0. januar 1985.

Gotovo da nije potrebno reći da Mesec okreće stalno jednu te istu stranu ka Zemlji. Međutim, ipak je neophodno ispitati ovo tvrđenje malo preciznije. Pre svega, treba da zapazimo da Mesečeva srednja rotacija ide u direktnom smeru, i da je period ove rotacije jednak srednjem sideričkom periodu obilaska putanje. Pretpostavimo da je L' srednja geocentrična longituda Meseca. Tada na selenografskoj nebeskoj sferi možemo definisati „srednju Zemlju“ u tački E_0 sa srednjom longitudom $L' + 180°$. Stoga, sledi da je luk $QE_0 = L' - \Omega$.

❋ Definišimo sada *srednji centar diska* kao tačku M koja se pomera duž srednjeg Mesečevog ekvatora sa njegovim periodom rotacije i koja se poklapa sa E_0 u čvorovima. Tada sledi da je

$$MQ = L' - \Omega. \tag{17.57}$$



Selenografske koordinate.

СЛИКА 17.11

Tačka M je nepokretna tačka na Mesečevoj površini, a P_0E je usvojen za početni meridijan selenografske longitude. Longituda, kao heliografska longituda, raste u smeru Mesečeve rotacije. Tako imamo da su selenografska longituda i latituda (l, b) proizvoljne tačke X formalno definisane sa

$$l = MP_0X, \qquad b = 90° - P_0X. \tag{17.58}$$

Ponekad je pogodno koristiti se kolongitudom, $90° - l$, neke tačke umesto njenom longitudom. Ova praksa se primenjuje za subsolarnu tačku, dajući sledeće približne relacije

Глава Осамнаеста

Pomračenja i okultacije

§ **18.1. Klasifikacija pomračenja.** Pomračenje Sunca ili Meseca javlja se uvek kada se Sunce, Mesec i Zemlja nađu približno na istoj liniji. Ovo se može dogoditi samo kada su Mesec i Sunce u konjunkciji ili opoziciji. Ako bi Mesečeva putanja ležala tačno na ekliptici, pomračenje Sunca dogodilo bi se pri svakom mladom Mesecu, i Mesečevo pomračenje bi se dogodilo pri svakom punom Mesecu. Zbog nagiba Mesečeve putanje, to se ne događa. Dva puta mesečno Mesec se nalazi na ekliptici—kada prolazi kroz čvorove svoje putanje, pa je pomračenje moguće samo kada se mladi ili puni Mesec nalazi u okolini ovih tačaka. Sunčevo pomračenje se javlja zbog Mesečeve senke koja pada na deo Zemljine površine, tako da je Sunce barem delimično pomračeno. Kod Mesečevog pomračenja Zemljina senka pada na površinu Meseca.

Na sl. 18.1, tačke S i E predstavljaju centre Sunca i Zemlje, redom. Pretpostavićemo da su ova dva tela sfere sa radijusom $R_\odot$ i $R_\oplus$. Spoljašnje zajedničke tangente kao što je XA određuju *konus senke* sa temenom V. Za posmatrača unutar konusa senke Sunce je potpuno pomračeno. S druge strane, unutrašnje zajedničke tangente obrazuju *konus polusenke* sa temenom W. Jasno je da je u okviru konusa polusenke deo Sunčevog diska skriven, ali pomračenje nije potpuno.

Sunčev poluprečnik SA i prečnik Zemlje EX su ortogonalni na zajedničku tangentu AXV. Odatle sledi da su trouglovi EXV i SAV slični, te imamo

$$\frac{EV}{R_\oplus} = \frac{SV}{R_\odot}. \tag{18.1}$$

Označimo sada rastojanje Zemlja Sunce sa r. Tada je $SV = EV + r$, pa se jednačina (18.1) može napisati u sledećem obliku

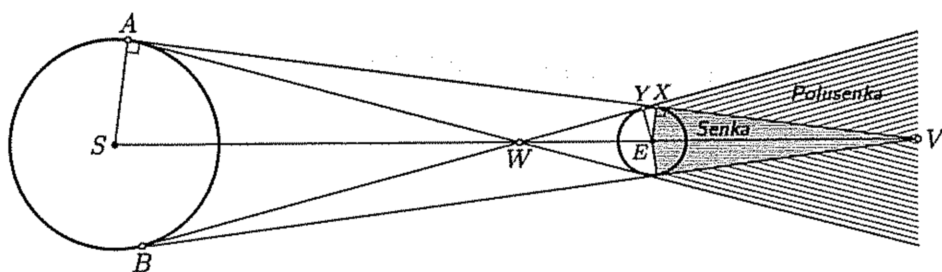
$$EV = \frac{rR_\oplus}{R_\odot - R_\oplus}. \tag{18.2}$$

Ova jednačina daje visinu konusa senke, koja varira zbog godišnje promene r, ali vrlo malo, i njena srednja vrednost iznosi $1{,}384 \cdot 10^6$ km. To je nekoliko puta veće od rastojanja Mesec-Zemlja. U stvari, ne samo da konus Zemljine senke dostiže Mesec, već je taj deo proširen tako da ga potpuno obuhvata. Stoga, moramo uočiti razliku između tri vrste pomračenja. To su

(i) *Potpuno pomračenje Meseca*, što znači da je Mesec potpuno u konusu senke. Mesec je tada vrlo nejasan, ali ne nestaje u potpunosti, jer se mali deo svetlosti prelama u Zemljinoj atmosferi ka njegovoj površini.

(ii) *Delimično pomračenje Meseca* se javlja kada je Mesec delom u konusu senke, a delom u konusu polusenke. Granična linija između ove dve oblasti se naziva terminator.

(iii) *Pomračenje Meseca konusom polusenke* znači da je Mesec ušao u konus polusenke. Tada, zapravo, ne postoji očigledna promena u Mesečevom pojavljivanju. Ovo je najčešći i najmanje značajni tip Mesečevog pomračenja. Prirodno je da fazi ovog tipa pomračenja prethodi (i sledi) bilo koje pomračenje polusenkom.



Konusi senke i polusenke.

Слика 18.1

Opšte okolnosti koje su u vezi sa Sunčevim pomračenjima mogu biti ispitane razmatranjem konusa Mesečeve senke i polusenke. Visina konusa polusenke se može izračunati iz (18.2) jednostavno zamenjivanjem Zemljinog poluprečnika Mesečevim. Srednja visina u tom slučaju iznosi $3{,}735 \cdot 10^5$ km, što je malo veće od prosečnog rastojanja Zemlja-Sunce. Mesečeva senka ne doseže uvek Zemlju, ali zbog ekscentričnosti Mesečeve putanje to se događa s vremena na vreme. Kada se to dogodi, Mesečeva senka pada samo na vrlo mali deo Zemljine površine.

Sunčeva pomračenja se mogu klasifikovati u tri vrste, u zavisnosti od prirode maksimalnog pomračenja za posmatrača u najpogodnijem položaju.

(i) *Potpuno pomračenje* znači da konus senke Meseca doseže Zemlju. Posmatrači u okviru vrlo malih oblasti videće Sunce potpuno pomračeno Mesečevim diskom.

(ii) *Prstenasto pomračenje* nastaje kada konus senke ne dopre do Zemlje, ali njegova osa prodire Zemljinu površinu. Posmatrač u centru prstena vidi potpuno pomračeno Sunce osim u jednom uskom prstenu.

(iii) *Delimično pomračenje Sunca* nastaje kada osa konusa senke ne seče Zemljinu površ ni u jednoj tački, ali se Zemlja nalazi u Mesečevom konusu polusenke.

Zahvaljujući maloj veličini oblasti preseka Mesečevog konusa senke, sa Zemljom, pojava potpunog ili prstenastog pomračenja Sunca na posebnim lokacijama je vrlo redak događaj. S druge strane, Sunčeva pomračenja, u najvećem broju, mogu se klasifikovati kao prstenasta u smislu da se ovi termini primenjuju na ograni-

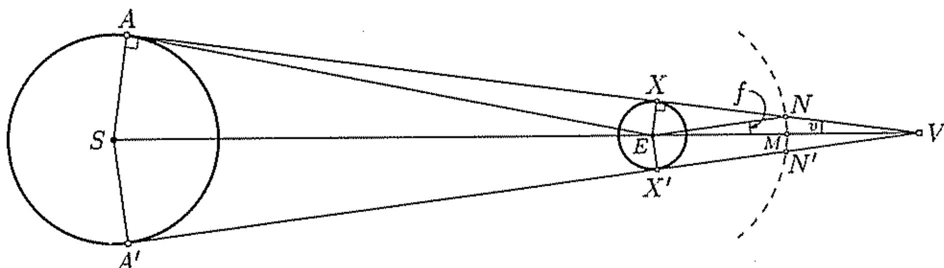
čenu oblast. Faza delimičnog pomračenja je vidljiva na značajnom delu Zemljine površine jer konus polusenke obuhvata veliki deo Zemljine površine, oko 30° u geografskoj širini.

§ 18.2. Uslovi pomračenja Meseca.

U najvećem delu ove glave, biće pogodno koristiti se sledećim oznakama:

P —ekvatorska horizontska paralaksa Sunca
P_1—ekvatorska horizontska paralaksa Meseca
S —Sunčev ugaoni poluprečnik
S_1—Mesečev ugaoni poluprečnik
r —geocentrično rastojanje Sunca
r_1 —geocentrično rastojanje Meseca. (18.3)

Razmotrimo sl. 18.2 na kojoj su AXV i $A'X'V$ dve spoljašnje zajedničke tangente i na Zemlju i na Sunce. Tačka V je teme konusa senke: neka je $v = X\hat{V}E$ ugao poluotvora tog konusa. Isprekidana kriva NMN' predstavlja Mesečevu putanju, a $f = NEM$ predstavlja geocentrični ugaoni poluprečnik konusa senke koji tražimo.



Слика 18.2

Razmotrimo ugao $X\hat{N}E$. To je ugao pod kojim se vidi Zemljin poluprečnik sa rastojanja Meseca, pa je stoga jednak uglu P_1. Dalje, kako je $X\hat{N}E$ spoljnji ugao trougla ENV, sledi da je

$$f = P_1 - v. \tag{18.4}$$

Sličan argument može se primeniti na trougao EAV. Spoljni ugao SEA je Sunčev poluprečnik S, dok je ugao EAV, ugao pod kojim se vidi Zemljin poluprečnik sa Sunca; Sunčeva geocentrična paralaksa je P. Imamo, dakle,

$$v = S - P. \tag{18.5}$$

Sada, eliminišući ugao verteksa iz jednačina (18.4) i (18.5), dobićemo ugaoni prečnik senke kao

$$f = P + P_1 - S \tag{18.6}$$

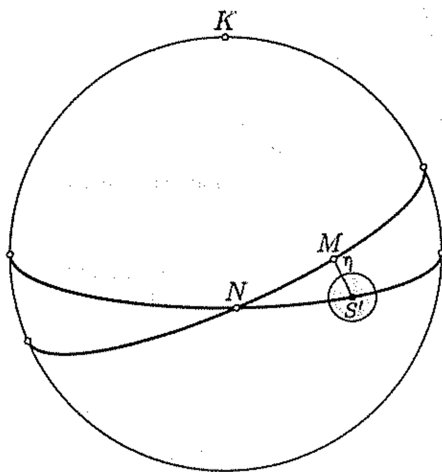
Isti argumenti se mogu primeniti korišćenjem unutrašnje tangente i temena konusa polusenke. Ugaoni poluprečnik tog konusa se dobija kao

$$f' = P + P_1 + S. \tag{18.7}$$

Jednačine (18.6) i (18.7) daju geometrijske obrasce za ugaone poluprečnike dva konusa. Međutim, nađeno je da efekt Zemljine atmosfere povećava te uglove za oko dva procenta. Formule koje se koriste za predviđanje pomračenja biće oblika

$$f = 1{,}02(P + P_1 - S)$$
$$f' = 1{,}02(P + P_1 + S). \qquad (18.8)$$

Na sl. 18.3 predstavljena je geocentrična nebeska sfera; K je pol ekliptike i N je čvor Mesečeve putanje. Pretpostavimo da M predstavlja centar Meseca, a S' tačku na ekliptici suprotno od Sunca. To je, dakle, osa konusa senke. Označimo sa η ugaono rastojanje tačaka M i S' na nebeskoj sferi. Osenčena oblast na slici predstavlja konus senke na Mesečevom rastojanju. Kada nastaje pomračenje u konusu senke, jasno je da je neophodno da neki deo Meseca treba da padne u ovu osenčenu oblast, tj. $\eta < f + S_1$.



Слика 18.3

Korišćenjem (18.8), možemo izvesti uslove za ovo, a i druge vrste Mesečevih pomračenja, formalno kao

$$\begin{aligned} &\text{Pomračenje polusenkom} && \eta < 1{,}02(P + P_1 + S) + S_1 \\ &\text{Delimično pomračenje} && \eta < 1{,}02(P + P_1 - S) + S_1 \\ &\text{Potpuno pomračenje} && \eta < 1{,}02(P + P_1 - S) - S_1. \end{aligned} \qquad (18.9)$$

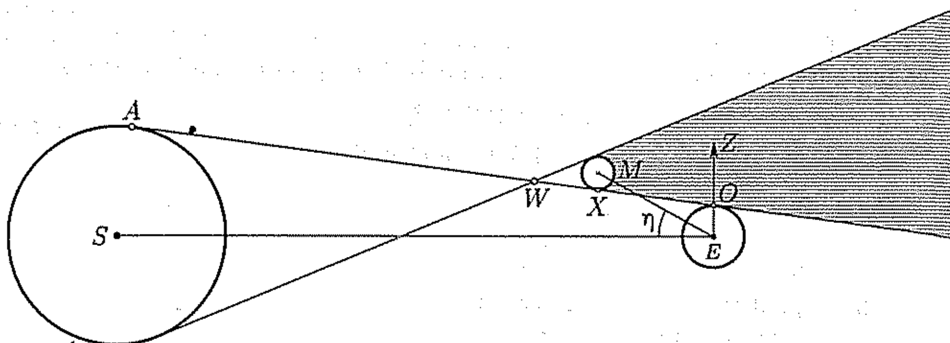
§ 18.3. Uslovi pomračenja Sunca.

Uslovi za pojavljivanje Sunčevog pomračenja su već formulisani preko ugaonog razdvajanja Sunca i Meseca onako kako se vidi iz centra Zemlje. Upotrebićemo ponovo simbol η kao oznaku za ugaono rastojanje MS' koje je predstavljeno uglom SEM na sl. 18.4. Ta slika ilustruje relativnu konfiguraciju Sunca, Meseca i Zemlje kada je pomračenje Sunca na samom početku. Zemlja ulazi u Mesečevu polusenku, dok slika pokazuje graničnu konfiguraciju za slučaj delimičnog pomračenja Sunca.

Zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da su sva tri tela (Sunce, Mesec i Zemlja) sfere. Linija $AWXO$ je tangenta na ta tri tela i dodiruje Zemlju u tački O. Linija OZ povučena kroz O normalno na ovu zajedničku tangentu, daje pravac ka zenitu Z za posmatrača u mestu O. Ovaj posmatrač vidi i Sunce i Mesec vrlo blizu horizonta koji je dat zajedničkom tangentnom linijom.

Zenitsko rastojanje Meseca biće $90° - S_1$, dok će zenitsko rastojanje Sunca biti $90° + S$. Posmatrano ugaono rastojanje između ova dva tela je jednostavno razlika njihovih zenitskih daljina.

Ovo su, međutim, topocentrične zenitske daljine; refrakcija je zanemarena. Ugao η predstavlja razliku geocentričnih zenitskih daljina merenih od istog pravca



Granična konfiguracija pri delimičnom pomračenju Sunca.

Слика 18.4

ka zenitu; mora se uključiti efekt geocentrične paralakse. Korišćenjem jednačine (4.52), za model Zemlje kao sfere, nalazimo da su geocentrične zenitne daljine Sunca i Meseca z i z_1, gde je

$$\begin{aligned} z &= 90^\circ + S - \arcsin(\sin P \cos S) \\ z_1 &= 90^\circ - S_1 - \arcsin(\sin P_1 \cos S_1) \end{aligned} \tag{18.10}$$

Traženo ugaono rastojanje je $\eta = z - z_1$.

Granični uslov za potpuno (ili prstenasto) pomračenje se slično izvodi, razmatranjem zajedničke spoljašnje tangente. Menja se samo znak S u (18.10). S dovoljnom tačnošću, možemo napisati uslove za pomračenja Sunca kao

$$\begin{aligned} &\text{Delimično pomračenje} && \eta < S_1 + P_1 + S - P \\ &\text{Potpuno (ili prstenasto) pomračenje} && \eta < S_1 + P_1 - S - P. \end{aligned} \tag{18.11}$$

Drugi uslov, zapravo, predstavlja uslov za potpuno pomračenje na nekom mestu na Zemljinoj površini. Površina zahvaćena pomračenjem u potpunosti je vrlo ograničena.

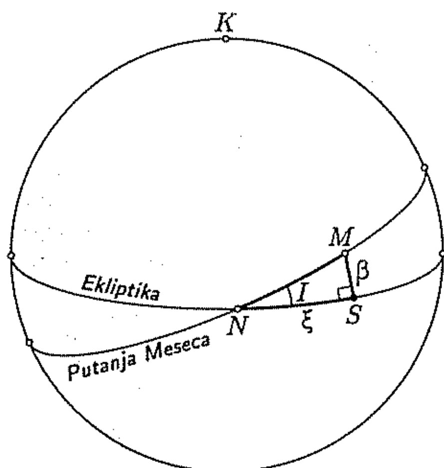
§ 18.4. Granični (ekliptički) uslovi pomračenja.

Uslovi za pomračenja Sunca i Meseca izraženi su preko ugaonih rastojanja između tela. Mnogo je pogodnije izraziti ove uslove bilo preko položaja Sunca u odnosu na Mesečevu putanju, posebno u odnosu na njegov čvor, ili preko položaja Meseca u odnosu na ekliptiku, tj. njegovu latitudu. Ovde ćemo dati pogodan argument za slučaj pomračenja Sunca; taj se argument može koristiti i u slučaju pomračenja Meseca, s tim što bi se umesto Sunca koristila tačka suprotna tački najbližoj Suncu, tačka S'.

Na sl. 18.5 predstavljena je geocentrična nebeska sfera. Tačke S i M odgovaraju položajima centara Sunca i Meseca, redom, u položajima njihove konjunkcije u ekliptičkoj longitudi. Tada je $M\hat{S}N = 90^\circ$. Označićemo MS sa β i NS sa ξ; to su dva parametra koji će odrediti granične uslove za pomračenje Sunca. Neka je I nagib Mesečeve putanje u odnosu na ekliptiku. Ovaj ugao iznosi oko 5°, ali je promenljiv. Koristeći se četvoroelementnim obrascem za sferni trougao MNS dobijamo vezu između dva parametra ξ i η, naime

$$\sin \xi = \operatorname{ctg} I \operatorname{tg} \beta. \tag{18.12}$$

Ako se radi o pomračenju, latituda β biće mala veličina. Možemo smatrati da je trougao MNS trougao u ravni. Mesec se, naravno, kreće duž stranice NM ovog trougla, dok se Sunce kreće mnogo sporije duž strane NS. Pri razmatranju relativnih položaja dva tela, pogodno je smatrati da je Sunce, a ne čvor nepomično. To je prikazano na sl. 18.6; tačke M, S i N su definisane kao i pre, dok je $N'M$ pravac kretanja Meseca u odnosu na Sunce. Najmanje ugaono rastojanje η između dva tela je SM', gde je M' podnožje normale od S na MN'.



Parametri pomračenja ξ i β.
Слика 18.5

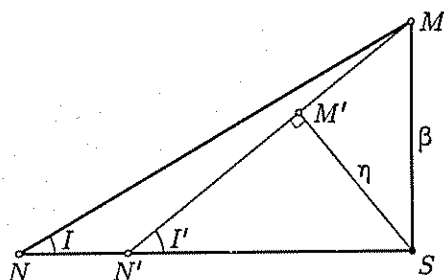
Neka je I' ugao MNS'. Tada je

$$\eta = \beta \cos I'. \qquad (18.13)$$

Ugao I' je modifikovani nagib Mesečeve putanje u odnosu na ekliptiku. On je povezan sa pravim nagibom jednačinom

$$\operatorname{tg} I' = \frac{SN}{SN'} \operatorname{tg} I. \qquad (18.14)$$

Razmotrimo, dalje, vremenski interval između trenutka prolaza Meseca kroz čvor i trenutka njegove konjunkcije sa Suncem. Mesečeva longituda poraste za iznos SN u toku ovog intervala, dok Sunčeva longituda poraste za iznos NN'. Ako sa q označimo odnos Mesečevog kretanja u longitudi i Sunčevog kretanja, takođe u longitudi, jednačina (18.14) daje



Слика 18.6

$$\operatorname{tg} I' = \frac{q}{q-1} \operatorname{tg} I. \qquad (18.15)$$

Uslov za pomračenje se sada može izraziti kao uslov za β ili ξ. Potpuni detalji su dati u tabeli 18.2 i 18.3. Ovde ćemo detaljno ispitati samo slučaj delimičnog pomračenja Sunca.

Kombinovanjem jednačina (18.13) i (18.11) možemo da izrazimo uslov za delimično pomračenje Sunca sledećim izrazom

$$\beta < (S_1 + P_1 + S - P) \operatorname{sc} I'. \qquad (18.16)$$

Ovo je, naravno, uslov za apsolutnu vrednost Mesečeve latitude u trenutku njegove konjunkcije sa Suncem. Odgovarajući uslov za Sunčevo ugaono rastojanje od čvora može se izvesti iz (18.12):

$$\xi < \arcsin(\operatorname{ctg} I \operatorname{tg} \beta). \qquad (18.17)$$

Pri korišćenju ovih uslova, treba shvatiti da parametri koji su uključeni nisu strogo konstantni. Oba poluprečnika se menjaju zbog ekscentričnosti Zemljine i Mesečeve putanje. Zbog istog uzroka menjaće se i parametar q. Dalje, nagib I se

takođe menja zbog Sunčevih poremećaja Mesečeve putanje. Ekstremne vrednosti ovih veličina, zbog pomenutih promena, date su u tabeli 18.1 koja se zasniva na vrednostima uzetim iz *Explanatory Supplement*. Podaci u poslednjoj koloni ove tabele su izvedeni iz formule (18.15). Na primer, maksimalna vrednost I' je računata preko I i minimalne vrednosti za q.

Promene ugaonih poluprečnika i horizontskih paralaksi Sunca i Meseca nisu nezavisne. Dalje, vrednost q je povezana sa ovim veličinama. Ekstremne vrednosti, date u tabeli 18.1, mogu, međutim, biti upotrebljene za dobijanje gornjih i donjih granica vrednosti β i ξ za pojavu pomračenja. Na primer, pretpostavimo da je izračunata desna strana nejednakosti (18.16), korišćenjem maksimalnih vrednosti S_1, P_1, S, I' i na kraju formalno i P, iako ova veličina nema značajnu promenu. Označićemo izračunatu vrednost sa β_{max}. Tada možemo biti sigurni da je pomračenje Sunca nemoguće za $\beta > \beta_{max}$. Slično, ako β_{min} odgovara desnoj strani jednačine (18.16), korišćenjem maksimalnih vrednosti S_1, P_1, S, I' i maksimum P, tada je delimično pomračenje Sunca izvesno za $\beta < \beta_{min}$. Jednačina (18.12) se tada može iskoristiti za izvođenje odgovarajućih graničnih vrednosti za ξ. S visokom tačnošću, imamo, dakle, da je

$$\sin\xi_{max} = \operatorname{ctg} I_{min} \operatorname{tg}\beta_{max}, \qquad \sin\xi_{min} = \operatorname{ctg} I_{max} \operatorname{tg}\beta_{min}. \tag{18.18}$$

Delimično pomračenje Sunca je izvesno kada je $\xi < \xi_{min}$ i nemoguće kada je $\xi > \xi_{max}$.

Korišćenjem drugog uslova iz (18.11) mogu se izvesti odgovarajuća ekliptička ograničenja za centralno pomračenje Sunca. Rezultati su predstavljeni u tabeli 18.2.

Ekliptička ograničenja dobijena na ovaj način su previše stroga, posebno za ξ, pa su neka uprošćenja, naravno, moguća. Tvrđenja iz tabele 18.2 su potpuno tačna i njih treba uzeti doslovno. Slučajeve koji nisu uključeni u tabelu, na primer $1°34'50'' > \beta > 1°24'33''$, biće neophodno testirati na pomračenje uključivanjem aktuelnih vrednosti svih parametara u (18.16).

Tabela 18.1. Ekstremne i srednje vrednosti parametara pomračenja Sunca

	Maksimum	Minimum	Srednje
S_1	16′45″	14′41″	15′33″
P_1	61′27″	53′53″	57′03″
S	16′18″	15′46″	16′00″
P	0′09″	0′09″	0′09″
I	5°18′	4°59′	5°08′
q	16,2	10,9	13,5
I'	5°50′	5°18′	5°32′

Pojava pomračenja Meseca može se ispitati na sličan način. Uslovi za η dati su u (18.9), dok se odgovarajući uslovi za β i ξ mogu izvesti iz (18.13) i (18.17). Veličina ξ predstavlja odstupanje Suncu suprotne tačke od čvora kada je ona u konjunkciji sa Mesecom. To se može smatrati i Sunčevim ugaonim rastojanjem od drugog čvora kada je ono u opoziciji sa Mesecom. Uslovi za pojavljivanje pomračenja Meseca su dati u tabeli 18.3.

Tabela 18.2. Neki uslovi pomračenja Sunca

Pomračenje nije moguće	$\beta > 1°34'50''$	$\xi > 18°,45$
Delimično pomračenje izvesno	$\beta < 1°24'33''$	$\xi < 15°,38$
Nema centralnog pomračenja	$\beta > 1°02'36''$	$\xi > 12°,06$
Centralno pomračenje izvesno	$\beta < 0°52'20''$	$\xi < 9°,45$

Tabela 18.3. Neki uslovi pomračenja Meseca

Pomračenje nije moguće	$\beta > 1°36'43''$	$\xi > 18°,83$
Pomračenje polusenkom izvesno	$\beta < 1°26'15''$	$\xi < 15°,69$
Nema pomračenja senkom	$\beta > 1°03'50''$	$\xi > 12°,30$
Pomračenje senkom izvesno	$\beta < 0°53'24''$	$\xi < 9°,64$
Nema potpunog pomračenja	$\beta > 0°32'14''$	$\xi > 6°,17$
Potpuno pomračenje	$\beta < 0°21'50''$	$\xi < 3°,93$

§ 18.5. Učestanost i ponovljivost pomračenja.

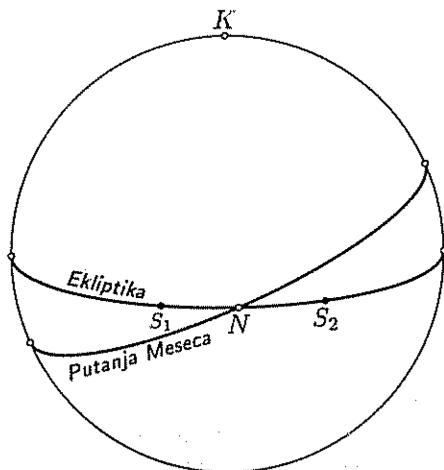
Mesec prolazi jedanput mesečno kroz svaki od čvorova. Sunce se kreće vrlo sporo i srednji interval između Sunčevih prolaza kroz čvor jeste eklipsna godina (godina pomračenja) i iznosi $346^d,62$ [v. jednačinu (10.6)]. Zato je Sunčevo rastojanje ξ od čvora, najpogodniji indikator za otkrivanje mogućnosti pomračenja. Kako ξ raste do 360° u jednoj eklipsnoj godini, sledi da se promena ovog parametra može predstaviti jednačinom

$$\frac{d\xi}{dt} = 1°,0386 \text{ po danu.} \tag{18.19}$$

Srednji interval između dve uzastopne mladine je sinodički mesec—v. jednačinu (7.20)—dužine $29^d,5306$. U ovom intervalu parametar ξ poraste za iznos $\Delta\xi$ koji iznosi

$$\Delta\xi = 30°,67. \tag{18.20}$$

Neka S_1 i S_2 sa sl. 18.7 predstavljaju položaje Sunca u trenucima dva uzastopna mlada Meseca ili, strožije, u trenucima dve uzastopne konjunkcije sa Mesecom. Čvor N, na istoj slici, smatramo nepokretnim i pretpostavljeno je da se S_1 i S_2 nalaze sa različitih strana ove tačke. Kako je $S_1S_2 = \Delta\xi$, sledi da je jedan od intervala S_1N ili S_2N manji od $\frac{1}{2}\Delta\xi = 15°,34$. Ovu vrednost treba porediti sa vrednošću ξ (15°,38), kao što je predstavljeno u tabeli 18.2 kao dovoljan uslov za pojavljivanje delimičnog pomračenja. Zaključujemo da će svaki prolaz Sunca kroz čvor biti praćen barem jednim pomračenjem Sunca. Moguće je da se čak dva pomračenja Sunca pojave za mesec dana, ukoliko su S_1 i S_2 približno simetrično raspoređeni u odnosu na čvor.



Слика 18.7

Slična razmatranja se primenjuju na pojavljivanje pomračenja Meseca. Uslovi delimičnog pomračenja Meseca polusenkom manje su strogi nego uslovi za delimično pomračenje Sunca. Svaki prolazak Sunca kroz čvor praćen je barem jednim pomračenjem Meseca konusom senke.

Svake godine dešava se najmanje četiri pomračenja: dva pomračenja Sunca i dva pomračenja Meseca. Pomračenja Meseca su najčešće pomračenja polusenkom, a ona se ponekad ne ubrajaju u pomračenja, jer nema ničeg posebno značajnog za posmatranja. Izuzetno, prolazak Sunca kroz čvor može izazvati tri pomračenja. To će biti ili niz: delimično Sunčevo—potpuno Mesečevo—delimično Sunčevo, ili centralno pomračenje Sunca između dva pomračenja Meseca polusenkom.

Kako je eklipsna godina kraća od kalendarske godine, moguće je imati tri prolaska Sunca kroz čvor u toku jedne kalendarske godine. Maksimalan broj pomračenja u toku jedne godine je sedam. Na primer, u toku 1982. bila su tri potpuna pomračenja Meseca i četiri delimična pomračenja Sunca.

Može se konstruisati približna samerljivost između eklipsne godine i sinodičkog ❊ meseca. Ta samerljivost je poznata kao period *Saros*. To je, zapravo, period od 18 godina i 11 dana, što odgovara približno 19 eklipsnih godina ili 223 sinodička meseca. U stvari

$$\begin{aligned} 19 \text{ eklipsnih godina} &= 6585^d{,}78 \\ 223 \text{ sinodička meseca} &= 6585^d{,}32. \end{aligned} \qquad (18.21)$$

Razmotrimo parametar ξ u toku 223 sinodička meseca. Korišćenjem (18.19) i (18.21), nalazi se da, kada se umnošci od 360° oduzmu, promena ξ u ovom intervalu iznosi

$$\Delta\xi_S = -0^\circ{,}48. \qquad (18.22)$$

Zbog toga, ako se pomračenje pojavilo određenog datuma, posle intervala od $6585^d{,}32$ Mesec će imati istu fazu, a ξ skoro istu vrednost. Kao posledicu imamo da se pogodni uslovi za pomračenje ponavljaju. Pomračenja se, stoga, mogu urediti u nizove, u kojima se slična pomračenja ponavljaju u intervalima od oko 18 godina i 11 dana. Sunčeva pomračenja se obično pojavljuju na različitim tačkama Zemljine površine, tako da je taj niz mnogo očigledniji za pomračenja Meseca. Kompletan niz će trajati tokom hiljadu godina, a sastoji se od niza pomračenja senkom kojima prethode i koji prate nizovi pomračenja polusenkom.

Zaključci ovog paragrafa zasnovani su na pretpostavkama da Sunčev i Mesečev čvor rotiraju jednoliko po ekliptici, što nije tačno ni za jedno od ovih tela. Pomračenja zavise od položaja Sunca i Meseca i odstupanja ovih tela od njihovih srednjih položaja mogu da utiču na uslove pod kojima se dato pomračenje pojavljuje. Opšti zaključci, međutim, ostaju na snazi (v. zadatak 18.3).

§ 18.6. Beselovi elementi pomračenja Sunca.

Detaljno ćemo razmatrati pomračenja Sunca. Pomračenja Meseca se smatraju manje važnim fenomenom. Dalje, uslovi i vreme pomračenja Meseca su isti za sve posmatrače, pa takvi podaci mogu biti dati u godišnjacima. Metodi kojima se izvode ovi uslovi su vrlo slični metodima razmotrenim u daljem tekstu, a vezanim za Sunčevo pomračenje. Međutim, u slučaju pomračenja Sunca, lokalni uslovi su vrlo važni, i ne mogu biti predstavljeni tablično u godišnjacima. Beselovi elementi daju podatke neophodne posmatraču da odredi lokalne uslove pomračenja Sunca.

Neka su $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}_1$ geocentrični vektori položaja Sunca i Meseca, koji su predstavljeni sa $\overrightarrow{ES}$ i $\overrightarrow{EM}$ na sl. 18.8. Biće pogodno iskoristiti Zemljin ekvatorski poluprečnik za našu jedinicu rastojanja. Za posledicu imamo da su intenziteti ovih vektora dati sa

$$r = \csc P$$
$$r_1 = \csc P_1. \tag{18.23}$$

Napišimo formalno dva vektora, u koordinatnoj formi, kao

$$\mathfrak{r} = \csc P(\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta)$$
$$\mathfrak{r}_1 = \csc P_1(\cos\alpha_1\cos\delta_1, \sin\alpha_1\cos\delta_1, \sin\delta_1), \tag{18.24}$$

gde su (α, δ) i (α_1, δ_1) prividne koordinate Sunca i Meseca, redom.

Poželjno je uvesti novi sistem koordinata (x, y, z) sa početkom u E. Osa z se bira tako da bude paralelna sa vektorom $\overrightarrow{MS}$, a ravan $z = 0$ se naziva *osnovna ravan*. Osa x je linija preseka osnovne ravni i ekvatora; ona je usmerena ka istoku. Osa y se postavlja tako da sa prethodne dve gradi desni trijedar osa; ona je, dakle, usmerena ka severu.

Neka su $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ jedinični vektori u x-, y- i z-pravcu, redom. Tada je

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|}. \tag{18.25}$$

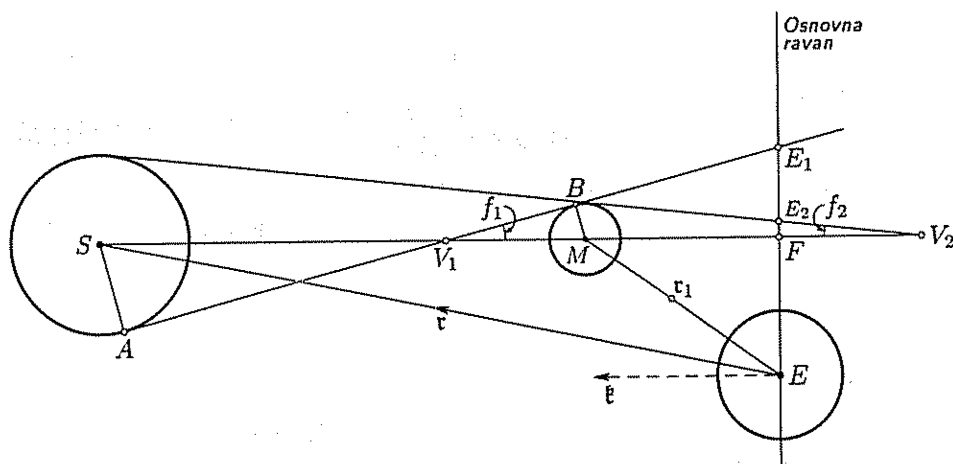
Ekvatorske komponente ovog vektora mogu biti izračunate iz efemerida Sunca i Meseca. Ako je z-osa usmerena ka tački sa rektascenzijom a i deklinacijom d, tada su komponente vektora $\mathfrak{K}$ date sa

$$\mathfrak{K} = (\cos d\cos a, \cos d\sin a, \sin d). \tag{18.26}$$

Sledi da je uređena dvojka (a, d) određena jednačinama (18.25). Njihove vrednosti se potom mogu upotrebiti za dobijanje ekvatorskih komponenti vektora $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$, koji su, preko svojih definicija, dati sa

$$\mathfrak{I} = (-\sin a, \cos a, 0)$$
$$\mathfrak{J} = (-\cos a\sin d, -\sin a\sin d, \cos d). \tag{18.27}$$

Na taj način su sva tri jedinična vektora određena.



Geometrija pomračenja Sunca.

Слика 18.8

Neka su sada (x, y, z) i (x_1, y_1, z_1) koordinate Sunca i Meseca. Iz izbora osa sledi da je $x = x_1$ i $y = y_1$. Dalje, iz (18.24), (18.27) i (18.26) sledi da je

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{I} = \csc P_1 \cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - a) \\ y_1 &= \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{J} = \csc P_1 \left[\sin\delta_1 \cos d - \cos\delta_1 \sin d \cos(\alpha_1 - a)\right] \\ z_1 &= \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{K} = \csc P_1 \left[\sin\delta_1 \sin d + \cos\delta_1 \cos d \cos(\alpha_1 - a)\right]. \end{aligned} \tag{18.28}$$

Linija SM predstavlja osu Mesečeve senke. Koordinate tačke preseka ove ose sa osnovnom ravni, u oznaci F, su $(x_1, y_1, 0)$.

Koordinate x_1 i y_1 određuju položaj ose u odnosu na centar Zemlje. Koordinata z_1 daje rastojanje Meseca od osnovne ravni. Sferne koordinate (a, d) određuju pravac te ose u prostoru. U stvari, rektascenzija ose obično se ne koristi kao element pomračenja, jer je mnogo pogodnije koristiti Grinički časovni ugao. On je dat sa

$$\mu = S_0 - a, \tag{18.29}$$

gde je S_0 Griničko zvezdano vreme.

Na sl. 18.8 označena je unutrašnja tangenta AV_1BE_1. Označena je samo jedna tangenta, da bi se izbegle nepotrebne komplikacije na slici, a ona označava granicu konusa polusenke. Tangenta dodiruje Sunce u tački A, Mesec u tački B i prodire osnovnu ravan u tački E_1. Tačka V_1 u kojoj ta tangenta seče osu senke, predstavlja teme konusa polusenke. Označimo polovinu ugla kod temena konusa sa f_1, ugao BV_1M. Slično tome, spoljna tangenta na sl. 18.8 prodire osnovnu ravan u tački E_2, a osu senke u tački V_2. Polovina ugla kod temena konusa senke (E_2V_2F) označena je sa f_2.

Neka su R i k poluprečnici Sunca i Meseca, redom, svaki izraženi u Zemljinim ekvatorskim poluprečnicima. Iz sličnih trouglova BMV_1 i ASV_1, sledi da je

$$\sin f_1 = \frac{k}{MV_1} = \frac{R}{SV_1} = \frac{R+k}{MS}$$

tj.

$$\sin f_1 = \frac{R+k}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|}. \tag{18.30}$$

Ugao f_1 se može izračunati iz pretpostavljenih vrednosti R i k. Na sličan način dobija se poluugao konusa senke kao

$$\sin f_2 = \frac{R-k}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|}. \tag{18.31}$$

Neka su c_1 i c_2 koordinate z temena V_1 i V_2, dva konusa. Tada, kao što je prikazano na sl. 18.8, $c_1 = FV_1$ i $c_2 = -FV_2$. Sada, imamo da je $V_1M = c_1 - z_1$, tako da razmatranjem trougla V_1MB zaključujemo da je

$$c_1 = z_1 + k \csc f_1. \tag{18.32}$$

Teme konusa polusenke ima koordinate (x_1, y_1, z_1), a njegova osa paralelna je z-osi i njegov poluugao je f_1. Lako se uočava da je jednačina ovog konusa

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (c_1 - z)^2 \operatorname{tg}^2 f_1.$$

Korišćenjem (18.32) ova se jednačina svodi na

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \big((z_1 - z)\operatorname{tg} f_1 + k \operatorname{sc} f_1\big)^2. \tag{18.33}$$

Sličan argument može se primeniti na konus senke; tada se dobija njegova jednačina u obliku

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left((z_1 - z)\operatorname{tg} f_2 - k \operatorname{sc} f_2\right)^2. \tag{18.34}$$

Uvedimo sada dva nova parametra l_1 i l_2 definisana sa

$$\begin{aligned} l_1 &= z_1 \operatorname{tg} f_1 + k \operatorname{sc} f_1 \\ l_2 &= z_1 \operatorname{tg} f_2 - k \operatorname{sc} f_2. \end{aligned} \tag{18.35}$$

Jednačine dva pomenuta konusa tada postaju

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (l_1 - z \operatorname{tg} f_1)^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (l_2 - z \operatorname{tg} f_2)^2. \end{aligned} \tag{18.36}$$

Stavljajući $z = 0$ u ove jednačine zaključujemo da su l_1 i l_2 poluprečnici preseka odgovarajućih konusa sa osnovnom ravni. Iz definicije (18.35), sledi da je poluprečnik konusa polusenke uvek pozitivan, ali poluprečnik konusa senke može biti negativan. Primenjena je konvencija po kojoj je l_2 pozitivno kada je $c_2 > 0$, tj. kada teme konusa senke ne doseže osnovnu ravan. U opštem slučaju, l_2 je pozitivno za prstenasta pomračenja, ali negativno za potpuna pomračenja.

Astronomical Almanac daje na svakih 10 min u toku pomračenja Sunca utabličene sledeće veličine: x_1, y_1, $\sin d$, $\cos d$, μ, l_1 i l_2. Ove veličine su poznate kao *Beselovi elementi pomračenja Sunca*. Pored toga, date su i pojedinačne vrednosti $\operatorname{tg} f_1$, $\operatorname{tg} f_2$, μ' i d', gde prim označava časovne promene. Promene ove četiri veličine su dovoljno male da one mogu biti smatrane konstantama u toku pomračenja.

§ 18.7. Račun pomračenja Sunca.

Zajedno sa numeričkim podacima, koji su upravo objašnjeni, *Astronomical Almanac* daje i mapu koja određuje približne okolnosti pomračenja o kome se radi. Na mapi sveta ucrtavaju se linije duž kojih pomračenje počinje ili se završava istovremeno. Takođe se naznačava i put potpune (ili prstenaste) faze pomračenja. Korišćenjem ove mape može se odrediti početak (ili kraj) pomračenja za dato mesto posmatranja, sa tačnošću od 10 min. Pretpostavimo da je (UT $= T_0$) približno svetsko vreme izvedeno na ovaj način. Ispitaćemo sada kako se računa popravljena vrednost.

Vektor geocentričnog položaja posmatrača O može se u ekvatorskim koordinatama napisati na sledeći način

$$\mathfrak{r}_0 = \rho\left[\cos\varphi\cos(S_0 + \lambda), \cos\varphi\sin(S_0 + \lambda), \sin\varphi\right]. \tag{18.37}$$

Ovde je S_0 zvezdano vreme u Griniču, φ je geocentrična širina, λ istočna dužina i ρ geocentrično rastojanje O. Neka su (ξ, η, ζ) koordinate posmatrača u sistemu uvedenom u prethodnom paragrafu. Tada is (18.26), (18.27) i (18.29) sledi da je

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{I} = \rho\cos\varphi\sin(\mu + \lambda) \\ \eta &= \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{J} = \rho\left[\sin\varphi\cos d - \cos\varphi\sin d\cos(\mu + \lambda)\right] \\ \zeta &= \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{K} = \rho\left[\sin\varphi\sin d + \cos\varphi\cos d\cos(\mu + \lambda)\right]. \end{aligned} \tag{18.38}$$

Sada, u trenutku (UT $= T_1$) u kom pomračenje počinje, tačka O leži u konusu polusenke. Iz (18.36) uslov za ovo se može napisati u obliku

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 = (l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1)^2. \tag{18.39}$$

Problem je sada da se nađe svetsko vreme kada je ovaj uslov ispunjen. Napišimo uslov (18.39) u formi $F(\mathrm{UT}) = 0$, gde je

$$F(\mathrm{UT}) = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 - (l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1)^2. \tag{18.40}$$

Svi parametri na desnoj strani su funkcije svetskog vremena UT, iako je f_1 skoro konstantno i l_1 varira lagano. Sada se $F(\mathrm{UT})$ određuje za trenutak $\mathrm{UT} = T_0$, koji je procenjen trenutak početka pomračenja, korišćenjem Beselovih elemenata utabličenih u *Astronomical Almanacu*, oba direktno zamenjivanjem u (18.40), a (ξ, η, ζ) se određuju iz (18.38). Dobijena vrednost $F(T_0)$ biće mala, što ukazuje da je T_0 blizu traženog trenutka vremena. Popravljeno vreme $T_0 + \Delta T$ može se odrediti metodom Njutn-Rafsona, koja daje

$$\Delta T = -\frac{F(T_0)}{F'(T_0)}. \tag{18.41}$$

Pri određivanju izvoda $F'(T_0)$ iz (18.40), elementi l_1 i f_1 se mogu smatrati konstantama. Stoga, može se pisati

$$\frac{1}{2}F'(\mathrm{UT}) = (\xi - x_1)(\xi' - x_1') + (\eta - y_1)(\eta' - y_1') + (l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1)\zeta' \operatorname{tg} f_1. \tag{18.42}$$

Izvodi (x_1', y_1') se mogu odrediti diferenciranjem utabličenih elemenata, ali (ξ', η', ζ') su izvedeni diferenciranjem jednačina (18.38). Posle redukcije, nalazi se da je

$$\begin{aligned} \xi' &= \mu'(\zeta \cos d - \eta \sin d) \\ \eta' &= \mu' \xi \sin d - d'\zeta \\ \zeta' &= -\mu' \xi \cos d + d'\eta. \end{aligned} \tag{18.43}$$

Metod Njutn-Rafsona je analitički najčistiji, ali može zahtevati nekoliko iteracija da bi se stiglo do željenog rezultata. Prva iteracija će odrediti vreme početka pomračenja skoro na minut tačno, ukoliko je izbor T_0 blizu tačne vrednosti. Proces iteracija se primenjuje direktno. Nove vrednosti Beselovih elemenata, neophodne za dalji račun, izvode se iz formula

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + \Delta T\, x_1' \\ y_1 &= y_1 + \Delta T\, y_1' \\ \mu &= \mu + \Delta T\, \mu' \\ \sin d &= \sin d + d' \cos d \\ \cos d &= \cos d - d' \sin d. \end{aligned} \tag{18.44}$$

Tada, (ξ, η, ζ) i F mogu biti nanovo izračunati. Za izračunavanje novih vrednosti $F'(\mathrm{UT})$, dovoljno je precizno smatrati x_1' i y_1' konstantama i koristiti vrednosti iz prethodnog koraka. Nove vrednosti (ξ', η', ζ') određuju se iz (18.43).

Razmotrićemo sada alternativni metod kojim se izbegava korišćenje iteracija. Ovaj metod će biti primenjen umesto metoda iteracija za određivanje vremena pridruženih centralnoj fazi pomračenja, bilo potpunog ili prstenastog. Zbog određenosti, govorićemo o potpunom pomračenju i pretpostavićemo da je T_0 ocenjeno vreme u kome totalna faza počinje za posmatrača O. Detaljno utabličena centralna linija i ograničenja potpunosti pomračenja u *Astronomical Almanacu* daju mogućnost da se oceni T_0 sa tačnošću od nekoliko minuta.

Iz druge jednačine (18.36), uslov da posmatrač leži unutar konusa senke je

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 = (l_2 - \zeta \operatorname{tg} f_2)^2. \tag{18.45}$$

Ova jednačina se primenjuje na početak i kraj potpunog pomračenja. Ona se može napisati i u kraćem obliku

$$u^2 + v^2 = L^2, \tag{18.46}$$

gde je

$$\begin{aligned} u &= x_1 - \xi \\ v &= y_1 - \eta \\ L &= l_2 - \zeta \operatorname{tg} f_2. \end{aligned} \tag{18.47}$$

Uslov (18.46) je približno zadovoljen u trenutku T_0. Pretpostavimo sada da se on odnosi tačno na trenutak $T_0 + \Delta T$. Napišimo

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta T\, u' \\ v &= v_0 + \Delta T\, v', \end{aligned} \tag{18.48}$$

gde su indeksima označene vrednosti u trenutku $T = T_0$.

Izvodi (u', v'), tj. $(x_1' - \xi', y_1' - \eta')$, izračunavaju se tačno kao i do sada. U rešavanju (18.46) drugi izvodi biće zanemareni i L će se smatrati konstantom. Ovo je jača pretpostavka od one učinjene ranije. Ipak, ovaj metod je bolji jer su neki članovi drugog reda po ΔT zadržani. U stvari, zamenjivanjem (18.48) u (18.46) dobijamo kvadratnu jednačinu

$$n^2\,\Delta T^2 + 2D\,\Delta T + F(T_0) = 0, \tag{18.49}$$

gde su n^2 i D skraćene oznake za sledeće veličine

$$\begin{aligned} n^2 &= u'^2 + v'^2 \\ D &= u_0 u' + v_0 v'. \end{aligned} \tag{18.50}$$

Koreni ove kvadratne jednačine su

$$\Delta T = -\frac{D}{n^2} \pm \frac{\left(D^2 - n^2 F(T_0)\right)^{1/2}}{n^2}. \tag{18.51}$$

Ova dva korena odgovaraju početku i kraju potpunog pomračenja. Oba korena su značajna, jer su udaljeni jedan od drugog svega nekoliko minuta. Središnji trenutak pomračenja dat je sa

$$T = T_0 - \frac{D}{n^2}, \tag{18.52}$$

a trajanje potpunog pomračenja, u oznaci δT, je

$$\delta T = \frac{2\left(D^2 - n^2 F(T_0)\right)^{1/2}}{n^2}. \tag{18.53}$$

Vremena računata ovom metodom imaće tačnost od oko jedne sekunde, ako je prva procena oko pet minuta različita od tačnog vremena.

Ovaj metod se može iskoristiti i za određivanje vremena početka i završetka delimične faze pomračenja. Jedina promena je u tome što je L sada definisano sa

$$L = l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1. \tag{18.54}$$

Sve ostalo je isto kao u slučaju potpunog pomračenja. U praksi, T_0 se bira tako da bude u okolini trenutka kontakta. Dva korena ΔT se tada mogu izvesti iz (18.51). Jedan od njih (onaj sa znakom plus) biće mali i daje tačnu vrednost trenutka kontakta. Drugi koren će dati približnu vrednost trenutka drugog kontakta. Ono se treba ponovo izračunati na osnovu nove vrednosti T_0 u okolini tog kontakta.

Astronomical Almanac daje podatke za pomračenja, pri čemu je argument svetsko vreme. Ovi podaci se pripremaju sa pretpostavljenom vrednosti TDT − UT. Ako se desi da tačna vrednost prelazi ocenjenu vrednost za δT, potrebna je izvesna popravka. Utabličena svetska vremena su umanjena za δT, μ za $1{,}0027\,\delta T$, a λ se povećava za isti iznos. Sve ostale, utabličene, veličine ostaju nepromenjene.

§ 18.8. Faze pomračenja.

Veličina pomračenja Sunca definiše se kao odnos Sunčevog prečnika i prečnika oblasti zahvaćene pomračenjem. Razmotrimo veličinu pomračenja za posmatrača smeštenog u tački O koja se nalazi u okviru polusenke, ali ne i u okviru senke. Na sl. 18.9 linije SS' i MM' predstavljaju prečnike Sunčevog i Mesečevog diska; uzeto je približno da i spoljašnje i unutrašnje tangente prolaze kroz tačke M i M'. Tačke V_1 i V_2 predstavljaju temena konusa polusenke i konusa senke. Slika odgovara okolnostima kada centralno pomračenje, ukoliko je moguće, jeste prstenasto pomračenje. Linija PP' predstavlja ravan koja sadrži posmatračev položaj, paralelan osnovnoj ravni, odnosno ravni $z = \zeta$.

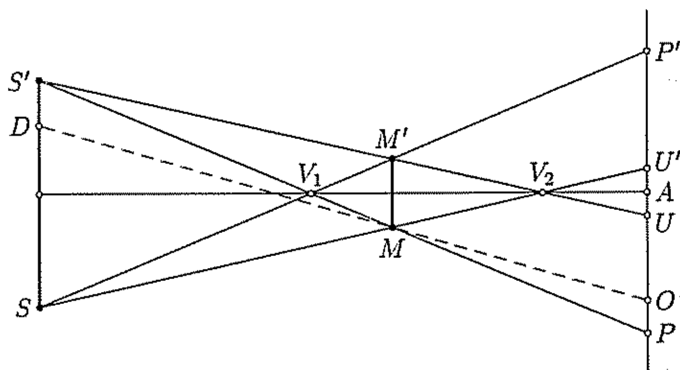
Pretpostavimo da osa senke preseca ovu ravan u tački A, koja stoga ima koordinate (x_1, y_1, ζ). Neka je $OA = m$; tada iz (18.47) sledi da je

$$m = (u^2 + v^2)^{1/2}. \tag{18.55}$$

Pošto želimo da razmotrimo istovremeno senku i polusenku, to treba da pravimo razliku između dve vrednosti L korišćene ranije,

$$\begin{aligned} L_1 &= l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1 \\ L_2 &= l_2 - \zeta \operatorname{tg} f_2. \end{aligned} \tag{18.56}$$

Iz uslova (18.46), ispitanog u prethodnom paragrafu, sledi da je $AP = L_1$ i $AU = L_2$.



Intenziteti pomračenja. SS' i MM' predstavljaju Sunčev i Mesečev disk. Posmatrač je u O i POP' predstavlja osnovnu ravan

Слика 18.9

Neka linija OM seče Sunčev disk u tački D Tada, iz sličnih trouglova sa zajedničkim temenom M, intenzitet pomračenja za posmatrača O je M_1, gde je

$$M_1 = \frac{DS'}{SS'} = \frac{OP}{U'P}.$$

Sada je

$$OP = AP - AO = L_1 - m$$

i

$$U'P = U'A + AP = L_2 + L_1.$$

Dalje, imamo da je

$$M_1 = \frac{L_1 - m}{L_1 + L_2}. \tag{18.57}$$

Ovo je opšta formula za intenzitet pomračenja u toku delimične faze. Ako se, međutim, posmatrač nalazio unutar konusa senke u tački U ili U', intenzitet pomračenja M_2 biće

$$M_2 = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}, \tag{18.58}$$

jer je u ovoj tački $m = L_2$. U stvari, ova jednačina se primenjuje u toku prstenaste faze (v. zadatak 18.8). Ako je centralna faza potpuna, a ne prstenasta, jednačina (18.57) se i tada primenjuje u toku delimične faze, ali je L_2 tada negativno. Kada se posmatrač nalazi na konusu senke, $m = -L_2$, tada je veličina pomračenja jednaka jedinici, a tu vrednost zadržava tokom potpune faze. Na drugoj strani, formula za M_2 se ponekad formalno koristi da opiše intenzitet potpunog pomračenja jer ona pokazuje koliko se Mesec više pojavljuje od Sunca.

Samo se privilegovana grupa posmatrača nalazi duž puta centralnog pomračenja, dok ostali posmatrači uočavaju samo delimičnu fazu. Takvi posmatrači mogu želeti da odrede trenutak maksimuma faze u njihovom položaju, kao i intenzitet pomračenja u tom trenutku. Ocenjeno vreme T_0 je izabrano, najčešće kao sredina pomračenja. Neka je $T_0 + \Delta T$ traženo vreme. Neophodno je maksimalizovati M_1 u jednačini (18.57). Kako L_1 i L_2 variraju lagano u poređenju sa m, obično je dovoljno minimalizovati m. Iz (18.55), uslov za to je

$$uu' + vv' = 0. \tag{18.59}$$

Postupak je sličan onom u prethodnom paragrafu; stavljamo

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u'\,\Delta T \\ v &= v_0 + v'\,\Delta T. \end{aligned} \tag{18.60}$$

Tada je, u oznakama iz jednačine (18.50), ΔT dato sa

$$\Delta T = -\frac{D}{n^2}. \tag{18.61}$$

Minimalna vrednost m se tada može izračunati iz (18.55), korišćenjem (18.60). Ova vrednost se najčešće označva sa Δ i posle izvesne redukcije nalazi se da je

$$\Delta = \frac{|u_0 v' - v_0 u'|}{n}. \tag{18.62}$$

Maksimalna faza je tada data sa

$$M_1 = \frac{L_1 - \Delta}{L_1 + L_2} \tag{18.63}$$

Još jednu stvar treba uočiti. Pretpostavimo da delimično pomračenje tek počinje, tako da se položaj posmatrača poklapa sa tačkom P. Ta tačka tada ima koordinate (ξ, η, ζ), dok A ima koordinate (x_1, y_1, ζ). Ugao θ definisan sa

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v}, \tag{18.64}$$

daje nagib PA prema y-osi, koja je usmerena ka severu. Iz geometrije figure sledi da je $\theta + 180°$ položajni ugao tačke S' koja tek što je pomračena centrom Sunčevog diska. Položajni uglovi kontakata mogu se tada izvesti iz (18.64). Kvadrant se jednostavno određuje, ako se uoči kada pomračenje počinje, Mesec se pojavljuje na zapadnom delu nebu.

§ 18.9. Okultacije Mesecom.

Pomračenje Sunca može se smatrati predstavnikom čitavog niza pojava koje se određuju sličnim geometrijskim principima. To su okultacije zvezda, radio i X izvora Mesecom, prelazak unutrašnjih planeta preko Sunčevog diska, okultacije radio izvora Suncem, okultacije radio izvora planetama, pa čak i asteroidima. Pomračenje Sunca predstavlja najkomplikovaniji problem, jer su i pomračeno telo (Sunce) i telo koje izaziva pomračenje (Mesec) tela sa velikim ugaonim prečnicima, te se kretanje tela koje izaziva pomračenje mora uračunati. Ovaj paragraf zaključićemo razmatranjem mnogo jednostavnijeg problema okultacije zvezde Mesecom. Ova pojava je mnogo učestalija od pomračenja, čak i za zvezde vidljive golim okom. Kao i kod pomračenja Sunca, lokalne okolnosti se menjaju sa promenom mesta na površini Zemlje.

Kao i do sada, usvojićemo koordinatni sistem (x, y, z) sa početkom u geocentru E. Ravan x–y se zove osnovna ravan. Osa z se sada bira u pravcu ka prividnom položaju (α, δ) koji se može smatrati stalnim za vreme trajanja okultacije, v. sl. 18.10. Ose x i y su izabrane na isti način kao i u slučaju pomračenja Sunca. Jedinični vektori u ovim pravcima su

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \\ \mathfrak{J} &= (-\cos\alpha\sin\delta, -\sin\alpha\sin\delta, \cos\delta). \end{aligned} \tag{18.65}$$

Neka je geocentrični položaj Meseca (α_1, δ_1). Tada su pravougle koordinate centra Meseca M (x_1, y_1, z_1), gde je

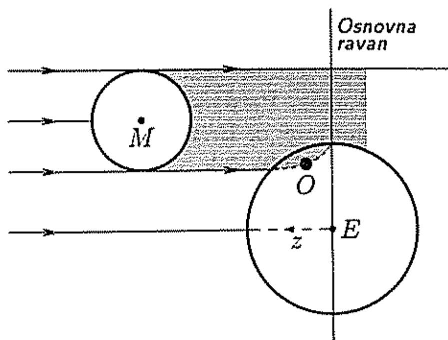
$$\begin{aligned} x_1 &= \csc P_1 \cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - \alpha) \\ y_1 &= \csc P_1 \left[\sin\delta_1\cos\delta - \cos\delta_1\sin\delta\cos(\alpha_1 - \alpha)\right]. \end{aligned} \tag{18.66}$$

Slična adaptacija se može izvršiti u jednačini (18.38) da bi se dobile x- i y-koordinate kao

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\varphi\sin(t + \lambda) \\ \eta &= \rho\left(\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos(t_g + \lambda)\right), \end{aligned} \tag{18.67}$$

gde je t_g časovni ugao zvezde za posmatrača u Griniču. Ostale oznake su iste kao i do sada.

U ovom problemu z-komponente nisu neophodne. Kako je pretpostavljeno da je zvezda tačkasti izvor, koji je efektivno beskonačno udaljen, to nema konusa senke i delimične osvetljenosti koje treba razmatriti. Umesto toga, senka se može predstaviti cilindrom čija je osa duž linije $x = x_1$ i $y = y_1$. Poprečni presek ovog cilindra je krug prečnika k. Nestajanje zvezde iza Mesečevog diska naziva se *uranjanje*, a njena ponovna pojava *izranjanje*. U oba ova trenutka, posmatrač se nalazi na površini cilindra senke i uslov za to je



Cilindar senke pri okultaciji zvezde Mesecom.
СЛИКА 18.10

$$(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 = k^2. \tag{18.68}$$

Razmotrimo sada mogućnost predviđanja trenutaka uranjanja i izranjanja za datog posmatrača. Beselovi elementi okultacije su definisani na sledeći način:

UT_c svetsko vreme konjunkcije zvezde i Meseca u rektascenziji
t_G Grinički časovni ugao zvezde u tom trenutku
Y vrednost y_1 u trenutku UT_c
x', y' časovne promene x_1, y_1
α, δ prividna rektascenzija i deklinacija zvezde.

Primetimo da je u trenutku UT_c, $x = 0$. Za potrebe ovog predviđanja dovoljno je smatrati x' i y' konstantnim u toku pomračenja.

Pretpostavimo da je UT_0 procenjeno svetsko vreme uranjanja i da je $UT_0 = UT_c + \Delta T_c$. Tada uz pomoć Beselovih elemenata možemo izračunati (x_1, y_1) za trenutak UT_0. Da bi izveli (ξ, η) za ovaj trenutak neophodno je znati t_g. Taj ugao je dat sa

$$t_g = t_G + \Delta T_c', \tag{18.69}$$

gde je $\Delta T_c'$ zapravo interval ΔT_c, izražen zvezdanim a ne srednjim vremenom.

Stavljajući $u = x_1 - \xi$, $v = y_1 - \eta$, uslov (18.68) ima istu formu kao i (18.46) i rešava se metodom diskutovanom u §18.7. Izvodi x_1 i y_1 su Beselovi elementi, dok diferenciranje (18.67) daje

$$\begin{aligned} \xi' &= \rho t' \cos\varphi \cos(t + \lambda) \\ \eta' &= \rho t' \cos\varphi \sin\delta \sin(t + \lambda), \end{aligned} \tag{18.70}$$

jer je δ sada konstanta. Vrednost t' je takođe konstantna i iznosi 2π radijana po zvezdanom danu. Izraženo u traženim jedinicama, odnosno radijanima po srednjem času, to je

$$t_g = 0{,}262\,516. \tag{18.71}$$

Predviđanja zvezdanih okultacija se ne štampaju u *Astronomical Almanacu* zato što se tretiraju kao lokalne pojave. *Explanatory Supplement* daje listu publikacija koje daju predviđanja okultacija u različitim zemljama. Ta predviđanja imaju

formu približnih vremena izranjanja i uranjanja za izabrana mesta, zajedno sa koeficijentima koji daju mogućnost da se izvede i približno vreme u okolini tih geografskih položaja. Predviđanja za Severnu Ameriku se štampaju u *Sky and Telescope*, dok *Handbook of British Astronomical Association* daje detalje za Veliku Britaniju, Novi Zeland•i delove Australije.

Vremena dobijena iz ovih izvora daju vrednost UT_0 neophodnu za izvođenje preciznog vremena. Tačni Beselovi elementi mogu se izračunati iz podataka o Mesecu datih u *Astronomical Almanacu*.

Posmatranje okultacije daje svetsko vreme, obično trenutak uranjanja, zajedno sa položajem (ρ, λ, φ) posmatračkog mesta. Redukcija takvih posmatranja je specijalizovan zadatak, koji je u nadležnosti Međunarodnog centra za Mesečeve okultacije u Tokiju. Ta redukcija obezbeđuje klasični metod za popravljanje Mesečeve putanje, mada danas postoje novi metodi koji uključuju radarska i laserska merenja.

Zadaci

18.1. Pokazati da je atmosferska refrakcija dovoljno velika da bi dopustila da se deo Sunca i jedna polovina potpuno pomračenog Meseca vide istovremeno na horizontu.

18.2. Prodiskutovati ograničenja nametnuta pomračenjima Sunca i Meseca izraženim preko ξ. Posebno odgovoriti na sledeća pitanja:

(i) Može li centralno pomračenje Sunca slediti dve sedmice za potpunim pomračenjem Meseca?

(ii) Ako dva pomračenja Sunca slede jedno za drugim u toku jednog meseca, da li moraju biti delimična?

(iii) Da li je moguće imati dva potpuna pomračenja Sunca (kao opozicija prstenastim) u intervalu od šest meseci?

18.3. Objasniti šta se naziva Sarosom. Pokazati da se, kao dodatak njegovoj definiciji u jednačini (18.21), taj ciklus može opisati na ekvivalentan način kao 223 sinodička meseca i 242 drakonistička meseca. Pokazati da Saros približno iznosi 239 anomalističkih meseci i prokomentarisati značaj ovih dodatnih samerljivosti.

18.4. Dokazati da je pravac (a, d) ose Mesečeve senke u vreme pomračenja Sunca, približno dat jednačinama

$$a = \alpha - \frac{b \sec\delta \cos\delta_1}{1-b}(\alpha_1 - \alpha),$$
$$d = \delta - \frac{b}{1-b}(\delta_1 - \delta),$$

gde su (α_1, δ_1) i (α, δ) rektascenzije i deklinacije Meseca i Sunca, redom, a b je odnos njihovih geocentričnih rastojanja.

18.5. Odrediti trenutke delimičnih pomračenja za položaj posmatrača na nivou mora, na geodetskoj širini 55°54′13″ i zapadnoj geodetskoj dužini 4°17′28″. Prethodno, izračunati geocentričnu širinu i geocentrično rastojanje mesta posmatranja.

18.6. Pomračenje iz prethodnog zadatka dogodilo se 30.05.1984. i *Astronomical Almanac* daje sledeće podatke za taj datum u 18^h50^m:

$$\sin d = 0{,}372\,654$$
$$\cos d = 0{,}927\,970$$
$$\mu = 103^\circ{,}123\,86.$$

Izračunati koordinate (ξ, η, ζ) mesta posmatranja za taj trenutak.

Ako je dato i $\mu' = 0{,}261\,797$ i $d' = 0{,}000\,099$, oboje u radijanima po času, izračunati izvode (ξ', η', ζ').

18.7. *Astronomical Almanac* daje sledeće dodatne informacije u vezi sa pomračenjem razmotrenim u prethodnom zadatku:

UT	x_1	y_1	l_1	$\operatorname{tg} f_1$
18,50	1,018 929	0,544 001	0,550 819	0,004 612
19,00	1,105 765	0,566 070	0,550 791	0,004 612

Izabrati neophodne podatke iz ove tabele da bi izračunali trenutke vremena početka i kraja delimičnog pomračenja za posmatrača sa koordinatama datim u zadatku 18.5.

[Trenutak kraja pomračenja biće sa tačnošću od jedne sekunde, ali vreme početka pomračenja je sa greškom od oko 5 minuta. To se vreme, međutim, može iskoristiti kao prva aproksimacija za nov račun.]

18.8. Pokazati da je u toku prstenaste faze pomračenja Sunca, intenzitet pomračenja dat sa

$$M_2 = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}.$$

U kom se smislu ova formula može primeniti i na potpuno pomračenje Sunca.

18.9. Dokazati da su koordinate (x_1, y_1) Meseca u toku okultacije zvezde sa ekvatorskim koordinatama (α, δ), date sa

$$x_1 = \frac{15}{P_1}(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1,$$

$$y_1 = \frac{\delta_1 - \delta}{P_1},$$

gde su (α_1, δ_1) i P_1 rektascenzija, deklinacija i horizontska paralaksa Meseca, redom.

18.10. Proceniti približne datume prolaza Merkura i Venere preko Sunčevog diska.

ГЛАВА ДЕВЕТНАЕСТА

Dvojne zvezde

❊ § **19.1. Uvod.** Izrazi „*dvojne zvezde*" ili „*dvojni sistem*" korišćeni su isključivo da opišu dve zvezde koje su dovoljno prostorno bliske jedna drugoj, tako da nad njihovim kretanjem dominira njihovo promenljivo gravitaciono privlačenje. Prividna bliskost dveju zvezda na nebu, sama po sebi, ne garantuje da one čine dvojni sistem. Kolinearnost pravca ka zvezdama može da bude slučajna, dok su zvezde na potpuno različitim daljinama od Sunca. U tom slučaju par se naziva *optički dvojnim*. Mnogi od takvih slučajeva mogu da se eliminišu ako sopstvena kretanja zvezda ne pokazuju sličnost. U pravom binarnom sistemu dve zvezde će imati zajedničko sopstveno kretanje i dodatno se može zapaziti da jedna opisuje putanju oko druge za veoma dug vremenski period. Dvojne zvezde daju primere problema dva tela izučavanog u glavi 6.

❊ Međutim, ovo što je upravo opisano jeste samo jedan vid dvojnog sistema—*vizuelno dvojne*. U tom slučaju, obe zvezde se teleskopom vide razdvojene i putanjsko kretanje može da se izučava na osnovu relativne promene položaja dveju zvezda. Međutim, u mnogim slučajevima ugaono razdvajanje dveju zvezda suviše je malo da bi omogućilo da se one vide posebno. Tada se dvojna priroda utvrđuje i izučava drugim sredstvima.

❊ *Spektroskopski dvojne* odaju svoju prirodu promenljivom radijalnom brzinom koja se određuje iz Doplerovog pomaka u spektru jedne prividno jedinstvene zvezde. U nekim slučajevima posmatrane su dve grupe spektralnih linija i Doplerov pomak u svakoj od njih je promenljiv. Takav sistem je poznat kao *dvolinijska spektroskopski dvojna*. Međutim, kada je jedna od razmatranih zvezda sjajnija od druge, spektar manje sjajne zvezde gubi se u spektru sjajnije zvezde. Ovaj tip sistema je poznat kao *jednolinijska spektroskopski dvojna*. Dvojnu prirodu je još uvek moguće registrovati iz promenljivog Doplerovog pomaka u posmatranom spektru.

❊ *Fotometrijska* (ili *eklipsna*) *dvojnost* potiče od periodičnog pomračenja—zaklanjanja koje se javlja u bliskim binarnim sistemima. Zvezde su suviše blizu da bi se razdvojile teleskopski, ali zahvaljujući pomračenjima magnituda prividno jednostruke zvezde menja se pravilno. Četvrta klasa dvojnih mora da se kategoriše kao ❊ *polarimetrijske dvojne*, gde se dvojna priroda sistema utvrđuje iz periodične promene parametara polarizacije.

Data klasifikacija dvojnih sistema je na bazi posmatračkih tehnika. U osnovi, nema razloga da posebni sistem ne bude dvojni i istovremeno pripada nekim ili svim nabrojanim klasama. U stvarnosti, prirodna dihotomija postoji i komentari koji slede su uopšteno tačni, mada postoje izuzeci. Vizuelno dvojne su široko razdvojene zvezde koje se sporo kreću, jedna u odnosu na drugu, i ne mogu lako da se izučavaju spektroskopski. Nasuprot tome, spektroskopski dvojne su tesni sistemi koji se kreću rapidno i imaju vrlo promenljiv Doplerovski pomak. Postoji nekoliko zvezda koje mogu da se izučavaju i kao vizuelne i kao spektroskopski dvojne. S druge strane, ako je poklapanje putanjske ravni tesne dvojne delimično naglašeno, sistem će, takođe, biti eklipsni. I eklipsne i polarimetrijske dvojne se najbolje klasifikuju kao specijalan slučaj spektroskopskih dvojnih, mada su polarimetrijske promene moguće u odsustvu primetnih spektroskopskih promena kada je prava putanja dvojne skoro upravna na vizuru. Za izlaganje polarimetrije, potrebno je detaljno astrofizičko modelovanje.

Izučavanje dvojnih zvezda obezbeđuje *jedinstven* način određivanja zvezdanih masa. Pretpostavimo da dve zvezde imaju mase M_1 i M_2 i da je njihova relativna putanja elipsa velike poluose a i perioda T. Onda tačniji oblik trećeg Keplerovog zakona (6.31) daje

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}, \tag{19.1}$$

gde je G gravitaciona konstanta. Vrednost za $4\pi^2/G$ može da se unese zavisno od izabranih jedinica.

Kod vizuelno dvojnih velika poluosa a određena je kao ugao—u lučnim sekundama. Izražena je u astronomskim jedinicama (AJ) kao a/π^*, gde je π^* paralaksa sistema. Prema dogovoru, period T se izražava u godinama, a mase u jedinicama mase Sunca. U tim jedinicama (19.1) se svodi na

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{\pi^{*3} T^2}. \tag{19.2}$$

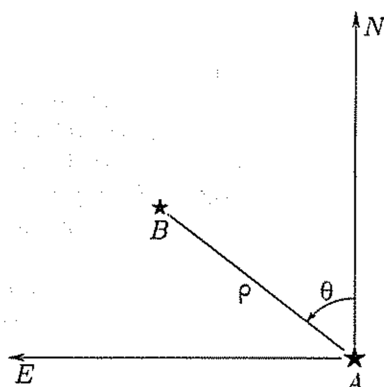
Međutim, kod spektroskopski dvojnih, merenja daju brzine koje su obično izražene u km/s, a podatak o velikoj poluosi tada je u kilometrima. Dalje, kratki periodi su obično izraženi u danima. U takvim jedinicama mase zvezda, u jedinicama mase Sunca, date su sa

$$M_1 + M_2 = 3{,}985 \cdot 10^{-20} \frac{a^3}{T^2}. \tag{19.3}$$

Korišćenje jednačine (19.1) omogućava da se odredi samo zbir masa. U nastojanju da se ova masa raspodeli na dve zvezde, neophodno je odrediti centar masa sistema. Nije dovoljno izučavati samo relativno kretanje dveju zvezda.

U ovoj glavi ispitaćemo kako su putanjski elementi dvojnog sistema izvedeni iz posmatranja za dve glavne klase dvojnih—vizuelno dvojne i spektroskopski dvojne. Detaljno izučavanje fotometrijskih i polarimetrijskih podataka je van domena ove knjige.

§ **19.2. Putanjski elementi dvojnog sistema.** Neka su A i B dve zvezde koje čine vizuelno dvojni sistem; sjajna zvezda A naziva se *primarnom*, *glavnom*, slabija zvezda B naziva se *sekundarnom*, *pomoćnom*. Posmatranje



Pojava vizuelnog dvojnog sistema sa razdvajanjem ρ i položajnim uglom θ.

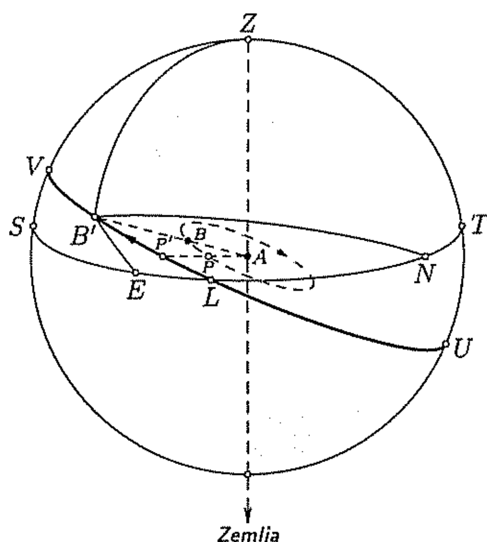
Слика 19.1

vizuelno dvojnih znači merenje razdvojenosti ρ dveju zvezda i položajnog ugla $\theta = N\hat{A}B$. Slika 19.1 prikazuje dvojni sistem kako ga vidi posmatrač. Zapažamo da se položajni ugao meri od polazne linije AN koja je u pravcu severa, tj. duž deklinacijskog kruga kroz severni svetski pol. Položajni ugao θ se meri u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu gledano iz topocentra.

Zbog orbitalnog kretanja dvojnih, i udaljenost i položajni ugao menjaju se vidno u toku dugog vremenskog intervala. Promena položajnog ugla biće monotona. Ako položajni ugao raste sa vremenom, kažemo da je orbitalno kretanje *direktno*, a ako θ opada sa vremenom, kretanje je *retrogradno*.

Ove posmatračke konvencije koje će biti strogo zadržane stvaraju nam dilemu. Referentna ravan putanje je ravan kroz A upravna na vizuru. Uzeta je kao x–y ravan. Kada bi bile razmatrane samo vizuelno dvojne, bilo bi prirodno izabrati inicijalnu liniju AN za x-osu i AE za y-osu, što predstavlja konvenciju koja se obično koristi. U tom slučaju, z-osa, koja kompletira desni sistem, mora biti usmerena od zvezde ka posmatraču. Ovo nije u saglasnosti sa zahtevima za spektroskopski dvojne, gde spoljni radijalni pravac mora da se uzme kao pozitivan, dok se opadajuće radijalne brzine uvek smatraju pozitivnim. Zato dajemo sledeće definicije: x-osa je izabrana u pravcu AE i y-osa je u pravcu AN. Ovo je u skladu sa standardnim konvencijama datim za standardne koordinate na astrografskim pločama i izborom pravaca u fundamentalnoj ravni za pomračenja i okultacije. Sada je posmatrani položaj pomoćne zvezde (x, y) u odnosu na glavnu dat sa

$$x = \rho \sin\theta$$
$$y = \rho\cos\theta. \tag{19.4}$$



Putanjski elementi dvojnog sistema: $\Omega = NL$, $i = VLS$, $\omega = LP'$.

Слика 19.2

Slika 19.2 predstavlja nebesku sferu sa centrom u glavnoj zvezdi A. Veliki krug SLT je ravan upravna na vizuru. Pravci severa i istoka naznačeni su tačkama N i E. Neka je Z pol ovog velikog kruga koji označava pravac z-ose. Veliki krug ULV je putanjska ravan. Ona preseca referentnu ravan u dva čvora. Sa smerom rotacije označenim na dijagramu, L je uzlazni čvor. Luk NL je *položajni ugao uzlaznog čvora* i može da se označi sa Ω.

Sferni ugao VLS je ugao nagiba putanje i. Kao i obično, i je ograničeno na dva prva kvadranta; kada je $0 \leq i \leq 90°$, kretanje je direktno.

Neka je P položaj pomoćne zvezde u trenutku kada je najbliža glavnoj. Ova tačka se zove *periastron*. Dalje, neka je B položaj pomoćne zvezde u proizvoljnom trenutku vremena t. Sada spojimo AP i AB i povucimo ove linije sve do prodora kroz nebesku sferu u tačkama P' i B', redom. Označimo luk LP' sa ω; to je *argument periastrona*. Dalje, ako je v prava anomalija u trenutku t, onda je $P'B' = v$, dok je $LB' = (v + \omega)$.

Preostali putanjski elementi dvojnog sistema su velika poluosa a, ekscentričnost putanje e, trenutak prolaza kroz periastron τ i orbitalni period T. Orbitalni period ili srednje kretanje mora da se razmatra kao nezavisni putanjski element; to je potrebno za (19.2) da bi se odredio zbir masa. Znači, sve u svemu, ima sedam putanjskih elemenata, i to $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau, T)$.

Putanjski elementi su bili definisani za putanju pomoćne zvezde u odnosu na glavnu. To je ono što se normalno uči o vizuelno dvojnim. U svakom dvojnom sistemu centar masa će imati konstantnu brzinu u odnosu na baricentar Sunčevog sistema. Odatle će se pokazati konstantno sopstveno kretanje i konstantna radijalna brzina. Ako su još promene položaja svake zvezde u vizuelno dvojnom sistemu merene u odnosu na okolne zvezde, elementi putanje svake zvezde oko centra masa mogu da se odrede. Neka su a_1 i a_2 velike poluose ovih putanja, onda je

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ M_1 a_1 &= M_2 a_2. \end{aligned} \tag{19.5}$$

Preostali putanjski elementi su isti kao i kod relativne putanje.

Kod spektroskopski dvojnih promena radijalne brzine zvezde je dokaz njenog kretanja u odnosu na centar masa. Onda će putanjski elementi moći da se odrede na nebeskoj sferi sa centrom u baricentru bolje nego u glavnoj komponenti. Polazeći od toga, nema promena u odredbama putanjskih elemenata. Razmatranje relativne putanje se lako prilagođava prostornoj putanji dveju zvezda.

Vratimo se na sl. 19.2. Usvojen je sistem pravouglih (Dekartovih) koordinata sa centrom u središtu nebeske sfere i osama u smeru E, N, i Z. Kako je naznačeno ranije, ovo daje desni koordinatni sistem. Neka je r radijus vektor pomoćne zvezde u trenutku t u tački B. Onda su koordinate ove zvezde u odnosu na glavnu date sa

$$\begin{aligned} x &= r \cos EB' \\ y &= r \cos NB' \\ z &= r \cos ZB'. \end{aligned} \tag{19.6}$$

Tri kosinusa pravca u (19.6) mogu da se izvedu primenom kosinusnog obrasca na sferne trouglove $EB'L, NB'L$ i $ZB'L$. Strana $B'L = v + \omega$ je zajednička za sva tri trougla, a preostali potrebni delovi se lako čitaju kao: $EL = 90° - \Omega$, $NL = \Omega$, $ZL = 90°$, $B'LE = i$, $B'LN = 180° - i$, $B'LZ = 90° - i$. Jednačine (19.6) daju rezultate

$$\begin{aligned} x &= r\left[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i\right] \\ y &= r\left[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i\right] \\ z &= r\left[\sin(v+\omega)\sin i\right]. \end{aligned} \tag{19.7}$$

Sam radijus vektor r može da se izrazi preko prave anomalije, ili ako damo prednost ekscentričnoj anomaliji, koristeći dinamičke jednačine,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1 - e\cos E). \tag{19.8}$$

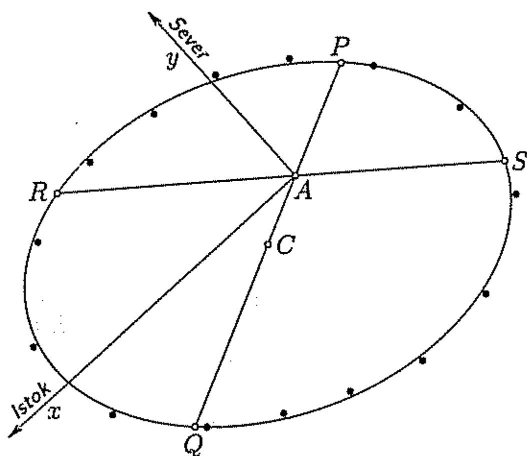
Kod vizuelno dvojnih promene koordinata x i y su ispitivane za relativnu putanju. Siromašna poziciona posmatranja ne donose informacije o z. S druge strane, kod spektroskopski dvojnih, merenja radijalnih brzina daju informaciju o iznosu promene z-koordinate vektora položaja zvezde u odnosu na centar masa. Sa tako različitim, mada komplementarnim, posmatračkim podacima potrebne su potpuno različite metode istraživanja za dve vrste dvojnih. U svakom slučaju, putanjski elementi sistema su određeni iz redukcije posmatranja.

§ 19.3. Metoda Til-Inesa (Thiele-Innes).

Posmatranja vizuelno dvojnih normalno moraju da se protegnu na veoma dugi vremenski interval da bi orbita mogla da se izvede. Orbitalni periodi od preko 100 godina su obična stvar. Svako posmatranje daje ugaono razdvajanje dveju zvezda, položajni ugao i, naravno, vreme na koje se oni odnose. Time su dobijeni nizovi vrednosti (ρ, θ, t), ili, što je isto, (x, y, t). Crtanje tačaka (x, y) daje *prividnu putanju* u x–y ravni, kao što je prikazano na sl. 19.3.

Prava putanja pomoćne zvezde oko glavne je elipsa u čijoj jednoj žiži se nalazi glavna zvezda. Prividna putanja je projekcija ove elipse na ravan x–y i takođe je elipsa. Velika poluosa prividne putanje ne odgovara velikoj poluosi prave putanje, niti će se A pojaviti u žiži. Centar C prividne putanje je, međutim, projekcija centra prave elipse.

Priroda projekcije mora da se analizira izvođenjem putanjskih elemenata prave putanje. U početku ovo može da se dâ iz geometrijskih razmatranja. Međutim, ona su veoma zahvalna ako se koriste dinamički principi kao njihov suplement. To je osobenost metode Til-Inesa (THILE-INNES), veoma često korišćene za redukciju posmatranja vizuelno dvojnih. Razmatranja data niže su zasnovana na ovoj metodi.



Prividna relativna putanja vizuelno dvojne zvezde.

СЛИКА 19.3

Pretpostavićemo da je najmanje jedna kompletna putanja posmatrana i da je izmeren period T. Pretpostavimo još da je centar C prividne elipse bio dobro određen. Neka CA seče prividnu elipsu u tačkama P i Q, kao na sl. 19.3. Sada je bitna osobina procesa projekcije da se prave projektuju u prave i odnosi dužina na liniji su sačuvani.

Tako su tačke Q, C, A i P, redom, projekcije apoastrona, centra, žiže i periastrona. Trenutak kada je pomoćna zvezda u P je trenutak prolaza kroz periastron τ. Šta više, kako su dužinski odnosi sačuvani, ekscentričnost e se takođe izvodi kao

$$e = \frac{CA}{CP}. \tag{19.9}$$

Kako su τ i T sada poznati, srednja anomalija za neki trenutak t može da se izračuna kao

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau). \tag{19.10}$$

Ekscentrična anomalija onda može da se izvede iz rešenja Keplerove jednačine

$$M = E - e \sin E, \tag{19.11}$$

i zaista je prava anomalija tada dostupna iz uslova da je

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \tag{19.12}$$

Razmotrimo tačku putanje kada je $v = 90°$. Onda je

$$\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e},$$

što nam omogućava da izvedemo ekscentričnu anomaliju. U stvari,

$$\cos E = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}E}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}E} = e \tag{19.13}$$

Odgovarajući trenutak može onda da se izvede iz jednačina (19.10) i (19.11), kao

$$t = \tau + \frac{T}{2\pi}\left[\arccos e - e(1-e^2)^{1/2}\right]. \tag{19.14}$$

Koristeći ovu vrednost možemo odrediti tačku R na prividnoj elipsi koja odgovara $v = 90°$. Na sl. 19.3 linija RS predstavlja projekciju *latus rectuma* prave elipse.

Neka su sada (x_1, y_1) i (x_2, y_2) koordinate tačaka P i R, redom. One će biti, na osnovu gornjih argumenata, poznate merene veličine. Ali tačke P i R odgovaraju vrednostima $v = 0°$ i $v = 90°$. Dalje, iz (19.8) vrednosti radijus vektora koji odgovaraju ovim tačkama su $a(1-e)$ i $a(1-e^2)$.

Uvodeći ove vrednosti u prve dve jednačine (19.7) dobijaju se četiri rezultata

$$\begin{aligned}
X_1 &\equiv \frac{x_1}{1-e} = a(\cos\omega \sin\Omega + \sin\omega \cos\Omega \cos i) \\
Y_1 &\equiv \frac{y_1}{1-e} = a(\cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega \cos i) \\
X_2 &\equiv \frac{x_2}{1-e^2} = a(-\sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega \cos i) \\
Y_2 &\equiv \frac{y_2}{1-e^2} = a(-\sin\omega \cos\Omega - \cos\omega \sin\Omega \cos i).
\end{aligned} \tag{19.15}$$

Veličine X_1, Y_1, X_2, Y_2 će se nazivati konstantama Til-Inesa. One su sada poznate veličine i putanjski elementi na desnoj strani (19.15) mogu da se izraze preko njih.

Kombinovanje jednačina (19.15) daje sledeće rezultate:

$$\begin{aligned} X_1 - Y_2 &= a\sin(\omega + \Omega)(1 + \cos i) \\ X_1 + Y_2 &= -a\sin(\omega - \Omega)(1 - \cos i) \\ X_2 - Y_1 &= -a\cos(\omega - \Omega)(1 - \cos i) \\ X_2 + Y_1 &= a\cos(\omega + \Omega)(1 + \cos i) \end{aligned} \tag{19.16}$$

Nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}(\omega + \Omega) &= \frac{X_1 - Y_2}{X_2 + Y_1} \\ \mathrm{tg}(\omega - \Omega) &= \frac{X_1 + Y_2}{X_2 - Y_1} \end{aligned} \tag{19.17}$$

Odatle $(\omega+\Omega)$ i $(\omega-\Omega)$ mogu da se odrede. U stvari, ovo određivanje može biti izvedeno nedvosmisleno, jer se znaci kosinusa i sinusa oba ugla mogu izvesti iz (19.16) mada su faktori $(1+\cos i)$ i $(1-\cos i)$ uvek pozitivni. Vrednosti ω i Ω mogu tada da se odrede, ali iako su njihov zbir i razlika jednoznačno određeni, sami uglovi ω i Ω imaju dvoznačnost. Evidentno je iz (19.16) da dodavanje 180° na oba ω i Ω ne menja desne strane. Ova dvojnost je uklonjena veštački ograničavanjem položajnog ugla čvora na interval $0 \leq \Omega \leq 180°$. Ovom konvencijom ω je određeno jednoznačno.

Dalje, kombinovanje prve dve jednačine (19.16) daje

$$\mathrm{tg}^2\frac{i}{2} = \frac{1-\cos i}{1+\cos i} = -\frac{(X_1+Y_2)\sin(\omega+\Omega)}{(X_1-Y_2)\sin(\omega-\Omega)}, \tag{19.18}$$

što daje i. Konačno a može da se odredi iz bilo koje originalne jednačine (19.16).

Određivanje putanjskih elemenata je sada kompletirano, izuzimajući jedinu dvoznačnost u Ω. To znači da, iako se oba čvora putanje mogu odrediti, na osnovu vizuelnih posmatranja ne zna se koji je uzlazni. Ova neodređenost ne utiče na određivanje zvezdanih masa i može da se ukloni ako su dostupna i spektroskopska merenja.

Suština metode Til-Inesa je što se za određivanje putanjskih elemenata koriste trenuci koji odgovaraju različitim tačkama na putanji. Kad su jednom određeni T, τ i e, prava anomalija može da se odredi za ma koju tačku. U stvari, koristimo samo dve tačke, P i R, za određivanje konstanti Til-Inesa, mada može da se koristi ma koja tačka na prividnoj putanji. Razvoj $\cos(v+\omega)$ i $\sin(v+\omega)$ iz (19.7) i (19.15) daju rezultate

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{a}\cos v X_1 + \frac{r}{a}\sin v X_2 \\ y &= \frac{r}{a}\cos v Y_1 + \frac{r}{a}\sin v Y_2. \end{aligned} \tag{19.19}$$

Korišćenjem jednačine (19.8), ovo može da se prepiše kao

$$\begin{aligned} \cos v X_1 + \sin v X_2 &= \frac{1 - e\cos v}{1-e^2}x \\ \cos v Y_1 + \sin v Y_2 &= \frac{1 + e\cos v}{1-e^2}y. \end{aligned} \tag{19.20}$$

Tako, za bilo koju tačku (x, y) na prividnoj putanji vrednost v može da se izračuna iz sopstvenog vremena t koristeći jednačine (19.10) do (19.12). Onda jednačine (19.20) daju uslovne jednačine Til-Inesovih konstanti koje mogu da se odrede metodom najmanjih kvadrata. Putanjski elementi se računaju kao i ranije.

§ 19.4. Metoda Lehman-Filhesa (Lehmann-Filhés).

Moramo da ispitamo metodu određivanja putanjskih elemenata za spektroskopski dvojne. Radi određenosti, biće razmatrana jednolinijska spektroskopski dvojna; principi dvolinijskih zvezda su isti. Posmatranja daju radijalnu brzinu V_r zvezde u funkciji vremena t. Usvojićemo da su popravke za V_r izračunate i da imamo baricentričnu radijalnu brzinu kao u §11.4, a i vreme t je korigovano primenom (10.23), tako da se odnosi na baricentar Sunčevog sistema.

Spektroskopski dvojne generalno imaju podnošljivo kratke periode i stoga će se merenja protezati na više perioda. Prednost toga je da će period T biti određen sa visokom tačnošću. Pretpostavimo dalje da je V_0 dugoperiodična srednja vrednost radijalne brzine ili, što je isto, srednja vrednost V_r tačno u toku jednog orbitalnog perioda. Veličina V_0 je radijalna brzina centra masa dvojnog sistema. Oscilovanje V_r oko srednje vrednosti uzrokovano je radijalnom komponentom kretanja zvezde oko centra masa. Kako je z-osa u pravcu vizure, možemo da napišemo

$$V_r = V_0 + \frac{dz}{dt}. \tag{19.21}$$

Napomenimo da je u (19.21) i u daljoj analizi koordinatni početak sistema u centru masa dvojnog sistema. Ispitujemo putanju jedne zvezde u odnosu na tu tačku a ne relativnu putanju. Stoga je treća jednačina (19.7) modifikovana i daje

$$z = \frac{a_1}{a} r \sin(v + \omega) \sin i, \tag{19.22}$$

gde je a_1 velika poluosa putanje zvezde oko centra masa, ali se r i a odnose na relativnu putanju kao i ranije.

Diferenciranje (19.22) daće

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a_1}{a} \sin i \left[\frac{dr}{dt} \sin(v + \omega) + r \frac{dv}{dt} \cos(v + \omega)\right]. \tag{19.23}$$

Izraz u uglastim zagradama može da se pojednostavi korišćenjem rezultata teorije problema dva tela. Na primer, dr/dt i $r\,dv/dt$ su samo radijalna i transverzalna brzina razmatrane u §6.6. Tako, korišćenje jednačina (6.41) do (6.43) daje

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h a_1 \sin i}{a^2(1 - e^2)} \left(\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right). \tag{19.24}$$

Konstanta h je izražena preko srednjeg kretanja n, pomoću jednačina

$$h^2 = \mu a(1 - e^2)$$
$$n^2 a^3 = \mu.$$

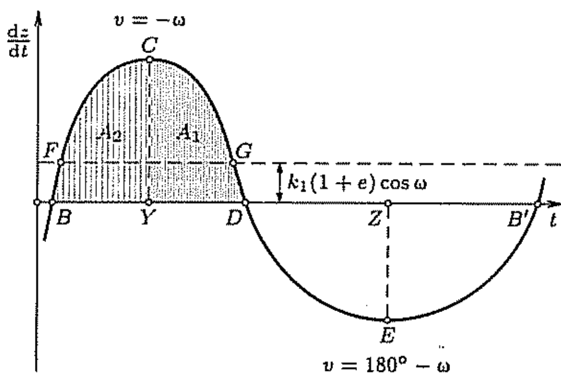
Odavde je konačni rezultat

$$V_r - V_0 = \frac{dz}{dt} = K_1 \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right], \tag{19.25}$$

gde je K_1 konstanta definisana kao

$$K_1 = \frac{na_1 \sin i}{(1-e^2)^{1/2}}. \tag{19.26}$$

Pretpostavimo da su posmatrane radijalne brzine korigovane prema gornjem opisu i da je oduzeta srednja vrednost V_0. Podaci mogu da se prikažu kao *kriva radijalne brzine*, kao što je prikazano na sl. 19.4. Oblik ove krive je predviđen jednačinom (19.25). Ako je umesto vremena na apcisi prava anomalija, to će biti jednostavna sinusoida. Kako prava anomalija ne raste ravnomerno sa vremenom, moguća je značajna distorzija. Izbor t-ose za $V_r = V_0$ značiće da je površ ispod segmenta BCD jednaka površi iznad segmenta DEB'.



Kriva radijalne brzine kod jednolinijske spektroskopski dvojne zvezde.

СЛИКА 19.4

Neka α i β označavaju maksimum i minimum vrednosti dz/dt u apsolutnom iznosu, tako da je $\alpha = CY$ i $\beta = ZE$. Maksimum C odgovara $\cos(v+\omega)$ koji ima svoj jedinični maksimum u (19.25). Posledica je da je $v = -\omega$ u tački C. Slično tome, $v = 180° - \omega$ u tački E. Primena (19.25) u ovim tačkama omogućava rezultate kao

$$\begin{aligned} \alpha &= K_1(1 + e\cos\omega) \\ \beta &= K_1(1 - e\cos\omega). \end{aligned} \tag{19.27}$$

Možemo da rešimo ove dve simultane jednačine i dobijamo

$$K_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \tag{19.28}$$

$$e\cos\omega = \frac{1}{2K_1}(\alpha-\beta) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}. \tag{19.29}$$

Time su konstante K_1 i $e\cos\omega$ dovoljno dobro određene. Ako može da se odredi $e\sin\omega$, biće moguće izvesti e i ω posebno. Da bismo ovo omogućili, neophodno je da se koriste druge osobenosti krive brzine između njene maksimalne i minimalne vrednosti. Metoda Lehman-Filhesa (LEHMANN-FILHÉS) koristi dve površi BCY i CDY koje su prikazane šrafiranjem na sl. 19.4.

Ispitajmo površ CDY koja je označena sa A_1. Jasno je da je

$$A_1 = \int_C^D \frac{dz}{dt}\,dz = z_D - z_C.$$

Sada je u tački C $(v+\omega) = 0$, što povlači preko (19.22) da je $z_C = 0$. Sličan argument je primenjen na površ BCY, koja je označena sa A_2. Zaključujemo da je

$$A_1 = z_D \qquad (19.30)$$
$$A_2 = -z_B.$$

Kako je $dz/dt = 0$ u tačkama D i B, lako je videti da su vrednosti z u (19.30) maksimum i minimum vrednosti na putanji.

Iz (19.22) i (19.8) sledi da je za ma koju tačku putanje

$$z = \frac{a_1(1-e^2)\sin i \sin(v+\omega)}{1+e\cos v}.$$

Setimo se da je veličina $e\sin\omega$ zgodna da zameni $\cos v$ sa $\cos(\overline{v+\omega}-\omega)$ u imeniocu da se izvede

$$z = \frac{a_1(1-e^2)\sin i \sin(v+\omega)}{[1+e\cos\omega\cos(v+\omega)+e\sin\omega\sin(v+\omega)]}. \qquad (19.31)$$

Sada, u dvema razmatranim tačkama je $dz/dt = 0$ i zbog (19.25)

$$\cos(v+\omega) = -e\cos\omega \qquad (19.32)$$
$$\sin(v+\omega) = \pm(1-e^2\cos^2\omega)^{1/2}.$$

Pozivajući se na originalnu formulu za z (19.22), jasno je da znak plus odgovara maksimumu, a znak minus minimumu. Kombinovanje jednačina (19.30), (19.31) i (19.32) dovodi do rezultata

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1-e^2\cos^2\omega - e\sin\omega(1-e^2\cos^2\omega)^{1/2}}{1-e^2\cos^2\omega + e\sin\omega(1-e^2\cos^2\omega)^{1/2}}. \qquad (19.33)$$

Unakrsno množenje i preuređenje daje

$$e\sin\omega = +\left(\frac{A_2-A_1}{A_2+A_1}\right)(1-e^2\cos^2\omega)^{1/2}. \qquad (19.34)$$

Sada površi A_1 i A_2 mogu da se mere iz krive brzine. Šta više, veličina $e\cos\omega$ je takođe određena u (19.29). Sledi, veličina $e\sin\omega$ može da se odredi. U stvari,

$$e\sin\omega = +\left(\frac{A_2-A_1}{A_2+A_1}\right)\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}. \qquad (19.35)$$

Kako su poznati i $e\cos\omega$ i $e\sin\omega$, moguće je jedinstveno određivanje i za ekscentričnost putanje i za argument periastrona. Kada je jednom poznata veličina e, jednostavna je stvar da se izvede trenutak prolaza kroz periastron τ. U tom trenutku $v = 0$, i pomoću (19.25),

$$\frac{dz}{dt} = K_1(1+e)\cos\omega.$$

Ova vrednost ordinate određuje dve tačke krive brzine, recimo F i G na sl. 19.4. Sada prava anomalija, po definiciji, raste monotono sa vremenom. Kako je v, takođe, poznato u dve tačke C i E, lako je utvrditi koja od F i G odgovara $v = 0$ i periastronu. Element τ je apscisa te tačke.

Veličina K_1 se često navodi kao orbitalni element spektroskopski dvojne. Iz (19.26), ipak, imamo

$$a_1\sin i = \frac{K_1(1-e^2)^{1/2}}{n}.$$

Sada je srednje kretanje $n = 2\pi/T$. Moramo biti pažljivi sa jedinicama jer će K_1 obično biti u km/s, dok je T prema konvenciji izraženo u danima. Tako je

$$a_1 \sin i = \frac{86\,400 T K_1 (1 - e^2)^{1/2}}{2\pi}.$$

Koristeći (19.28) ovo se svodi na

$$a_1 \sin i = \frac{21\,600 T}{\pi} (\alpha + \beta)(1 - e^2)^{1/2}. \qquad (19.36)$$

Ovo omogućava da se veličina $a_1 \sin i$ izrazi u kilometrima.

Sumirajući, imamo da analiza krive brzine jednolinijske spektroskopski dvojne omogućava da se izvedu sledeći putanjski elementi ($a_1 \sin i$, e, τ, ω, T). Elementi a_1 i i ne mogu da se razdvoje iz siromašnih spektroskopskih merenja, ali, na veliko iznenađenje, nemamo potpunu informaciju o Ω, koje se ne pojavljuje u formuli za z.

§ 19.5. Mase vizuelno dvojnih.

Poslednja dva paragrafa su se odnosila na metode određivanja putanjskih elemenata vizuelno i spektroskopski dvojnih. Mada metoda može da varira, konačni rezultat je uvek isti. Evidentirane neodređenosti su sadržane u sistemima oba tipa. Kod vizuelno dvojnih neodređenost je samo u Ω i ona ne utiče na određivanje masa zvezda.

Metoda Til-Inesa, opisana u §19.3, daće veliku poluosu relativne putanje u jedinicama u kojima su vršena merenja rastojanja. Dakle, metod normalno daje T u godinama i a u lučnim sekundama. Ukupna masa sistema je izražena u masama Sunca preko jednačine (19.2). Zapisujući π za π^*, to je

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{\pi^3 T^2}.$$

Korišćenje ove formule pretpostavlja da trigonometrijske paralakse zvezde mogu biti i bile su merene. Mada postoje dvojne, bliske Suncu, za koje to važi, u većini slučajeva to ne važi.

Ako je dvojna na suviše velikom rastojanju da bi bilo moguće odrediti π, još nije sve izgubljeno. Argument može da se invertuje na sledeći način. Mase dveju zvezda su procenjene iz njihove spektralne klasifikacije. Same ove ocene su zasnovane na više definitivnih određivanja masa zvezda sličnog spektralnog tipa i mnogo pogodnijih primera dvojnih. Jednačina (19.2) može onda da se prepiše dajući paralaksu dvojne kao

$$\pi = \frac{a}{T^{2/3}(M_1 + M_2)^{1/3}}. \qquad (19.37)$$

❊ Paralaksa određena na ovaj način, poznata je kao *dinamička paralaksa*. Kako je u (19.37) uveden samo treći koren ukupne mase, dinamička paralaksa je manje osetljiva na ocenu mase nego što je izgledalo. Dinamička paralaksa je pogodna za određivanje daljine zvezda. Povratno, ovo može biti korišćeno za kalibraciju sjaja zvezda izabranog spektralnog tipa.

Jednačina (19.2) daje samo ukupnu masu dvojnog sistema. Ne može se više očekivati ni od analize relativne orbite. Kao što je pokazano u §19.2, kako je ukupna masa podeljena može da se odredi samo ako je poznat centar masa sistema. To zahteva da se ispita kretanje zvezda u odnosu na zvezdanu pozadinu.

Na sl. 19.5 tačke A i B predstavljaju glavnu i pomoćnu zvezdu u vizuelnom sistemu, a G je njihov centar masa. Položajni ugao i udaljenost B u odnosu na A mereni su na uobičajeni način—ρ će biti izraženo u lučnim sekundama. Lako se utvrđuje da će udaljenost G od A biti

$$GA = \frac{M_2}{M_1} GB = \frac{M_2 \rho}{M_1 + M_2}. \tag{19.38}$$

Pretpostavimo sada da su standardne koordinate (ξ, η) pomoćne zvezde merene sa niza fotografskih ploča u raznim trenucima. Ako (ξ_G, η_G) predstavlja standardne koordinate tačke G, onda je

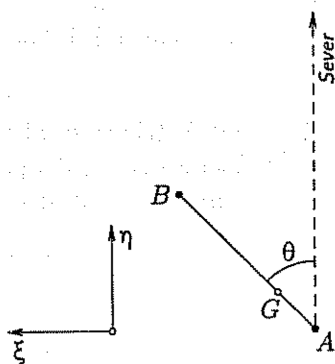
$$\begin{aligned} \xi &= \xi_G - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \sin\theta \sin 1'' \\ \eta &= \eta_G - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \cos\theta \sin 1''. \end{aligned} \tag{19.39}$$

Koordinate (ξ_G, η_G) su u početku nepoznate, ali tačka G će imati jednoliko kretanje. Dakle, standardne koordinate tačke A imaju oblik

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \mu_\xi t - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \sin\theta \sin 1'' \\ \eta &= \eta_0 + \mu_\eta t - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \cos\theta \sin 1''. \end{aligned} \tag{19.40}$$

Astrografska posmatranja glavne zvezde za dugi vremenski interval fituju se na predviđeni oblik (19.40) metodom najmanjih kvadrata. Odavde je moguće odrediti nepoznate (ξ_0, η_0), (μ_ξ, μ_η) i $M_2/(M_1 + M_2)$. Kako je zbir masa već poznat iz (19.2), dve zvezdane mase su pojedinačno određene.

Jednačina (19.40) može da se primeni na prividno jednostruku zvezdu, čija se dvojna priroda pokazuje samo periodičnim varijacijama sopstvenog kretanja. Takvi objekti su poznati kao *astrometrijski dvojne*. Analiza sopstvenog kretanja dovešće do određivanja $M_2\rho/(M_1 + M_2)$ i θ u funkciji vremena. Tada može da se primeni metoda Til-Inesa na ove podatke da bi se dobili period T i veličina $M_2 a/(M_1 + M_2)$ koja jeste a_1. Sada iz jednačina (19.2) i (19.5) imamo sledeće dve relacije



СЛИКА 19.5

$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= M_2 a_2 \\ M_1 + M_2 &= \frac{(a_1 + a_2)^3}{\pi^3 T^2}. \end{aligned} \tag{19.41}$$

Uzimajući da paralaksa zvezde može da se meri, postoje tri nepoznate veličine u jednačini (19.41), dve mase i a_2. Međutim, mase ne mogu da budu određene sa sigurnošću. To što možemo da odredimo je *funkcija mase* $f(M)$ definisana, eliminacijom a_2 iz jednačina (19.41), kao

$$f(M) = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{a_1^3}{\pi^3 T^2}. \qquad (19.42)$$

Slična funkcija mase je definisana za jednolinijske spektroskopski dvojne.

Astrometrijska dvojna ukazuje na postojanje nevidljivog pratioca. Metodu istraživanja uveo je još Besel sredinom 19. veka. On je pokazao da Sirijus ima pratioca koji ne može (u tom trenutku) da se vidi, ali koji je deo zvezdane mase. Pratilac, Sirijus B, otkriven je teleskopski nekoliko decenija kasnije; njegova prividna zatamnjenost je posledica njegovih veoma malih dimenzija, jer je beli patuljak.

Nekoliko bliskih zvezda su astrometrijski dvojne. U mnogim slučajevima, a naročito kod najčešće spominjane Barnardove zvezde, mase nevidljivih pratilaca su tako male da su oni verovatno planete, pre nego pomoćne zvezde. Lako je videti iz (19.42) da je, ako je $M_2 \ll M_1$,

$$M_2 \simeq \left(\frac{a_1^3 M_1^2}{\pi^3 T^2}\right)^{1/3}. \qquad (19.43)$$

Ako je izvršena ocena M_1 iz spektroskopskih materijala, masa nevidljivog pratioca može da se izvede iz ove jednačine, ili mnogo tačnije iz same (19.42).

Astrometrijske dvojne daju mogućnosti da se ustanovi postojanje planetskih sistema oko drugih zvezda. Periodične promene sopstvenog kretanja glavne zvezde, kada je poremećeno planetskim masama, su tako male da neki astronomi ne razmatraju taj problem. Očekuje se da će astrometrija visoke preciznosti na vasionskom teleskopu razrešiti ovo pitanje. Mora da se naglasi da je jednačina (19.40) pojednostavljena. Vrlo visoka preciznost koja se traži u ispitivanju astrometrijski dvojnih zahteva uvođenje članova drugog, čak trećeg reda, u sopstvena kretanja. Komponente sopstvenog kretanja ne mogu da se tretiraju kao konstante, ali bitne varijacije razmatrane u §11.2 moraju da se uključe.

§ 19.6. Mase spektroskopski dvojnih.

Ako su oba spektra vidljiva kod spektroskopski dvojne, dve krive brzina mogu da se analiziraju posebno. Putanjski elementi dve zvezde oko njihovog centra masa su identični, izuzimajući a i ω za koje je

$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= M_2 a_2 \\ \omega_1 &= \omega_2 + 180^\circ. \end{aligned} \qquad (19.44)$$

Iz jednačina (19.25) i (19.26), sledi da dve krive brzina imaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= K_1 \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right] \\ \frac{dz_2}{dt} &= -K_2 \left[\cos(v + \omega) + e \cos \omega\right]. \end{aligned} \qquad (19.45)$$

Kada se dve krive brzina analiziraju metodama iz §19.4, dobiće se $a_1 \sin i$ i $a_2 \sin i$.

U ovom slučaju nema teškoća da se izvede odnos masa zvezda, jer je

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2 \sin i}{a_1 \sin i} = \frac{K_2}{K_1}. \qquad (19.46)$$

Međutim, ukupna masa sistema ne može da se odredi samo iz spektroskopskih podataka. Koristeći (19.3), najbolje do čega može da se dođe je

$$(M_1 + M_2)\sin^3 i = 3{,}985 \cdot 10^{-20}\frac{(a_1 \sin i + a_2 \sin i)^3}{T^2}, \qquad (19.47)$$

gde su a_1 i a_2 izraženi u km i T u danima.

Prisustvo $\sin^3 i$ u (19.47) znači da zvezdane mase ne mogu da se odrede za pojedinačne spektroskopski dvojne, čak i kada su oba spektra dostupna. Ipak, određivanje $(M_1 + M_2)\sin^3 i$ je još uvek korisno za statistička istraživanja. Pretpostavimo da je proučen veliki broj N spektroskopski dvojnih sličnog spektralnog tipa i da je veličina $(M_1 + M_2)\sin^3 i$ određena za svaki sistem. Pretpostavimo da su mase praktično iste i da putanjske ravni imaju slučajnu raspodelu. Za srednju vrednost $\sin^3 i$ uzima se $\frac{2}{3}$ i izvodi se masa dvojnog sistema M, kao

$$M = \frac{3}{2N}\sum(M_1 + M_2)\sin^3 i. \qquad (19.48)$$

Za jednolinijske spektroskopski dvojne, čak ni ovoliko informacija nije na raspolaganju. Kao kod astrometrijski dvojnih, jedino će biti zadovoljavajuće određena funkcija mase koja će, u ovom slučaju, povući za sobom i nagib putanje. Sada je funkcija $f(M)$ definisana sa

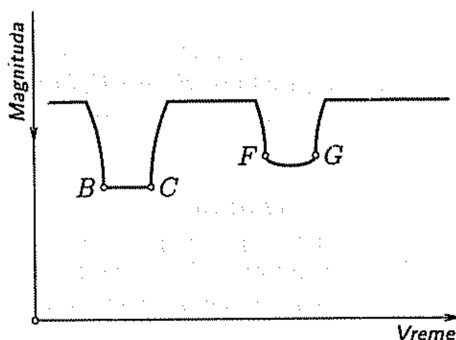
$$f(M) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}. \qquad (19.49)$$

Pomoću sličnog argumenta kao u prethodnom paragrafu, nalazimo da funkcija mase može da se izvede kao

$$f(M) = 3{,}985 \cdot 10^{-20}\frac{(a_1 \sin i)^3}{T^2}. \qquad (19.50)$$

Naravno, funkcija mase je u jedinicama mase Sunca.

Kriva brzine neće dati podatak o nagibu putanje, i ta veličina je u opštem nepoznata za spektroskopski dvojne. Međutim, situacija je bitno različita ukoliko je dvojni sistem eklipsni. Onda postoje dodatni podaci u obliku krive sjaja zvezdane veličine tokom vremena. Skoro veštačka forma ovog crteža (sl. 19.6) obično omogućava da se takve pomračne dvojne razlikuju od stvarno promenljivih zvezda. Slika 19.6 prikazuje idealizaciju takve krive sjaja. U opštem slučaju, postoje dva pomračenja po putanji, dva člana menjaju ulogu pomračioca. Na sl. 19.6 segment BC krive sjaja odgovara potpunom pomračenju male tople zvezde većom, hladnijom. Segment FG odgovara prstenastom pomračenju kada je manja zvezda bliža Zemlji. Kosi segmenti su zajedničke delimične faze, a između pomračenja nivo sjaja je skoro maksimalan. Ako zvezde nisu mnogo različite po dimenzijama, slučaj takvog totalnog i prstenastog pomračenja zahteva skoro perfektno poravnanje, tako da se vizura pruža u ravni putanje. Ispitajmo zahteve za pomračenja u nešto više detalja.



Слика 19.6

Projektovana daljina q centara dveju zvezda je jednostavno

$$q = (x^2 + y^2)^{1/2}. \tag{19.51}$$

Koristeći jednačinu (19.7), ovo može da se izrazi kao

$$q = r\left[\cos^2(v+\omega) + \sin^2(v+\omega)\cos^2 i\right]^{1/2},$$

tj.

$$q = r\left[1 - \sin^2(v+\omega)\sin^2 i\right]^{1/2}. \tag{19.52}$$

Varijacije q su nepodesne za analitički tretman zbog njihove zavisnosti od ekscentričnosti. Međutim, evidentno je iz (19.52) da ako postoji pomračenje ono će biti blizu tačaka $v + \omega = \pm 90°$. Uslovi za delimično i centralno pomračenje postoje, redom, za

$$q < R_1 + R_2, \qquad q < |R_1 - R_2|, \tag{19.53}$$

gde su R_1 i R_2 radijusi dveju zvezda. Za kružnu orbitu, iz (19.52) sledi da se ovi uslovi svode na

$$|\cos i| < \frac{R_1 + R_2}{a}$$

i

$$|\cos i| < \frac{|R_1 + R_2|}{a}. \tag{19.54}$$

Analiza krive sjaja je komplikovanija i ovde neće biti razmatrana. U prvoj aproksimaciji, gubitak u primljenoj svetlosti je proporcionalan pomračnoj površi udaljenije zvezde, ali izraz za to nije jednostavan. Međutim, varijacija sjaja po zvezdanom disku (zatamnjenje limba) mora se uzeti u obzir. Dalje, kako pokazuje jednačina (19.54), ako zvezdani radijus čini znatan deo velike poluose putanje pomračenja su verovatnija. Za takve tesne dvojne sisteme plimski, a u stvari rotacioni efekti, krive zvezdani oblik tako da on zaista nije sferni. Šta više, efekti refleksije biće značajni. Sve u svemu, imamo veoma zamršenu astrofizičku situaciju koja će biti razmršena iz posmatranja.

Kriva sjaja ne daje informacije o apsolutnim dimenzijama zvezdane putanje; osetljiva je na njene relativne dimenzije. Veličine koje mogu da se odrede iz analize krive sjaja su R_1/a, R_2/a i i. Ovo će proizvesti koristan suplement spektroskopskim podacima. Razmotrimo optimalni slučaj pomračne dvojne koja je, takođe, dvolinijska spektroskopski dvojna. Spektroskopski podaci daju, između ostalih parametara, veličine $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$. Dakle, odnos masa je poznat. Kriva sjaja daje nagib i koji može da se stavi u (19.47) dajući totalnu masu. Potom, pojedinačne mase mogu da se izračunaju. Dalje, velika poluosa se, takođe, dobija kao $a = a_1 + a_2$ i odnosi R_1/a i R_2/a dobijeni iz krive sjaja mogu da se konvertuju u vrednosti radijusa zvezda. Tako su dobijene i mase i dimenzije obe zvezde.

§ **19.7. Dvojni pulsar.** Vizuelne, spektroskopski i eklipsne dvojne su tri klasična tipa dvojnih zvezda koji su bili izučavani mnogo godina i obezbeđuju informaciju o zvezdanim masama. U novije vreme mnogo egzotičniji dvojni sistemi su bili otkriveni, takvi kao dvojni izvori X-zraka i famozni kandidati za crne rupe. Želimo da završimo glavu razmatranjem jednog takvog egzotičnog objekta, o dvojnom pulsaru, ali prvo neki opšti komentari.

Poslednji stupanj zvezdane evolucije su kompaktni objekti—beli patuljci, neutronske zvezde ili crne rupe. Beli patuljci se pojavljuju najčešće, ali oni su stvarno slabi. Oni su vidljivi u Sunčevom susedstvu i zaista se ne mogu detektovati na rastojanju većem od kiloparseka. Neutronske zvezde su stvarno još slabije i optički su nevidljive. Međutim, one se razaznaju kao pulsari i nalaze se u Galaksiji i čak u najbližim susednim galaksijama. Mora da postoji mnogo neutronskih zvezda čija je pulsacija mrtva i koje su, dakle, potpuno nevidljive, a mogu da se detektuju samo ako su bile članovi dvojnog sistema. Isto važi za crne rupe. Po definiciji, radijacija ne može da napusti crnu rupu. Zaista postoji evidencija ljubičaste aktivnosti u njenom susedstvu, koja je uzrokovana njenim intenzivnim gravitacionim poljem, ali kvantifikacija toga polja moguća je samo ako je crna rupa dvojni sistem.

Najsigurniji kandidat za crnu rupu je izvor X-zraka Cygnus X1. Njemu se pridružuje zvezda devete prividne veličine HDE 226868 koja je jednolinijska spektroskopski dvojna. Emisija X-zraka jasno dolazi iz neposredne okoline nevidljive komponente, a kratkoperiodične fluktuacije u ovoj emisiji pokazuju da pomoćna zvezda mora da bude kompaktan objekt. Analiza jednolinijske spektroskopski dvojne daje funkciju mase koja je dosta mala, četvrtina Sunčeve mase. Jednačina (19.49) zadovoljava uslov

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \simeq 0{,}25 \csc^3 i. \qquad (19.55)$$

Sada funkcija mase uvek daje podcenjenu vrednost mase nevidljive komponente, često, kao u ovom slučaju, veoma podcenjenu. Za realnu ocenu M_2 moramo da uvrstimo vrednost za M_1 u (19.55). Zvezda koja je posmatrana ima spektralne karakteristike masivnog superdžina. Ocena M_1 se, dakle, čini u opsegu od 20–30 $M_\odot$. Donja granica za M_2 može da se izvede iz (19.55) rešavanjem algebarske jednačine dobijene stavljanjem $M_1 = 20$ i $i = 90°$. Odatle je

$$M_2 \geq 5{,}45\, M_\odot \qquad (19.56)$$

Teorija zvezdane strukture predviđa maksimalne mase i za bele patuljke i neutronske zvezde. Dok maksimum neutronske zvezde nije precizno poznat, uopšteno je za red veličine da su oba maksimuma manja od desne strane (19.56). Tako se otkriva da je nevidljiva komponenta HDE 226868 crna rupa.

Neki astronomi će smatrati da postoje nepreciznosti u argumentaciji koja se tiče Cygnus X1. Mnogo jasnije izdvojen primer dvojnog sistema koji sadrži kompaktne objekte dat je dvojnim pulsarom PSR 1913+16. Putanjski elementi ovog objekta su mereni sa ekstremno visokom preciznošću.

Dvojni pulsar je otkriven 1974. g. Bilo je skoro moguće neposredno odrediti putanjske elemente korišćenjem ponavljanja pulsirajuće frekvencije kao spektralne linije za merenje Doplerovskog pomaka. U prvom koraku ovo može slededi potpuno klasičan postupak. Rezultujući putanjski elementi dati su sa niskom preciznošću u tabeli 19.1. Funkcija mase može da se izračuna korišćenjem (19.50). Odatle je

$$f(M) = 0{,}13. \qquad (19.57)$$

Ono što čini posebno interesantnim dvojni pulsar je činjenica da relativistički efekti postaju prividni. Najvažnije

Tabela 19.1. Putanjski elementi za PSR 1913+16

$a_1 \sin i$	$7{,}02 \cdot 10^5$ km
e	0,617
ω	179°
T	$0^d{,}323$

od toga je prednjačenje apsidne linije, porast argumenta periastrona. Prilagođavajući jednačinu (6.81), nalazimo da je prednjačenje periastrona u radijanima po revoluciji dato sa

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\mu}{c^2 a(1-e^2)}, \tag{19.58}$$

gde je $\mu = G(M_1 + M_2)$.

Nepoznato a može da se eliminiše iz ove jednačine korišćenjem uslova da je $n^2 a^3 = \mu$. Koristeći poznate vrednosti perioda i ekscentriciteta, sledi da je

$$\dot{\omega} = 2^\circ{,}1 (M_1 + M_2)^{2/3}\,\text{god}^{-1}, \tag{19.59}$$

gde su M_1 i M_2 u masama Sunca.

Jednačina (19.59) daje prognozu relativističkog prednjačenja periastrona, koji je zaista dovoljno velik da bi bio merljiv. Pre upoređenja ovog sa posmatranim iznosom ($4^\circ{,}226\,\text{god}^{-1}$), neophodno je odstraniti svako prednjačenje dato Njutnovim uzrocima. Priroda pratioca pulsara je nepoznata, ali to ne može da bude normalna zvezda. Napominjemo da je vrednost $a_1 \sin i$ koja je izvedena, veličine oko radijus Sunca. Znači, ma koja normalna zvezda trpi strogu plimsku distorziju zbog njene blizine pulsaru, i to će uzrokovati da je razmatrani pomak periastrona znatno veći od posmatranog. Međutim, pratilac mora da bude kompaktan objekt, bilo beli patuljak, neutronska zvezda ili crna rupa. Za sve njih važi da je pomak periastrona zbog modifikacija Keplerove putanje, koje proističu iz plimskih distorzija, zanemarljiv. Dalje, činimo pretpostavku da je posmatrani pomak periastrona potpuno relativistički, mada je moguće da postoji samo mali Njutnovski doprinos ako je pratilac veoma brzo rotirajući beli patuljak.

Dodeljivanje $\dot{\omega}$ posmatrane vrednosti $4^\circ{,}226\,\text{god}^{-1}$ u jednačini (19.59) omogućava da se ukupna masa odredi kao

$$M_1 + M_2 = 2{,}85\,M_\odot. \tag{19.60}$$

Kako je ova masa raspodeljena među pulsarom i njegovim pratiocem zavisi od nagiba putanje. Jednačine (19.57) i (19.60) mogu da se kombinuju, dajući

$$M_2 \sin i = 1{,}02\,M. \tag{19.61}$$

Posmatranja koja čine signali sa pulsara u praksi nisu merenja Doplerovog pomaka, već se sastoje od zapisa trenutaka pristizanja pulseva tokom širokog vremenog intervala. Usvojene vrednosti za putanjske parametre i period pulsara uneti su u jednu detaljnu formulu vremeniranja radi prognoze trenutaka pristizanja pojedinih pulseva. Razlika između predviđenih i posmatranih trenutaka prijema koristi se da se izvedu parametri po metodi najmanjih kvadrata. Ovakva analiza ne daje samo putanjske elemente i period pulsara, već i iznos njihove promene. Koristan pregled ovih metoda, i dvojnih pulsara uopšte, može se naći kod Vila (WILL, 1981). Ovde ćemo se zadovoljiti postavljanjem opšteg oblika formule vremeniranja.

Pretpostavimo da je puls emitovan u koordinatnom trenutku t i posmatran u trenutku t_0. Onda, koristeći kvazi-Dekartov koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u centru masa, jednačina (11.52) u ovoj primeni daje

$$t_0 = t_e + \frac{\rho}{c} + \frac{2m}{c}\ln\left(\frac{r + r_0 + \rho}{r + r_0 - \rho}\right). \tag{19.62}$$

Ovde je r_0 rastojanje od centra masa i ρ je rastojanje pulsara od posmatrača u trenutku emitovanja, dok je r, kao i ranije, razdvojenost dva tela. Parametar m je Švarcšildov poluprečnik za pratioca. Efekt sopstvenog gravitacionog polja pulsara na trenutke pulsacija biće konstantan i može se zanemariti. Kako je $r_0 \gg r$, imamo, s visokom tačnošću, $\rho = r_0 + z$ i tako se (19.62) redukuje na

$$c(t_0 - t_e) = r_0 + z + \frac{2GM_2}{c^2}\ln\left(\frac{2r_0}{r - z}\right). \tag{19.63}$$

Ova formula daje trenutke prijema pulsacija za baricentričnog posmatrača, za kojeg pretpostavljamo da su posmatrani trenuci prijema već svedeni na tu tačku. Sledi da je t_0 sopstveno vreme za baricentričnog posmatrača, ali t_e nije sopstveno vreme s_e za pulsar. Koristeći (11.47), sa zadovoljavajućom tačnošću, izvodi se

$$\frac{dt_e}{ds_e} = 1 + \frac{m}{r} + \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{c^2}. \tag{19.64}$$

Potrebno je malo pažnje u interpretaciji ove jednačine; parametar $m = GM_2/c^2$ kao ranije, ali V_1 je brzina pulsara u odnosu na centar masa.

U stvari,

$$V_1^2 = \frac{a_1^2}{a^2}V^2 = \frac{GM_2^2}{M_1 + M_2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{19.65}$$

Smenom u (19.64) dobija se rezultat

$$\frac{dt_e}{ds_e} = 1 - \frac{M_2}{2(M_1 + M_2)}\frac{m}{a} + \frac{GM_2}{c^2}\left(\frac{M_1 + 2M_2}{M_1 + M_2}\right)\frac{1}{r}. \tag{19.66}$$

Pri integraljenju (19.66) ne treba mnogo da se brinemo o konstantnim članovima. To može da se ukloni predefinisanjem jedinica s. Problem je sličan skaliranju TDB i TDT koji su razmatrani u §10.7. Ponovo, integraleći, koristi se ekscentrična anomalija i izvodi se jednačina paralelna sa (10.42), naime

$$t_e = s + \frac{GM_2}{c^2 a}\left(\frac{M_1 + 2M_2}{M_1 + M_2}\right)\frac{e\sin E}{n}. \tag{19.67}$$

Smenjivanje ovog rezultata u (19.63) daje

$$c(t_0 - s) = r_0 + z + cT_1 \sin E + \frac{2GM_2}{c^2}\ln\left(\frac{2r_0}{r - z}\right), \tag{19.68}$$

gde parametar T_1 ima dimenzije vremena i dat je sa

$$T_1 = \frac{GM_2}{c^2 a}\left(\frac{M_1 + 2M_2}{M_1 + M_2}\right)\frac{eT}{2\pi}. \tag{19.69}$$

Poslednji član je uključen u analizu, ali je od marginalnog značaja. Međutim, parametar T_1 na dugim tajming serijama može da se odredi sa tačnošću malo boljom od 10%. Jedina nepoznata u (19.69) osim masa je velika poluosa a. To je ponovo eliminisano korišćenjem $n^2 a^3 = \mu$. Onda je

$$T_1 = 2{,}94 \cdot 10^{-3} M_2 \frac{M_1 + 2M_2}{M_1 + M_2} \text{ sekundi}, \tag{19.70}$$

gde su mase u jedinicama Sunčeve mase.

Vrednost određena za T_1 je 4,4 milisekundi. U delovima radijalne brzine, ovaj parametar daje varijacije putanje uzrokovane sekundarnim Doplerovim efektom i gravitacionim crvenim-pomakom. Koristeći ove vrednosti, nametnut je drugi uslov za mase. Kako je poznato da je ukupna masa $2{,}85 M_\odot$, dve mase u principu mogu da se odrede nezavisno. Koristeći ovaj argument, izvedeno je da su dve mase približno jednake u okviru tačnosti određivanja (oko pet posto). Onda iz (19.61) može da se izvede da je $\sin i \simeq 0{,}7$.

Sa stanovišta ovih zaključaka, najpovoljnije objašnjenje dvojnog pulsara je da taj sistem zahvata dve neutronske zvezde, od kojih je samo jedna aktivna kao pulsar.

Zadaci

19.1. Dokazati da, uprkos efektima projekcije, II Keplerov zakon važi za prividne orbite vizuelno dvojne, u stvari da radijus vektor od glavne do pomoćne zvezde prebriše jednake površine za jednaka vremena.

19.2. Na elipsi, ma koja duž kroz centar naziva se prečnikom. Položaji sredina duži paralelnih ovom prečniku leže na pravoj liniji koja se naziva konjugovani prečnik. Dokazati da su osobenosti konjugovanih prečnika sačuvane u projekciji. Pokazati odatle da položaj male poluose može da se identifikuje na prividnoj putanji vizuleno dvojne samo iz geometrijskih principa bez mogućnosti dinamičkih razmatranja.

19.3. Prividna orbita (fiktivna) vizuelno dvojne sa periodom 125 godina je krug prečnika 10″. Dvojna ima paralaksu 0″,25. Centar prividne orbite je 3″ od glavne zvezde. Naći ukupnu masu dvojnog sistema.

Objasniti zašto su podaci nedovoljni da se primeni metoda Til-Inesa.

19.4. Dokazati da je, u bilo kojoj tački putanje, odnos položajnog ugla θ dvojne i prave anomalije v dat jednačinom

$$\mathrm{tg}(\theta - \Omega) = \cos i \,\mathrm{tg}(v + \omega).$$

19.5. Posmatrana zvezda opisuje putanju velike poluose 2″,6 (posle korekcije za projekciju) oko nevidljivog pratioca. Period je 50 godina. Iz spektroskopskih posmatranja ocenjeno je da je masa zvezde $2{,}2 M_\odot$. Izračunati masu nevidljivog pratioca i dimenzije relativne putanje u AJ, ako je paralaksa zvezde 0″,375.

19.6. Pokazati da pretpostavka, da su ravni putanja dvolinijskih spektroskopski dvojnih slučajno orijentisane, daje za formalnu srednju vrednost $\sin^3 i$ da je $\frac{3}{16}\pi$. Objasniti zašto je veća (empirijska) vrednost $\frac{2}{3}$ korišćena u jednačini (19.48).

19.7. Pokazano je da kriva brzine jednolinijske spektroskopski dvojne može adekvatno da se predstavi sa

$$R = 90\cos(1{,}5t + 0{,}25) + 3\cos(3t - 0{,}5),$$

gde je R radijalna brzina u km/s i t je vreme mereno u danima. Izvesti vrednosti za putanjske elemente e, ω i τ i izračunati funkciju mase.

ПРИЛОГ А

Tenzorski metodi

§ **A.1. Uvod.** Proučavanje opšte teorije relativnosti zahteva poznavanje zakrivljenih prostor-vremena. Ovaj uslov je najbolje ispunjen ako se iskoristi tenzorski račun koji omogućava da tvrđenja važe u odnosu na proizvoljni koordinatni sistem. Ovo je moguće jer zakoni transformacije tenzora mogu biti precizno definisani na prilično opšt način. Odatle sledi da, ako su komponente tenzora date u nekom koordinatnom sistemu one mogu lako biti određene u bilo kom drugom koordinatnom sistemu korišćenjem samo zakona transformacije između te dve grupe koordinata. Kada se jednom izvede, tenzorska jednačina je nezavisna po svojoj prirodi u odnosu na izbor koordinatnog sistema.

Samo na pojedinim mestima u ovoj knjizi neophodno je pozvati se na tenzorske metode. Obično je dovoljno koristiti se „običnim vektorima". Strogo govoreći, ti vektori su zapravo specijalni slučajevi tenzora; oni su tenzori (prvog reda) koji se primenjuju u trodimenzionom Euklidskom prostoru u pravouglim koordinatama. U sledećem paragrafu razmotrićemo tenzore ne uzimajući u obzir ova pojednostavljujuća ograničenja, ali prvo ćemo razmotriti i pravila obične vektorske analize, koja zapravo nastaju iz ovih ograničenja.

Vektor $\mathfrak{a}$ ima tri komponente i može biti predstavljen kao

$$\mathfrak{a} = (a_x, a_y, a_z). \tag{A.1}$$

Komponente vektora zavise od izbora pravouglog koordinatnog sistema (x, y, z). Ako, na primer, izvršimo rotaciju koordinatnog sistema, komponente vektora biće modifikovane na isti način kao i same koordinate. Pretpostavimo da su nove koordinate (x', y', z') povezane sa starim koordinatama sledećim sistemom jednačina

$$\begin{aligned} x' &= R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ y' &= R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ z' &= R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ova transformacija se može predstaviti matricom rotacije $\mathfrak{R}$ čiji se elementi pojavljuju na desnoj strani jednačine (A.2). Komponente vektora u novom koordinatnom sistemu, u vektorskoj formi, često se predstavljaju kao

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{R}\mathfrak{a}, \tag{A.3}$$

s tim što i $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}'$ treba da se shvate kao vektori kolone, a ne kao vektori vrste, kao što je to predstavljeno u formuli (A.1).

Poznato je kako se vektori mogu sabirati, oduzimati i množiti skalarom. Tako vektor $K\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ima komponente $(Ka_x + b_x, Ka_y + b_y, Ka_z + b_z)$. Proizvod vektora je definisan na dva suštinski različita načina

❊ **Definicija.** *Skalarni proizvod* (ili unutrašnji proizvod) dva vektora $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, u oznaci $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, je skalarna veličina data sa

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{A.4}$$

❊ **Definicija.** *Vektorski proizvod* dva vektora $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ je vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ čije su komponente date sa

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \tag{A.5}$$

Lako se uočava da je

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}, \tag{A.6}$$

tako da je redosled vektora u vektorskom proizvodu veoma važan.

Kvadrat *intenziteta* vektora određen je skalarnim proizvodom vektora sa samim sobom

$$a^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{A.7}$$

Kako vektor ima smer, to je ugao θ između dva vektora $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ izražen preko skalarnog proizvoda, kao

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = ab\cos\theta. \tag{A.8}$$

Kao posledicu ove relacije imamo da je skalarni proizvod dva ortogonalna vektora jednak nuli.

Vektorski proizvod $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, s druge strane, predstavlja vektor koji je ortogonalan na vektore $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$. Njegov intenzitet je $ab\sin\theta$.

❊ *Trostruki skalarni proizvod* tri vektora je u oznaci $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$. To je skalarna veličina definisana sa

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}). \tag{A.9}$$

Ova veličina može biti izražena, imajući u vidu prethodne definicije, pomoću determinante trećeg reda:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{A.10}$$

Odmah se uočava da je rezultat trostrukog proizvoda invarijantan na cikličko pomeranje vektora-komponenata trostrukog proizvoda.

Konačno, primetimo da se često koristi trostruki vektorski proizvod u obliku važne identičnosti

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}. \tag{A.11}$$

Time smo naveli najvažnije formule obične vektorske analize. Kao što je već pomenuto, one su posebni slučajevi mnogo opštijih rezultata tenzorskog računa koji su razvijeni u ovom prilogu.

Vektori koji su bili razmotreni u ovom paragrafu mogu pre biti nazvani pravouglim trovektorima. Dok svi rezultati navedeni ovde mogu biti uopšteni, uopštavanje vektorskog proizvoda nije plodonosno, te nije razmotreno u daljem tekstu.

A.2. Tenzori. Kada su bili uvedeni vektori u ne-Euklidskim prostorima, naglašeno je da treba praviti razliku između dva tipa vektora, *kontravarijantnih* i *kovarijantnih*. Ovi će tipovi vektora kasnije biti definisani, ali treba naglasiti da se ovi prvi označavaju sa gornjim indeksima, a poslednji sa donjim. Izvesne simetrične osobine u korišćenju gornjih i donjih indeksa svakako postoje i o njima će biti reči kasnije. Analiza se značajno pojednostavljuje upotrebom jednostavnih pravila. Stoga, počnimo sa dve konvencije.

Konvencija 1. U n-dimenzionim prostorima jedna pojava indeksa (bilo gornjeg ili donjeg) u svakom članu jednačine, znači da se pojavljuje n takvih jednačina, kada indeks uzima vrednosti od 1 do n.

Ovo označava, na primer, sistem jednačina

$$a_\lambda = b_\lambda + c_\lambda, \qquad \lambda = 1, \ldots, n$$

koji se po konvenciji može napisati u kraćem obliku

$$a_\lambda = b_\lambda + c_\lambda. \tag{A.12}$$

Konvencija 2. U n-dimenzionim prostorima dvostruka pojava indeksa u bilo kom članu jednačine označava sumiranje tog člana po svih n vrednosti indeksa.

To znači, na primer,

$$a^\lambda b_\lambda \equiv \sum_{\lambda=1}^{n} a^\lambda b_\lambda. \tag{A.13}$$

Može se pokazati da se na tenzorske jednačine mogu primeniti sledeća pravila, koja se mogu koristiti i za proveru tenzorske prirode tih jednačina:

(i) Ako se indeks pojavljuje jednom u nekom članu jednačine, on se mora samo jednom pojaviti u istoj poziciji (kao gornji ili kao donji) i u svim ostalim članovima te jednačine.

(ii) Ako se indeks pojavljuje dva puta u nekom članu, onda je to nemi indeks i treba da se pojavi jedanput kao donji, a jedanput kao gornji indeks [kao u (A.13)].

(iii) Ako se indeks pojavljuje tri puta u bilo kom članu, konvencija se koristi na pogrešan način.

U n-dimenzionom prostoru, tački se pridružuje n realnih koordinata $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Koordinatni sistem može biti uopšten. Pravougle koordinate su vrlo poseban slučaj; one postoje čak i u ne-Euklidskim prostorima. Pretpostavimo da je izvršena transformacija starih koordinata u nove $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$. Svaka od novih koordinata biće proizvoljna funkcija početnih koordinata. One nisu ograničene na linearne kombinacije kao u transformacionim jednačinama (A.2). Jedini zahtev je da postoji jednoznačna inverzna transformacija od $\bar{x}^\lambda$ do x^λ, tako da možemo pisati

$$\begin{aligned} \bar{x}^\lambda &= \bar{x}^\lambda(x^1, \ldots, x^n) \\ x^\lambda &= x^\lambda(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n). \end{aligned} \tag{A.14}$$

Nastavićemo sada sa definicijom nekoliko tipova tenzora. Ono što definiše tenzor nekog tipa jesu transformaciona pravila koja se primenjuju pri transformaciji koordinata. Ova pravila su posebno jednostavna za tenzor reda nula.

Definicija. Tenzor reda nula, ili *skalar*, je jedna funkcija n koordinata čija se *vrednost* ne menja pod koordinatnim transformacijama.

Definicije tenzora reda jedan, tj. vektora, su malo komplikovanije. Postoje dva tipa definicija i one upravo slede.

Definicija. Kontravarijantni vektor, U^λ, i kovarijantni vektor, V_λ, imaju n komponenata i sve komponente jesu funkcije koordinata koje se transformišu po sledećem zakonu:

$$\bar{U}^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} U^\alpha \qquad (A.15)$$

$$\bar{V}_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} V_\alpha . \qquad (A.16)$$

U Euklidskim prostorima, kada su korišćene samo pravougle koordinate, nije bilo neophodno praviti razliku između kontravarijantnih i kovarijantnih vektora jer su se one u tom slučaju poklapale. U ostalim slučajevima neophodno je praviti razliku. Primetimo još da su na desnim stranama jednačina (A.15) i (A.16) sume od n članova (po konvenciji 2) jer je indeks α nemi indeks.

Važan primer kontravarijantnog vektora je skup n diferencijala $(\mathrm{d}x^\lambda)$. Pod koordinatnom transformacijom novi skup diferencijala $(\mathrm{d}\bar{x}^\lambda)$ će biti

$$\mathrm{d}\bar{x}^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}x^\alpha , \qquad (A.17)$$

što je oblik identičan obliku jednačine (A.15).

Kovarijantni i kontravarijantni tenzori višeg reda kao i mešoviti tenzori mogu biti definisani uopštavanjem i kombinovanjem transformacionih pravila (A.15) i (A.16). Postoji samo jedan tenzor višeg reda koji se koristi u ovoj knjizi, naime kovarijantni tenzor reda dva koji se definiše na sledeći način:

Definicija. Kovarijantni tenzor reda dva, $W_{\lambda\mu}$, ima n^2 komponenata koje predstavljaju funkcije koordinata i transformišu se, pri koordinatnoj transformaciji, na sledeći način

$$\bar{W}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} W_{\alpha\beta} . \qquad (A.18)$$

Primetimo da na desnoj strani ove jednačine imamo sumiranje i po α i po β.

Tenzori iste vrste mogu biti međusobno kombinovani sabiranjem, oduzimanjem i množenjem skalarom. Rezultat će biti tenzor iste vrste. Izvestan broj drugih operacija je moguće sprovesti nad tenzorima, ali jedna od njih, unutrašnji proizvod, se odmah nameće.

Definicija. Unutrašnji proizvod dva tenzora je njihov proizvod u kome se kontravarijantni indeks jednog od njih i kovarijantni indeks drugog gube u sumiranju, tj. taj indeks postaje nemi indeks.

Ako se uzima unutrašnji proizvod dva vektora, jedan od njih mora biti kovarijantni vektor, a drugi kontravarijantni vektor. Unutrašnji proizvod dva kovarijantna ili dva kontravarijantna vektora nije definisan. Rezultat uzimanja unutrašnjeg proizvoda dva tenzora je uvek tenzor čiji je red za jedan manji od zbira redova dva ulazna tenzora.

Primer. *Dokazati da je unutrašnji proizvod kontravarijantnog vektora U^λ i kovarijantnog vektora V_λ skalar.*

Potrebno je pokazati da je vrednost unutrašnjeg proizvoda $U^\lambda V_\lambda$ invarijantna u odnosu na koordinatne transformacije. Neka imamo vrednost tog skalarnog proizvoda u jednom koordinatnom sistemu (x^λ). Kada se izvrši transformacija u drugi koordinatni sistem $(\bar{x}^\lambda)$, skalarni proizvod $\bar{U}^\lambda \bar{V}_\lambda$, uz pomoć (A.15) i (A.16), može biti napisan u formi

$$\bar{U}^\lambda \bar{V}_\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\lambda} U^\alpha V_\beta. \tag{A.19}$$

Uvedimo sada Kronekerov delta simbol δ^μ_ν sledećom definicijom

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\nu &= 1, \quad \text{kada je} \quad \mu = \nu \\ \delta^\mu_\nu &= 0, \quad \text{kada je} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Tada se jasno vidi da se jednačina (A.19) može napisati u obliku

$$\bar{U}^\lambda \bar{V}_\lambda = \frac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha} U^\alpha V_\beta = \delta^\beta_\alpha U^\alpha V_\beta$$

tj.

$$\bar{U}^\lambda \bar{V}_\lambda = U^\alpha V_\alpha = U^\lambda V_\lambda.$$

Dokaz je završen.

Za izvođenje rezultata datih u zadacima koji slede, mogu biti korišćeni slični metodi, mada delimično komplikovaniji.

Zadatak A.1. Dokazati da je Kronekerov delta simbol mešoviti tenzor drugog reda čije komponente imaju iste vrednosti u svim koordinatnim sistemima. Potrebno je dokazati da je

$$\bar{\delta}^\mu_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\delta^\alpha_\beta. \tag{A.21}$$

Zadatak A.2. Pokazati da je unutrašnji proizvod kovarijantnog tenzora reda 2 i kontravarijantnog vektora kovarijantni vektor.

§ A.3. Metrički tenzor.

Do sada ništa nije rečeno niti razjašnjeno u vezi sa prirodom geometrije prostora o kome diskutujemo. Ta je geometrija opisana fundamentalnim tenzorom $g_{\mu\nu}$ koji se zove i *metrički tenzor*. Kao što oznake već ukazuju, radi se o kovarijantnom tenzoru reda 2. Taj je tenzor takođe simetričan, što znači da je

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{A.22}$$

Metrički tenzor određuje geometriju prostora kroz metriku koja može, s dovoljnom opštosti za naše ciljeve, da bude napisana kao

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{A.23}$$

Prostor sa ovakvom formom metrike, tj. kvadratnom formom po diferencijalima, naziva se *Rimanskim*.

Desna strana jednačine (A.23) dobija se uzimanjem unutrašnjeg proizvoda metričkog tenzora sa diferencijalima koji predstavljaju komponente kontravarijantnog vektora. Jasno je da veličina ds^2, a stoga i ds, predstavlja skalar. Ovaj poslednji skalar je poznat i kao *element intervala*; u prostoru on je ekvivalentan elementu dužine. Ako su poznate komponente tenzora $g_{\mu\nu}$ u nekoj tački (x^λ), tada metrika daje mogućnost da se odredi element intervala između dve susedne tačke (x^λ) i $(x^\lambda + dx^\lambda)$.

Metrika trodimenzionog metričkog prostora može biti predstavljena u obliku

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{A.24}$$

gde su (x, y, z) zamenili formalne koordinate (x^1, x^2, x^3). Treba primetiti dve stvari. Prvo, jednostavna forma metrike jeste posledica korišćenja pravouglih koordinata. Drugo, takve koordinate ne postoje u opštem slučaju u krivim prostorima. Razmotrimo, na primer, sledeća dva problema:

Zadatak A.3. Pokazati da se metrika trodimenzionog Euklidskog prostora u sfernim koordinatama (r, θ, ϕ) može napisati u obliku

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{A.25}$$

Zadatak A.4. Razmatrajući potprostor $r = 1$ trodimenzionog Euklidskog prostora, pokazati da je metrika na jediničnoj sferi data sa

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{A.26}$$

Razmotrimo proizvoljni kontravarijantni vektor V^λ. Ako uzmemo unutrašnji proizvod tog vektora sa metričkim tenzorom dobija se kovarijantni vektor. Tako dobijeni vektor i polazni vektor nazivaju se *pridruženim vektorima*, i obično se označavaju istim simbolom, tj.

$$V_\lambda = g_{\lambda\mu} V^\mu \tag{A.27}$$

zato što se oni shvataju kao različite forme istog vektora. Ovo je razvijeno dalje sledećom definicijom.

Definicija. Kvadrat intenziteta jeste unutrašnji proizvod njegove kovarijantne i kontravarijantne forme. Dakle,

$$V^2 = V^\lambda V_\lambda = g_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu. \tag{A.28}$$

Intenzitet vektora—pozitivni koren iz V^2—jeste skalar.

Pretpostavimo sada da imamo dva vektora a^λ i b^λ u istoj tački prostora. Intenziteti a i b ovih vektora mogu biti izvedeni iz tek datih definicija, a ugao θ između dva vektora je definisan jednačinom

$$ab \cos\theta = a^\lambda b_\lambda. \tag{A.29}$$

Zadatak A.5. Definišimo kontravarijantni vektor dat sa

$$V^\lambda = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

u pravouglim koordinatama. Odrediti komponente pridruženog vektora V_λ u sfernim polarnim koordinatama i pokazati da je njegov intenzitet dat sa

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2.$$

Zadatak A.6. Dokazati da komponente sopstvenog kretanja u rektascenziji i deklinaciji (μ_α, μ_δ), mogu biti shvaćene i kao kontravarijantni vektor i da je intenzitet tog vektora dat sa

$$\mu^2 = \cos^2\delta \, \mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2.$$

§ A.4. Geodezijske.

Kriva u n-dimenzionom prostoru je neprekidna, jednoparametarska familija tačaka, što može biti napisano

$$x^\lambda = f_\lambda(p), \tag{A.30}$$

što ukazuje da je svaka koordinata tačke na krivoj funkcija parametra p. Neka su sada A i B dve tačke na krivoj Γ u kojima parametar uzima vrednosti P_A i P_B, redom. Tada dužina krive od A do B, odnosno interval, može biti izračunat integracijom $\mathrm{d}s$ duž krive. Stoga se taj interval može napisati kao

$$s = \int_{\Gamma A}^{B} \mathrm{d}s = \int_{P_A}^{P_B} \left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}p}\right)^{1/2} \mathrm{d}p. \tag{A.31}$$

Parametar p može biti izabran na više načina, i moguće je, a i najpogodnije, da se za parametar izabere dužina luka krive s. Interval od A do B koji se određuje neće, naravno, zavisiti od izbora parametra nego samo od krive Γ koja povezuje dve tačke. Ona kriva linija koja ima minimalni interval je posebno značajna i naziva se *geodezijska*.

Moguće je pokazati (na primer, McVittie, 1965), da geodezijska linija mora zadovoljavati sledeći sistem diferencijalnih jednačina.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(g_{\lambda\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}p}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}p} = 0. \tag{A.32}$$

Parametar p u ovom slučaju ne može biti izabran na proizvoljan način; on mora biti *afini parametar*, što znači da je on proporcionalan intervalu duž geodezijske linije meren od proizvoljno izabrane tačke.

Svaka od n jednačina (A.32) je diferencijalna jednačina drugog reda. Integracijom jednačina geodezijske, uvodi se $2n$ konstanti integracije. Ovo ukazuje da je moguće zahtevati da geodezijska prolazi kroz dve proizvoljno izabrane tačke, čije će koordinate odrediti konstante integracije. Konačno, adaptirani parametar krive može biti povezan sa intervalom s preko metrike, što može biti napisano na sledeći način.

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}p}. \tag{A.33}$$

Zadatak A.7. Napisati diferencijalne jednačine geodezijskih linija za jediničnu sferu upotrebom metrike date jednačinom (A.26). Pokazati da ekvator $\theta = \frac{1}{2}\pi$ i meridijani $\phi = \text{const.}$ jesu geodezijske.

§ A.5. Zakrivljeno prostor-vreme.

Sve do sada smo prećutno pretpostavljali da kvadratna forma metrike

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{A.23}$$

jeste pozitivno definitna u svim tačkama. Ovo važi u pravim prostorima (misli se, nema vremenskih dimenzija, pp.). Kao posledicu imamo činjenicu da je elementarni interval realan broj, kao što su i intenziteti svih vektora. U opštoj relativnosti, ispituje se četvorodimenziono prostor-vreme i ovo napred rečeno više ne važi. Tačke prostor-vremena reprezentuju događaje sa tri prostorne i jednom vremenskom

koordinatom. Sada je potrebno napraviti razliku između vremenskih i prostornih intervala. Svaki od njih može biti predstavljen preko intervala s, ali treba primetiti da je u jednom slučaju ovaj interval realan broj, a u drugom imaginaran broj.

Ova situacija će se najbolje ispitati ako se pođe od jednostavne metrike u specijalnoj relativnosti koja je Euklidska. Najprirodnije proširenje metrike (A.23) bi bilo sledeće

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2.$$

Tada bi prostorni intervali bili realni, a vremenski imaginarni brojevi. Iako bi ovo bila potpuno važeća formulacija, u ovoj knjizi će biti korisnija suprotna konvencija zbog sledećeg razloga. Vremenski intervali se u astronomiji mogu meriti direktno, dok se rastojanja izvode iz merenja vremena ili ugaonih merenja. Metrika prilagođena specijalnoj relativnosti, stoga, ima oblik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{A.34}$$

Tada se uočava da $\mathrm{d}s$ ima dimenziju vremena i da je realan broj za vremenske intervale.

Ista razmatranja ostaju da važe i za krivo prostor-vreme opšte teorije relativnosti. Interval između dva različita susedna događaja može biti realan, imaginaran, ili jednak nuli. Tada se kaže da je interval vremenski, prostorni ili nulti, redom. Isto važi i za intenzitete vektora, koji mogu biti realni, imaginarni ili jednaki nuli.

Cela analiza izvedena u prethodna tri paragrafa važi i za prostor-vreme kao analogon prostoru. Posebno se izdvajaju jednačine geodezijskih (A.32) koje ostaju nepromenjene. Sada, međutim, postoje tri tipa geodezijskih linija: vremenske, prostorne i nulte, već u zavisnosti od tipa intervala duž koga te linije idu. Kriva u prostor-vremenu, i posebno geodezijska, je neprekidan skup događaja. Ako ovi događaji odgovaraju onim događajima koje opaža posmatrač, onda se za krivu kaže
❊ da je posmatračeva *svetska linija*.

Vremenske i nulte geodezijske su vrlo važne u opštoj relativnosti. One odgovaraju, redom, svetskim linijama materijalnih čestica (ili posmatrača) i fotona koji se kreću slobodno u gravitacionom polju. Nećemo koristiti prostorne geodezijske linije posebno, mada ćemo za predstavljanje pravaca koristiti vektore prostornog tipa. Sledeće definicije će ovo dodatno razjasniti.

Definicija. Za dva vektora se kaže da su ortogonalni ako je njihov unutrašnji proizvod jednak nuli.

Definicija. Jedinični vektor je svaki vektor čiji je kvadrat intenziteta jednak bilo $+1$ ili -1. Za prostorne vektore intenzitet će biti interpretiran kao pozitivan broj pomnožen sa i (imaginarna jedinica).

Sada, za bilo koju krivu možemo definisati tangentni vektor q^λ u bilo kojoj tački sa

$$q^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}p}, \tag{A.35}$$

gde je p parametar krive. Ako je ova kriva svetska linija nekog posmatrača, ona je vremenska kriva i tangentni vektor je takođe vektor vremenskog tipa. Sada ćemo formulisati jedno tvrđenje važno za povezivanje opšte relativnosti i položajne astronomije.

Tvrđenje. Pravac, tj. koordinatna osa, za posmatrača može biti definisana kao prostorni vektor ortogonalan na posmatračevu svetsku liniju.

Ugao između dva vektora je dat formulom (A.29), i po toj definiciji, koja još uvek važi, možemo pisati da je

$$ab\cos\theta = g_{\lambda\mu}a^{\lambda}b^{\mu}. \tag{A.36}$$

Kako se opšta relativnost može u lokalnom smatrati specijalnom relativnosti, rezultat sledećeg problema ima opšti značaj.

Zadatak A.8. Pokazati da, u specijalnoj relativnosti, ugao između dva prostorna vektora može biti realan, ali da je ugao između dva vremenska vektora imaginaran.

Ovaj dodatak je, zbog neophodnosti, dao kratak i izabran opis tenzorskih metoda. Čitalac koji želi potpunije informacije o ovim metodam, a i uopšte o teoriji relativnosti, treba da konsultuje neki od mnogih specijalizovanih tekstova o ovoj problematici (na primer, SCHUTZ, 1984).

Прилог Б

Astronomske konstante

§ B.1. Fundamentalne konstante.

Najnoviju reviziju sistema astronomskih konstanti izvršila je IAU 1976 Taj sistem (IAU, 1977) se koristi u godišnjim almanasima od 1984. Za tu godinu *Astronomical Almanac* ima i specijalni dodatak koji daje novi sistem astronomskih konstanti i neophodna detaljna objašnjenja svih promena u odnosu na ranije brojeve almanaha (*Astronomical Almanac Supplement*, 1984).

Izmenjene su neke upečatljive karakteristike. Pored toga što se koriste nove fundamentalne konstante, izmenjena je osnova za računanje planetskih efemerida, a uvedena je i nova vremenska skala. Ta vremenska skala je TDT, definisana kao

$$\mathrm{TDT} = \mathrm{TAI} + 32^{\mathrm{s}}{,}184. \tag{B.1}$$

Međutim, relacija između svetskog vremena UT i zvezdanog vremena ostaje kao

$$\begin{aligned} S_0 \text{ u } 0^{\mathrm{h}}\,\mathrm{UT1} = {} & 6^{\mathrm{h}}41^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}{,}548\,41 \\ & + 8\,640\,184^{\mathrm{s}}{,}812\,866\,T_U \\ & + 0^{\mathrm{s}}{,}093\,104\,T_U^2 - 6^{\mathrm{s}}{,}2 \cdot 10^{-6}\,T_U^3, \end{aligned} \tag{B.2}$$

gde je T_U vreme u julijanskim stolećima od 36 525 dana, proteklo od 2000 januar 1, 12^{h} UT1 (JD 2 451 545,0). Odgovarajući datum u TDB je nova standardna epoha J2000,0, a generalno treba koristiti julijansku epohu definisanu kao

$$\mathrm{J}2000{,}0 + \frac{(\mathrm{JD} - 2\,451\,545{,}0)}{365{,}25}. \tag{B.3}$$

IAU sistem konstanti sadrži tri vrste. Razlika je napravljena između konstanti koje definišu (ulaze u definicije)—ima ih samo dve, c i k—osnovnih konstanti, kao i izvedenih konstanti. Tabela B.1 je zasnovana na IAU sistemu, ali je izostavljena razlika između osnovnih i izvedenih konstanti. Osim toga, neke dodatno izvedene vrednosti bile su sadržane zajedno sa dodatnim materijalom koji je u vezi sa galaktičkim koordinatama i Sunčevim apeksom. Skoro sve vrednosti tabele B.1 se već pojavljuju u tekstu ove knjige, ali su ovde sakupljene radi preglednosti.

Svi podaci tabele B.1 su standardizovani za epohu J2000,0. Na taj standarni ekvator i ekvinokcij odnose se ekvatorske koordinate koje su navedene, a tamo gde konstante imaju sekularne promene, navedene vrednosti u tabeli su date sa vredno-

stima konstanti za epohu J2000,0. Napomenimo da je za navedene gravitacione parametre za Sunce i Zemlju mnogo značajniji njihov oblik nego njihove mase. Uzrok srazmerno slabe tačnosti mase Sunca i Zemlje potiče od nepouzdanosti same gravitacione konstante G u SI jedinicama.

Tabela B.1. Fundamentalni astronomski podaci (J2000,0)

Brzina svetlosti	c	2,997 924 58 10^5 km s^{-1}
Gausova gravitaciona konstanta	k	0,017 202 098 95
Konstanta gravitacije	G	6,672 · 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
Masa Sunca	$M_\odot$	1,9891 · 10^{30} kg
Heliocentrična gravitaciona konstanta	$GM_\odot$	1,327 124 38 · 10^{20} m^3 s^{-2}
Astronomska jedinica	1 AJ	1,495 978 70 · 10^8 km
Paralaksa Sunca	$\pi_\odot$	8″,794 148
Poluprečnik Sunca	$R_\odot$	6,96 10^5 km
Masa Zemlje	$M_\oplus$	5,974 10^{24} kg
Geocentrična gravitaciona konstanta	$GM_\oplus$	3,986 005 · 10^{14} m^3 s^{-2}
Ekvatorski poluprečnik Zemlje	$R_\oplus$	6,378 140 · 10^3 km
Faktor Zemljine spljoštenosti	f	0,003 352 81
Masa Meseca	$M_☾$	0,012 300 02 $M_\oplus$
Poluprečnik Meseca	$R_☾$	1,738 · 10^3 km
Nagib ekliptike	ε	23°26′21″,448
Godišnji iznos opšte precesije u longitudi	p	50″,290 966
Godišnji iznos precesije u rektascenziji	m	3^s,074 957 5
Godišnji iznos precesije u deklinaciji	n	20″,043 109
Konstanta nutacije	N	9″,2025
Konstanta aberacije	$\varkappa$	20″,495 52
Ekvatorske koordinate galaktičkog pola		(12^{h}51^m,3; 27°07^m)
Ekvatorske koordinate galaktičkog centra		(17^{h}45^m,4; −28°56′)
Ekvatorske koordinate Sunčevog apeksa		(18^{h}08^m; 30°,5)

§ B.2. Podaci o planetama.

IAU sistem konstanti obuhvata neke preporuke koje se odnose na dimenzije planeta i njihove fizičke karakteristike. One od 1976. (IAU, 1983a) imaju neznatne izmene, a tabela B.2 se zasniva na ovim novim preporukama. Posebno, ekvatorski poluprečnik i spljoštenost se odnose na sferoide koji su korišćeni za aktuelne programe mapa. Dodate su i neke izvedene veličine, kao što su srednje gustine.

Dve zadnje kolone u tabeli B.2 zavise od putanjskih elemenata planeta, koji su dati u tabeli B.3. To su oskulatorni elementi za datum 1985 januar 15,0 TDB[6]. Oni se odnose na ekliptiku i ekvinokcij J2000,0. Takvi oskulatorni elementi omogućavaju da se odrede tačni položaji planeta za relativno kratke vremenske intervale. *Astronomical Almanac* daje takve oskulatorne elemente na 40-dnevnim intervalima i, naravno, za svaki precizan posao treba određivati tekuće vrednosti. Ako se

Tabela B.2. Fizički i rotacioni elementi planeta

Planeta	Ekvatorski poluprečnik u km	Spljoštenost	Masa $[M_\odot^{-1}]$	Srednja gustina $[kg/m^3]$	Period osne rotacije	Period revolucije u Julijanskim god.	Nagib orbite prema ekvatoru
Merkur	2 439	0	6 023 600	5 433	$58^d,65$	0,240 85	$0^\circ,01$
Venera	6 051	0	408 523,5	5 246	$243^d,01$	0,615 19	•177 ,34
Zemlja	6 378,14	0,003 352 81	332 946,0	5 515	$23^h\ 56^m$	1,000 0	23 ,44
Mars	3 393,4	0,005 186 5	3 098 710	3 942	$24^h\ 37^m$	1,880 7	25 ,19
Jupiter	71 398	0,064 808 8	1 047,355	1 332	$9^h\ 55^m$	11,861	3 ,13
Saturn	60 000	0,107 620 9	3 498,5	704	$10^h\ 39^m$	29,570	26 ,75
Uran	25 400	0,030	22 869	1 310	$15^h\ 34^m$	84,746	97 ,86
Neptun	24 300	0,025 9	19 314	1 760	$18^h\ 26^m$	166,57	29 ,55
Pluton	1 500	0	130 000 000	1 100	$6^d,39$	249,98	117 ,57

Tabela B.3. Oskulatorni elementi planeta za epohu 1985 januar 15,0 TDT, u odnosu na ekliptiku i srednji ekvinokcij J2000,0

Planeta	Velika poluosa u AJ	Srednje kretanje u °/danu	Ekscentricitet	Nagib	Longituda uzlaznog čvora	Longituda perihela	Srednja longituda za epohu
	a	n	e	i	Ω	ϖ	L_0
Merkur	0,387 099	4,092 34	0,205 629	$7^\circ,0059$	$48^\circ,350$	$77^\circ,434$	$209^\circ,6643$
Venera	0,723 326	1,602 15	0,006 772	3 ,3947	76 ,723	131 ,70	67 ,1413
Zemlja	1,000 018	0,985 582	0,016 773	0 ,0020	354 ,9	102 ,972	114 ,7122
Mars	1,523 638	0,524 061	0,093 298	1 ,8509	49 ,604	335 ,942	11 ,8733
Jupiter	5,202 48	0,083 099 1	0,048 058	1 ,3047	100 ,467	15 ,662	300 ,3429
Saturn	9,563 29	0,033 331 5	0,050 916	2 ,4846	113 ,713	93 ,444	227 ,2512
Uran	19,293 7	0,011 630 3	0,047 285	0 ,7746	74 ,056	177 ,048	249 ,2488
Neptun	30,274 3	0,005 917 02	0,006 851	1 ,7693	131 ,800	357 ,07	272 ,2648
Pluton	39,682 3	0,003 942 83	0,252 786	17 ,1313	110 ,421	224 ,499	217 ,4574

vrednosti tabele B 3 koriste za trenutke udaljene od date epohe, recimo nekoliko godina, tada izvedeni položaji planeta mogu, u neželjenim slučajevima, biti pogrešni skoro jedan stepen. Korišćenje podataka tabele B.3, za predloženi period, daje mogućnost da se ustanovi opšta oblast pretraživanja za planetu.

Putanjski elementi su, u stvari, sekundarne veličine. Efemeride planeta i efemeride Meseca u *Astronomical Almanacu* zasnovane su na numeričkoj integraciji (označenoj sa DE 200/LE 200) celokupnog Sunčevog sistema od 1800. do 2050. godine. Imajući ovo u vidu, položaji i vektori brzina su računati u pravouglim koordinatama koje se odnose na ekvator i ekvinokcij J2000,0. Tada se oskulatorni elementi računaju iz trenutnih vrednosti vektora položaja i brzina pomoću metoda koji je razmatran u §7.6.

Прилог Ц

Rešenja numeričkih zadataka

Glava I

1.5. 5869 nautičkih milja; 63°35′ W.

1.10. 4460 nautičkih milja; 56°34′ severo-zapadno (48°39′ N; 169°38′ W).

Glava II

2.9. 60°11′; 6°23′ i 186°23′.

2.10. $-1^{\circ}\!,4$.

Glava III

3.4. 79°.

Glava IV

4.2. 30^{d}.

4.5. $\ln n_0$; $r_0(n_0 - 1)$.

4.8. 6363,5 km; 55°41′; 10′44″.

4.9. 6°51′.

4.11. Astronomski i geocentrični.

Glava V

5.3. $-5^{s}\!,21$.

Glava VI

6.3. 1984 novembar 7,7.

6.4. $3{,}778 \cdot 10^{5}$ km.

6.5. 79°51′.

6.10. 23,08 km.

Glava VII

7.1. $19\,322\, M_{\odot}^{-1}$.

7.2. $408\,540\, M_{\odot}^{-1}$.

7.3. (55°13′38″; −4°36′26″).

7.4. ($2^h47^m32^s,9$; 9°15′29″).

7.8. 2,7668 AJ; 80°,718; 10°,606; 0,0784; 72°,841; 1986 februar 5,2.

Glava VIII

8.1. 0″,4; jun 21; mart 21; $5\sqrt{2}/2$ pc.

Glava IX

9.2. ($2^h16^m22^s,7$; 89°11′47″,3).

9.3. −345″,926; −345″,908; −300″,656.

9.6. ($2^h16^m26^s,5$; 89°11′46″,9).

9.7. ($2^h16^m22^s,7$; 89°11′47″,3).

9.10. 2102,4; 89°32′27″,1.

Glava X

10.2. $p = +50'',4$; $\Delta\varpi = +61'',7$.

10.3. 1985 mart 2 11^h15^m; 1985 mart 2 19^h40^m.

Glava XI

11.2. 11 830 AD ($17^h34^m11^s$; 54°52′); 25″,35; 0″,859.

11.3. $V_T \gg V_r$.

11.5. 0,0125 Å.

11.6. ($3^h32^m,0$; 54°32′).

Glava XII

12.4. ($5^h58^m43^s,156$; −0°02′31″,40).

12.5. −0,003 18; −0,130 52; −0,137 32; −0,164 73;
−0,640 29; 0,768 13; 0,864 86; −0,608 57.

Glava XIII

13.5. (−0,007 116; 0,008 171); (−0,002 692; −0,000 895); (0,008 613; 0,000 952).

13.6. 0,227 05; 0,428 29; 0,344 67.

13.7. ($3^h47^m03^s,3$; 24°06′09″).

Glava XIV

14.1. ($17^h42^m26^s,6$; −28°55′00″).

14.6. $$\begin{Vmatrix} -0{,}066\,989 & -0{,}872\,756 & -0{,}483\,539 \\ 0{,}492\,728 & -0{,}450\,347 & 0{,}744\,585 \\ -0{,}867\,601 & -0{,}188\,375 & 0{,}460\,200 \end{Vmatrix}.$$

14.7. Julijanska i Beselova epoha istog datuma koriste neznatno različite ekvinokcije [v. jednačinu (12.56)].

Glava XV

15.3. $36'$.

15.4. 57^{m}.

Glava XVI

16.1. 364 145,46 radijana. $27°,1$.

16.5. Može se dobiti samo relativna rektascenzija.

Glava XVII

17.1. $41°,1$; 0,876; $11°,1$; 0,991.

17.2. Retrogradno pri donjoj konjunkciji, direktno pri maksimalnoj elongaciji.

17.4. 0,4306 AJ; $39°,72$.

17.5. 2,77 AJ.

17.8. $26°,32$.

Glava XVIII

18.2. Da; Da; Ne.

18.5. $55°43'29''$; 0,997 707.

18.6. (0,555 215; 0,797 213; 0,227 171);
(−0,022 587; 0,054 144; −0,134 805).

18.7. $17^{h}14^{m}42^{s}$; $18^{h}52^{m}54^{s}$.

18.10. 9. maj; 8. novembar; 7. jun; 6. decembar.

Glava XIX

19.3. $1\,M_{\odot}$.

19.5. $1{,}14\,M_{\odot}$; 20,29 AJ.

19.7. $\frac{1}{30}$; 1 radijan; $0^{d},5$; $0{,}316\,M_{\odot}$.

ЛИТЕРАТУРА

Literatura

Allen, C. W. (1976). *Astrophysical Quantities*, 3rd edn. London: The Athlone Press.

APFS. *Apparent Places of the Fundamental Stars* Annual publication issued by Astronomisches Rechen-Institut in Heidelberg. Karlsruhe: Verlag G. Braun.

Astronomical Almanac. Annual publication. Washington: US Government Printing Office, and London: Her Majesty's Stationery Office.

Astronomical Almanac Supplement (1984) The Improved IAU System. In the *Astronomical Almanac* (1984), Section S Washington: US Government Printing Office, and London: Her Majesty's Stationery Office.

Christiansen, W. M. and **Högbom, J. A.** (1984) *Radio Telescopes*. 2nd edn. Cambridge University Press.

Counselman, C. C. (1976). Radio Astrometry. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, **14**, 197.

Danjon, A. (1960). The Impersonal Astrolabe. In *Stars and Stellar Systems*, Vol. 1, *Telescopes*, ed. G. P. Kuiper and B. M. Middlehurst, str. 115–137. University of Chicago Press.

Duffet-Smith, P. (1981). *Practical Astronomy with Your Calculator*, 2nd edn. Cambridge University Press.

Explanatory Supplement (1974). *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. London: Her Majesty's Stationery Office.

FK4—**Fricke, W.** and **Kopff, A.** (1963). Fourth Fundamental Catalogue (FK4). *Veröffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut*: Heidelberg.

Fricke, W. (1980). On the Determination of the Equator and Equinox of the New Fundamental Reference Coordinate System, the FK5. *Celestial Mechanics*, **22**, 113.

Handbook of the British Astronomical Association. Annual publication. London: British Astronomical Association.

Harris, D. L. (1961). Photometry and Colorimetry of Planets and Satellites. In *Planets and Satellites*, ed. G. P. Kuiper and B. M. Middlehurst, str. 272–342. University of Chicago Press.

IAU (1977). *Transactions of the International Astronomical Union*, **XVI** B, 58.

IAU (1982). *Transactions of the International Astronomical Union*, **XVIII** A, 8.

IAU (1983). *Transactions of the International Astronomical Union*, **XVIII** B, 67.

IAU (1983a). *Transactions of the International Astronomical Union*, **XVIII** B, 147.

McVittie, G. C. (1965). *General Relativity and Cosmology*, 2nd edn. London: Chapman and Hall.

Markowitz, W. (1960). The Photographic Zenith Tube and Dual-Rate Moon Position Camera. In *Stars and Stellar Systems*, Vol. 1, *Telescopes*, ed. G. P. Kuiper and B. M. Middlehurst, str. 88–114. University of Chicago Press.

Mihalas, D. M. and **Binney, J. J.** (1981). *Galactic Astronomy—Structure and Kinematics of Galaxies*. Oxford: W. H. Freeman and Company.

Murray, C. A. (1983). *Vectorial Astrometry*. Bristol: Adam Hilger Ltd.

Newcomb, S. (1895). Tables of the Sun. *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, VI. Part 1. Washington: US Government Printing Office.

Orlov, B. A. (1956). *Refraction Tables of the Pulkova Observatory*. 4th edn. Moscow, Leningrad: Academy of Sciences Press.

Pound, R. V. and **Snider, J. L.** (1965) Effect of Gravity on Gamma Radiation. *Physical Review*, **140** B, 788.

Roy, A. E. (1982). *Orbital Motion*, 2nd edn. Bristol: Adam Hilger Ltd.

Ryle, M. and **Elsmore, B.** (1973). Astrometry with the 5-km Radio Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **164**, 223.

Sadler, D. H. and **Clemence, G. M.** (1954). *The Improved Lunar Ephemeris 1952–1959*. Joint Supplement to the American Ephemeris and the (British) Nautical Almanac. Washington: US Government Printing Office.

Schutz, B. (1984). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press.

Sky and Telescope. Monthly publication. Cambridge, Mass.: Sky Publishing Corporation.

Smart, W. M. (1977). *Textbook on Spherical Astronomy*, 6th edn. Cambridge University Press.

Will, C. M. (1981). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press.

Woolard, E. W. and **Clemence, G. M.** (1966). *Spherical Astronomy*. New York: Academic Press.

ИНДЕКС

Indeks